
NOUV. ANNALES
DE
MATHEMATIQUES.
15. 16.
1856-57.



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1856.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie,
Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME QUINZIÈME

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1856

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

On entend souvent parler des comètes et de la détermination provisoire de leurs orbites paraboliques au moyen de trois observations. Je crois être agréable à nos lecteurs en leur offrant pour étrennes un calcul de comète d'après la méthode d'Olbers perfectionnée par Gauss. Nous sommes entrés dans une ère de calculs, soit : je crois qu'il vaut mieux que la jeunesse s'occupe de calculs concernant les affaires du ciel que de ceux qui se rapportent aux affaires de la Bourse. Ce n'est pas là l'opinion du monde ; mais je pense avec Rollin qu'il faut enseigner dans les colléges principalement ce qu'on n'apprend pas dans le monde et quelquefois même l'opposé de ce qu'on y apprend.

OBSERVATIONS DE LA SECONDE COMÈTE DE L'ANNÉE 1813,

Faites dans l'Observatoire de Gottingue,

Avec quelques annotations relatives au calcul des orbites paraboliques ;

PAR CHARLES-FRÉDÉRIC GAUSS.

Lu à la Société royale des Sciences, le 10 septembre 1813.

A partir du 7 avril, j'ai commencé à observer moi-même, à notre observatoire, la comète découverte le

3 avril de cette année, par mon très-cher collègue M. Harding, dans la constellation du Taureau de Poniatowski. Voici les déterminations qu'il a été possible d'obtenir au moyen d'un microscope circulaire adapté à un télescope de 10 pieds :

1813.	T. M. DE GOTTING.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 7	13.12. 2	271. 7.19,3	5.34.36,7 bor.
9	13.35.40	270.10.33,5	4.11. 3,4
11	13.17.43	269. 1.19,9	2.33. 0,7
14	13. 7.36	266.44. 5,5	0.33. 0,8 aust.
21	13.23.00	256.39.19,3	12.57.56,0

Ensuite Harding a fait au quart de cercle mural les observations suivantes :

1813.	T. M. DE GOTTING.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 21	15. 7.21	256.34.19,6	13. 2.26,5 aust.
24	14.22.50	248.23.21	21.45. 2
25	14. 4.21	244.44.42	25.10.42

Le 24 et le 25, la comète était extrêmement remarquable à l'œil nu; les nuits suivantes, un ciel couvert de nuages et le mouvement rapide de descente australe de la comète mirent fin aux observations.

Il me paraît superflu de consigner ici les éléments paraboliques que j'ai déduits tout de suite des trois premières observations, car j'ai confié le soin de calculer ces éléments avec beaucoup plus d'exactitude à un calculateur très-exercé, au docteur Gerling. C'est à lui que nous de-

vons les éléments corrigés suivants, adaptés autant que possible à toutes nos observations et à celles que nous a transmises Olbers.

Logarithme de la distance périhélie....	0,0849212
Temps du passage au périhélie au méridien de Gottingue, mai 1813........	19,44507
Long. du périhélie..................	197° 43′ 7″,7
Long. du nœud ascendant............	42.40.15,2
Inclinaison de l'orbite...............	81, 2.11,8
Mouvement *rétrograde*.	

Observations d'Olbers.

1813.	T. M. DE BREM.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 14	13.31. 4	266.42.51,2	0.34. 2,8 aust.
15	12.14.29	265.48.47,9	1.46. 4,5
19	11.38.00	260.40.39,1	8.15.23,7
21	12.00.35	256.51.59,3	12.42.54,3
24	11.58.38	248.43.57,7	21.25. 9,8
25	11.41.30	245. 8.18,0	24.49. 2,4
	12. 5.38	245. 4. 3,0	24.54.16,4

Observation de Bouvard à l'Observatoire de Paris.

1813.	T. M. DE PARIS.	ASC. DR. APPAR.	DÉCLIN. APPAR.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″
Avril 13	16.22. 2	267.27.18	0.24.46 bor.

Le tableau snivant contient les différences entre les observations et celles qui résultent des éléments rappor-

tés ci-dessus :

	DIFFÉRENCES.		OBSERVATEURS.
	Ascension droite.	Déclinaison.	
Avril 7	+ 3″,8	+ 8″,5	Gauss.
9	+ 2,0	+ 34,3	Gauss.
11	— 5,3	— 17,7	Gauss.
13	— 1,6	— 0,4	Bouvard.
14	— 7,4	— 28,6	Gauss.
.	+ 2,7	— 8,4	Olbers.
15	— 0,9	+ 28,7	Olbers.
19	— 25,1	+103,9	Olbers.
21	— 56,6	— 59,2	Olbers.
.	— 30,1	— 5,2	Gauss.
.	— 22,8	— 24,1	Harding.
24	— 45,2	— 41,4	Olbers.
.	+ 0,4	— 11,6	Harding.
25	— 23,3	— 67,8	Olbers.
.	— 9,4	— 27,4	Olbers.
.	+ 9,7	+ 1,4	Harding.

On a tenu compte de l'aberration et de la parallaxe.

On me permettra d'ajouter ici quelques abréviations de calcul dont j'ai fait souvent usage dans la première détermination de l'orbite parabolique selon la méthode d'Olbers, abréviations qui rendent cette méthode, déjà si expéditive, encore plus courte et mieux propre aux applications numériques. Ces abréviations sont relatives au calcul des rayons vecteurs et principalement au calcul de la corde qui joint le premier au dernier lieu observé. Olbers fait usage d'expressions de cette forme $\sqrt{f+g\rho+h\rho^2}$ et détermine les coefficients f, g, h par des opérations assez simples, mais qui exigent, pour obtenir une précision suffisante, les grandes Tables de logarithmes avec sept

ou du moins avec six figures décimales. J'ai remplacé ces expressions par d'autres qui paraissent être quelque peu plus commodes pour le calcul, et présentent aussi cet avantage de ce que les petites Tables de logarithmes avec cinq décimales peuvent suffire à toutes les opérations. Le point essentiel porte sur les considérations suivantes. Soient :

$\odot$, $\odot'$, $\odot''$, les longitudes du Soleil dans la première, deuxième et troisième observation ;

R, R′, R″, distances du Soleil à la Terre ;

α, α', α'', longitudes géocentriques de la comète ;

6, $6'$, $6''$, latitudes géocentriques de la comète ;

r, r', r'', distances de la comète au Soleil ;

ρ, ρ', ρ'', distances raccourcies de la comète à la Terre ;

t, t', t'', temps des observations ;

k, corde qui réunit le *premier* lieu au *troisième* lieu de la courbe ;

$M = \frac{\rho''}{\rho}$.

Cela posé, on voit facilement que l'on a

$$(1)\quad r = \sqrt{(\rho\cos\alpha - R\cos\odot)^2 + (\rho\sin\alpha - R\sin\odot)^2 + \rho^2\tang^2 6},$$

$$(2)\quad r'' = \sqrt{\left[\begin{array}{l}(M\rho\cos\alpha'' - R''\cos\odot'')^2 + (M\rho\sin\alpha'' - R''\sin\odot'')^2 \\ \qquad + M^2\rho^2\tang^2 6'',\end{array}\right]}$$

$$(3)\quad k = \sqrt{\left[\begin{array}{l}(M\rho\cos\alpha'' - \rho\cos\alpha - R''\cos\odot'' + R\cos\odot)^2 \\ + (M\rho\sin\alpha'' - \rho\sin\alpha - R''\sin\odot'' + R\sin\odot)^2 \\ + (M\rho\tang 6'' - \rho\tang B)^2\end{array}\right]};$$

les équations (1) et (2) développées prennent cette forme,

$$r = \sqrt{\frac{\rho^2}{\cos^2 6} - 2\rho R\cos(\alpha - \odot) + R^2},$$

$$r'' = \sqrt{\frac{M^2\rho^2}{\cos^2 6''} - 2M\rho R''\cos(\alpha'' - \odot'') + R''^2}.$$

En posant donc

$$\cos 6 \cos(\alpha - \odot) = \cos\psi,$$
$$R \sin\psi = B,$$
$$\cos 6'' \cos(\alpha'' - \odot'') = \cos\psi'',$$
$$R'' \sin\psi'' = B'',$$

nous aurons

$$r = \sqrt{\left(\frac{\rho}{\cos 6} - R\cos\psi\right)^2 + B^2}.$$

$$r'' = \sqrt{\left(\frac{M\rho}{\cos 6''} - R''\cos\psi''\right)^2 + B''^2}.$$

Introduisons cinq quantités auxiliaires g, G, h, H, ζ déterminées par ces équations,

$$R''\cos\odot'' - R\cos\odot = g\cos G,$$
$$R''\sin\odot'' - R\sin\odot = g\sin G,$$
$$M\cos\alpha'' - \cos\alpha = h\cos\zeta\cos H,$$
$$M\sin\alpha'' - \sin\alpha = a\cos\zeta\sin H,$$
$$M\,\mathrm{tang}\,6'' - \mathrm{tang}\,6 = h\sin\zeta.$$

La formule (3) se change en celle-ci :

$$k = \sqrt{\left[\begin{array}{r}(\rho h\cos\zeta\cos H - g\cos G)^2 + (\rho h\cos\zeta\sin H - g\sin G)^2 \\ + \rho^2 h^2 \sin^2\rho\end{array}\right]}$$
$$= \sqrt{\rho^2 h^2 - 2\rho h g\cos\zeta\cos(G - H) + g^2}.$$

Ainsi, si nous posons

$$\cos\zeta\cos(G - H) = \cos\varphi, \quad g\sin\varphi = A,$$

on aura

$$k = \sqrt{(\rho h - g\cos\varphi)^2 + A^2}.$$

Si, de plus, nous posons $\varphi h - g\cos\varphi = u$,

$$k = \sqrt{u^2 + A^2}.$$

Nous croyons qu'il sera agréable à un grand nombre de lecteurs si nous indiquons non-seulement la liaison bien ordonnée de toutes les opérations relatives à ces transformations, mais encore si nous y ajoutons les opérations finales de manière que l'on trouve ici réuni tout ce qui est exigé pour le *premier* calcul des orbites paraboliques. Nous éclaircirons en même temps les règles par des applications numériques prises dans les observations sur notre comète. Nous choisissons celles des 7, 14 et 21 avril. La réduction de ces observations fournit les *données* suivantes :

$t = 7,55002$,	$\odot = 17^\circ.47'.41''$,
$t' = 14,54694$,	$\odot' = 24.38.45$,
$t'' = 21,59931$,	$\odot'' = 31.31.35$,
$\alpha = 271^\circ.16'.38''$,	$\log R = 0,00091$,
$\alpha' = 266.27.22$,	$\log R' = 0,00175$,
$\alpha'' = 256.48.\ 8$,	$\log R'' = 0,00260$.
$\beta = +29^\circ.\ 2'.\ 0''$,	
$\beta' = +22.52.18$,	
$\beta'' = +\ 9.53.12$,	

I. La *première* opération consiste dans la détermination de la valeur approché de M, au moyen de cette formule,

$$M = \frac{t''-t'}{t'-t}\,\frac{\operatorname{tang}\beta'\sin(\alpha-\odot)-\operatorname{tang}\beta\sin(\alpha'-\odot')}{\operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha'-\odot')-\operatorname{tang}\beta'\sin(\alpha''-\odot'')}.$$

Dans notre exemple, on trouve

$$\log M = 9,75799.$$

II. Il faut déterminer maintenant les quantités g, G, h, H, ζ par les formules suivantes, qui sont équivalentes à celles qui ont été données ci-dessus, mais qui sont plus

commodes pour le calcul :

$$R'' \cos(\odot'' - \odot) - R = g \cos(G - \odot),$$
$$R'' \sin(\odot'' - \odot) = g \sin(G - \odot),$$
$$M - \cos(\alpha'' - \alpha) = h \cos\zeta \cos(H - \alpha''),$$
$$\sin(\alpha'' - \alpha) = h \cos\zeta \sin(H - \alpha''),$$
$$M \operatorname{tang} \beta'' - \operatorname{tang} \beta = h \sin\zeta.$$

On a

$$G = 113^\circ\, 43'\, 57'',$$
$$\log g = 9{,}38029,$$
$$H = 109^\circ.\ 5'.49'',$$
$$\zeta = 44.\ 13.\ 9,$$
$$\log h = 9{,}81477.$$

III. Ensuite nous poserons

$$\cos\zeta \cos(G - H) = \cos\varphi,$$
$$\cos\beta \cos(\alpha - \odot) = \cos\psi,$$
$$\cos\beta'' \cos(\alpha'' - \odot'') = \cos\psi'',$$
$$g \sin\varphi = A,$$
$$R \sin\psi = B,$$
$$R'' \sin\psi'' = B''.$$

Si, par hasard, les cosinus des angles φ, ψ, ψ'' diffèrent peu de l'unité, il faudra se servir de Tables à six ou même à sept figures décimales.

D'ailleurs, il n'est pas nécessaire d'évaluer ces angles en degrés, minutes et secondes; il suffit de passer tout de suite des logarithmes des cosinus aux logarithmes des sinus.

Dans notre exemple, on trouve

$$\log A = 9{,}22527,$$
$$\log B = 9{,}98706,$$
$$\log B'' = 9{,}86038.$$

IV. Enfin, on pose

$$h \cos 6 = b,$$
$$\frac{h \cos 6'}{M} = b'',$$
$$g \cos \varphi - b \ \mathrm{R} \ \cos \psi = c,$$
$$g \cos \varphi - b'' \mathrm{R}'' \cos \psi'' = c''.$$

Dans notre exemple, on a

$$\log b = 9,75645,$$
$$\log b'' = 0,05028,$$
$$c = + 0,31365,$$
$$c'' = + 0,95443.$$

V. Tout étant ainsi préparé, les rayons vecteurs r, r'' et la corde k dépendent de l'inconnue u par ces relations,

$$r = \sqrt{\left(\frac{u + c}{b}\right)^2 + \mathrm{B}^2},$$
$$r'' = \sqrt{\left(\frac{u + c''}{b''}\right)^2 + \mathrm{B}''^2},$$
$$k = \sqrt{u^2 + \mathrm{A}^2}.$$

On détermine cette inconnue u par des *essais*, de manière qu'elle satisfasse à l'équation

$$(r + r'' + k)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - k)^{\frac{3}{2}} = \frac{t'' - t}{m} \ (*),$$

où m désigne un nombre de jours 9,6887401, et

$$\log m = 0,9862673.$$

Il faut donner le signe + à la quantité $(r + r'' - k)^{\frac{3}{2}}$, si le mouvement héliocentrique de la comète dans l'in-

(*) Célèbre théorème d'Euler sur les propriétés dynamiques des cordes de la parabole, généralisé par Lambert pour toutes les coniques. Nous donnerons une démonstration du théorème général. Tr.

tervalle $t'' - t$ surpasse l'angle 180 degrés; mais ce cas ne peut jamais arriver dans les suppositions sur lesquelles est fondée la première détermination de l'orbite. Il est presque inutile d'avertir que pour calculer r on introduit un angle auxiliaire θ, tel que

$$\frac{b\,\mathrm{B}}{u+c} = \tan\theta,$$

d'où

$$r = \frac{\mathrm{B}}{\cos\theta};$$

et de même pour r'' et k: et chacun voit facilement combien il est extrêmement commode de pouvoir faire usage dans ces calculs de notre Table pour trouver immédiatement les logarithmes des sommes et des différences.

Dans notre exemple, on a

$$\log\frac{t''-t}{m} = 0,16139,$$

et, après un petit nombre d'essais, on trouve

$$u = 0,24388.$$

VI. La quantité u étant connue, nous aurons

$$\rho = \frac{u + g\cos\varphi}{h}, \quad \rho'' = \mathrm{M}\rho,$$

$$\log\rho = 9,80364, \quad \log\rho'' = 9,56163.$$

Les opérations restantes sont assez connues; mais, pour que tout s'y trouve, il nous paraît convenable de consigner encore les formules restantes dont nous avons coutume de nous servir.

Soient donc :

λ, λ'', les longitudes héliocentriques de la comète dans la première et la troisième observation;

β, β'', les latitudes héliocentriques ;

r, r'', les longitudes dans l'orbite ;

Ω, longitude du nœud ascendant ;

i, l'inclinaison de l'orbite à prendre entre o et 90 degrés si, selon le mode ordinaire, nous distinguons le mouvement direct et rétrograde ;

ω, longitude du périhélie ;

T, temps du passage au périhélie ;

q, distance dans le périhélie.

VII. On trouve les positions héliocentriques par les formules

$$\rho \cos(\alpha - \odot) - R = r \cos\beta \cos(\lambda - \odot),$$
$$\rho \sin(\alpha - \odot) = r \cos\beta \sin(\lambda - \odot),$$
$$\rho \operatorname{tang}\beta = r \sin\beta,$$
$$\rho'' \cos(\alpha'' - \odot'') - R'' = r'' \cos\beta'' \cos(\lambda'' - \odot''),$$
$$\rho'' \sin(\alpha'' - \odot'') = r'' \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \odot''),$$
$$\rho'' \operatorname{tang}\beta'' = r'' \sin\beta''.$$

L'accord des valeurs des rayons vecteurs r, r'' déduites de ces formules, avec les valeurs trouvées ci-dessus, peut servir de contrôle. Le mouvement est direct où rétrograde, selon que λ'' est supérieur ou inférieur à λ.

Dans notre exemple nous trouvons

$$\lambda = 225°.4'.22'', \quad \beta = +\ 14°.51'.39'', \quad \log r = 0{,}13896,$$
$$\lambda'' = 223.6.55, \quad \beta'' = +\ 2.49.28, \quad \log r'' = 0{,}11068;$$

ainsi le mouvement de la comète est rétrograde.

VII. Pour trouver la longitude du nœud et l'inclinaison, on prend les formules

$$\pm \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega),$$
$$\pm \frac{\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta \cos(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} = \operatorname{tang} i \cos(\lambda - \Omega);$$

le signe supérieur est pour le mouvement direct et l'inférieur pour le mouvement rétrograde.

Ensuite, les longitudes dans l'orbite se déduisent des formules

$$\frac{\tang(\lambda - \Omega)}{\cos i} = \tang(v - \Omega),$$

$$\frac{\tang(\lambda'' - \Omega)}{\cos i} = \tang(v'' - \Omega),$$

$v - \Omega$, $v'' - \Omega$ doivent se prendre respectivement dans le même quadrant dans lequel se trouvent $\lambda - \Omega$ et $\lambda'' - \Omega$.

Pour notre comète, nous trouvons

$$\begin{aligned} \Omega &= 42^\circ.40'.\ 8'', \\ i &= 81.\ \ 1.\ \ 3, \\ v &= 237.43.\ \ 7, \\ v'' &= 225.31.32 \end{aligned}$$

IX. Les formules suivantes donnent la longitude du périhélie et la distance dans le périhélie :

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \tfrac{1}{2}(v - \omega),$$

$$\frac{\cot \frac{1}{2}(v'' - v)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(v'' - v)\sqrt{r''}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \tfrac{1}{2}(v - \omega);$$

pour notre comète,

$$\omega = 197^\circ\, 37'\, 51'', \quad \log q = 0,08469.$$

X. Enfin, on déduit des Tables de Barker les mouvements moyens qui correspondent aux anomalies vraies $v - \omega$, $v'' - \omega$ ou $\omega - v$, $\omega - v''$.

Représentant ces mouvements moyens par M et M'', on a

$$T = t \mp M n q^{\frac{3}{2}} = t'' \mp M'' n q^{\frac{3}{2}};$$

les signes supérieurs si dans le mouvement direct $v > \omega$, $v'' > \omega$ ou dans le mouvement rétrograde $v < \omega$, $v'' < \omega$,

et les signes inférieurs dans le cas opposé. La quantité n est constante et son logarithme égale 0,0498723. L'accord des deux valeurs de T fournit un moyen de contrôle.

Dans notre exemple, nous trouvons

$$T = 49,518,$$
$$T = 49,517;$$

Ainsi on peut adopter pour le temps du passage par le périhélie : mai 19,5175.

Si, au moyen de ces éléments, on calcule le lieu géométrique pour l'observation intermédiaire (14 avril), on trouve pour longitude 266° 27′ 15″, latitude 22° 52′18 bor. Celle-ci ne diffère que de 7 secondes, l'autre s'accorde entièrement avec l'obsérvation.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES (Fin)

(voir tome XIV, page 394).

3e *Exemple :*

$$x - \tan x = 0,$$

équation que l'on rencontre dans la théorie des oscillations des corps élastiques et dans la théorie de la chaleur.

On peut écrire

$$\frac{x\cos x - \sin x}{\cos x} = 0,$$

et démontrer comme ci-dessus que les racines de l'équation

$$\frac{1}{\cos x} = 0$$

n'appartiennent pas à l'équation ; il suffit donc de consi-

dérer seulement l'équation

$$x \cos x - \sin x = 0.$$

A chaque racine α correspond une racine $-\alpha$; on n'a donc besoin que de chercher les racines positives. La plus petite de ces racines est zéro.

$$f''(x) = -(x \cos x + \sin x),$$
$$f'(x) = -x \sin x,$$
$$f(x) = x \cos x - \sin x,$$

ω étant une très-petite quantité, on obtient

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$,
(ω)	$-$	$-$	$-$
(90°).....	$-$	$-$	$+$

il n'y a donc pas de racines entre o et 180°, et non plus, évidemment, entre 90 et 180 degrés.

On a

$(180^\circ + \omega)$.....	$+$	$+$	$-$
(270°).....	$+$	$+$	$+$

Il y a donc une racine entre ces limites; en les resserrant, on trouve

	$+$	$+$	$-$
$(4,4)$.....	2,3,	4,187,	0,4006,
	$+$	$+$	$+$
$(4,5)$.....	1,92,	4,398885,	0,028949.

(Il faut se rappeler que l'arc dont la longueur est 4,4 [rayon égale 1], contient 252° 6′ 5″, etc.)

$$\frac{2,3}{8,37} = 0,2, \quad k = 0, \quad n = 1,$$

limite extrême égale 4,5.

$$\frac{0,028}{4,398} = 0,00\ldots \text{ (car } 2n + k = 0).$$

1re approximation :

$$4,5 - 0,01 = 4,49, \quad f(4,49) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,49 et 4,5.

4,5 est encore limite extrême :

$$\frac{0,028949}{4,398885} = 0,0065 \quad (4n + k = 4).$$

2e approximation :

$$4,5 - 0,066 = 4,4934, \quad f(4,4934) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,4934 et 4,4935 ;

$$\frac{f(4,4935)}{f'(4,4935)} = \frac{0,000396339}{4,38627} = 0,0000935 \ (8n + k = 8).$$

3e approximation :

$$4,4935 - 0,00009036 = 4,49340964,$$

exacte jusqu'à $(\frac{1}{10})^8$ près ; cette valeur correspond à un arc de $257^\circ 27' 12'',9268$. Euler trouve

$$257^\circ 27' 12'' = 4,49340834 ;$$

Poisson trouve 4,49331, expression déjà fautive à la quatrième décimale, il faut lire probablement 4,49341 (*).

On trouve de la même manière les autres racines qui sont en nombre infini.

4e *Exemple :*

$$(4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x = 0.$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 420.
Poisson donne pour valeur de la seconde racine 7,73747 ; inexact dès la seconde décimale. La vraie valeur est 7,725.

Cette équation se présente dans la théorie des oscillations d'une sphère élastique.

A chaque racine positive α correspond une racine négative $-\alpha$. Il suffit de chercher les racines positives.

$$f(x) = (4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x,$$
$$f'(x) = -x(3x\cos x + 2\sin x),$$
$$f''(x) = (3x^2 - 2)\sin x - 8x\cos x;$$

la fonction $f''(x)$ reste toujours négative dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 45^\circ$.

Dans cet intervalle $f(x)$ peut être prise pour fonction déterminante; ω étant un très-petit arc, on obtient

$$\begin{array}{ll} (\omega)\ldots\ldots & - - - \\ (45^\circ)\ldots\ldots & - - - \end{array}$$

il n'y a donc pas de racines entre 0 et 45 degrés.

$f''(x)$ change de signe dans l'intervalle de 45 à 90 degrés; on ne peut donc prendre $f''(x)$ pour fonction déterminante; on pourrait diviser cet intervalle en d'autres intervalles plus petits et de manière que $f''(x)$ ne change pas de signe, mais il est plus court de prendre les dérivées supérieures.

$$f'''(x) = (3x^2 - 10)\cos x + 14x\sin x,$$
$$f^{\text{IV}}(x) = (24 - 3x^2)\sin x + 20x\cos x,$$

$f^{\text{IV}}(x)$ reste constamment positive entre 0 et 90 degrés; on a les deux suites

$$\begin{array}{ll} (0)\ldots\ldots & + - - - - \\ (90^\circ)\ldots\ldots & + + + - - \end{array}$$

Il y a une variation dans chaque suite, par conséquent point de racines entre 0 et 90 degrés.

Dans l'intervalle de 90 à 180 degrés, $f''(x)$ reste posi-

tive et l'on a

$$(90^\circ)\ldots\ldots \quad + \; - \; - \; - \; -$$
$$(180^\circ)\ldots\ldots \quad + \; + \; + \; + \; +$$

Il existe donc une racine entre 90 et 180 degrés, c'est-à-dire entre $x = 1{,}5707951$ et $x = 3{,}1415927$. Resserrant ces limites, on trouve

$$\begin{array}{lccc} & + & + & - \\ (2{,}5)\ldots\ldots & 26{,}04, & 12{,}029, & 0{,}816, \\ & + & + & + \\ (2{,}6)\ldots\ldots & 27{,}2, & 14{,}707, & 0{,}519. \end{array}$$

$$\frac{27{,}2}{2.12{,}029} = 1,\ldots, \quad k = -1, \quad n = 1;$$

ainsi la condition $n \gtreqless 1 - k$ n'est pas remplie. Resserrant encore les limites,

$$\begin{array}{lccc} & + & + & - \\ (2{,}56)\ldots\ldots & 26{,}81, & 13{,}901, & \\ & + & + & + \\ (2{,}57)\ldots\ldots & 26{,}92, & 13{,}88437, & 0{,}09057. \end{array}$$

$$\frac{26{,}92}{2.13{,}8} = 0{,}9, \quad k = 0, \quad n = 2;$$

la condition est remplie; la limite *extrême* est 2,57, le quotient

$$\frac{0{,}09057}{13{,}88437} = 0{,}0065, \quad (2n + k = 4).$$

1re approximation :

$$2{,}57 - 0{,}0066 = 2{,}5634,$$

valeur trop petite.

Dans l'opération suivante, on obtient la valeur exacte jusqu'à la huitième décimale $(4n + k = 8)$.

$$\frac{f(2,5635)}{f'(2,5635)} = \frac{0,00090157}{13,7095659} = 0,00006576.$$

Ainsi la 2ᵉ approximation est

$$2,5635 - 0,00006577 = 2,5634342 3.$$

Poisson trouve 2,56334 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 420).

Il n'y a pas de racines entre 180 et 270 degrés ; il en existe une dans le quatrième quadrant et $f''(x)$ reste toujours négative dans cet intervalle ; on peut donc la prendre pour fonction déterminante.

$$\begin{array}{llll} & - & - & + \\ (6,0)\ldots\ldots & 75,7, & 100,34, & 6,01, \\ & - & - & - \\ (6,1)\ldots\ldots & 67,95, & 107,53, & 4,38. \end{array}$$

On déduit successivement :

1ʳᵉ approximation......	6,05
2ᵉ approximation......	6,0586
3ᵉ approximation......	6,0586701

Poisson trouve 6,05973.

Le nombre des racines est infini ; la $n^{ième}$ est comprise entre $(n - \frac{1}{2})\pi$ et $n\pi$.

Observation. Dans la dernière édition de l'excellente *Algèbre* de M. Bertrand, on donne une théorie simple des approximations pour les équations transcendantes, convenable aux examens, très-utile aux candidats. En fait d'approximations, les méthodes générales ne dispensent jamais d'imaginer des procédés particuliers pour des cas particuliers.

SUR UNE ASSERTION DE GOLDBACH RELATIVE AUX NOMBRES IMPAIRS;

PAR M. STERN,

Professeur à Gottingue.

Dans la *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres*, on lit (t. I, p. 595) un théorème sur les nombres que Goldbach avait trouvé par induction, savoir que tous les nombres impairs sont de la forme $p + 2a^2$, où p désigne au nombre premier, a un nombre entier ou zéro. Si ce théorème était vrai, il s'ensuivrait donc que tout nombre impair non premier est de la forme $p + 2b^2$, p étant un nombre premier et b un nombre entier plus grand que zéro, pendant que les nombres premiers ne sont pas tous de cette forme. Euler, auquel Goldbach avait communiqué ce théorème, dit l'avoir vérifié pour tous les nombres plus petits que 1000 et il ajoute qu'il a examiné beaucoup de nombres plus grands sans trouver une exception, et que par cette raison il croit ce théorème généralement vrai sans pourtant le vouloir garantir (*ib.*, page 596). D'un autre endroit (p. 606) on doit conclure qu'Euler a examiné au moins tous les nombres jusqu'à 2500.

Il y a quelque temps, j'étais conduit à répéter le calcul d'Euler sur tous les nombres plus petits que 1000 et je remarquai alors que les nombres premiers plus petits que cette limite qui *ne sont pas* de la forme $p + 2b^2$, sont tous de la forme $6n + 5$: ce sont les nombres 17, 137, 227, 977, pendant qu'il existe beaucoup de nombres

premiers qui sont en même temps de la forme $6n + 5$ et de la forme $p + 2b^2$, comme, par exemple, le nombre 41. C'est pour cela que j'engageai plusieurs jeunes géomètres étudiant à Gottingue à continuer le calcul. Ils ont d'abord examiné tous les nombres jusqu'à 6000, et cela a conduit au résultat remarquable que le théorème de Goldbach est faux. En effet, on trouve dans l'intervalle indiqué deux nombres impairs composés qui ne sont pas de la forme $p + 2b^2$, le nombre $5777 = 53.109$ et le nombre $5993 = 13.461$. Mais nous avons pu remarquer en même temps qu'encore dans cet intervalle tous les nombres premiers ou composés qui ne sont pas de la forme $p + 2b^2$, sont tous de la forme $6n + 5$. Il y en a huit, savoir : 17, 137, 227, 977, 1187, 1493, 5777, 5993. Le calcul continué jusqu'à 9000 n'a plus donné aucune exception à la règle de Goldbach ; c'est-à-dire que tous les nombres impairs renfermés entre 6000 et 9000 sont tous de la forme $p + 2b^2$. Il est donc prouvé par le calcul que tous les nombres impairs plus petits que 9000 qui ne sont pas de la forme $6n + 5$, sont de la forme $p + 2b^2$, et l'on peut demander si le théorème de Goldbach n'est pas au moins généralement vrai sous cette restriction.

PROBLÈME SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE ;

Par M. POUDRA.

Deux courbes du troisième ordre passent par les quatre points communs a, b, c, d, en outre la première passe par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5, et la deuxième par les

points 1', 2', 3', 4', 5', ce qui détermine complétement les deux courbes. On demande de trouver la section conique qui passe par les cinq autres points inconnus d'intersection des deux courbes.

Par les quatre points *a*, *b*, *c*, *d*, on trace les cinq coniques qui passent successivement par chacun des cinq points 1, 2, 3, 4, 5.

De même par les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* et les cinq 1', 2', 3', 4', 5', on fait passer cinq autres coniques.

En un des points communs, tel que *a*, on mène les tangentes à ces deux séries de cinq coniques. On a ainsi deux faisceaux de cinq tangentes.

On détermine dans le plan le point P, d'où les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 sont vus sous un faisceau homographique à celui des cinq premières tangentes; et de même le point P', d'où les cinq points 1', 2', 3', 4', 5' sont vus sous un faisceau homographique à celui des secondes tangentes. On sait que le point P appartiendra à la première courbe du troisième ordre et le point P' à la seconde.

Si l'on voulait déterminer une infinité de points de ces deux courbes, on ferait passer par les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* une infinité de coniques. On déterminerait leur tangente à un point commun *a*. On aurait un faisceau de tangentes, auquel correspondrait au point P un faisceau de droites, homographique avec celui des tangentes; mais de même au point P' on aurait un autre faisceau, homographique avec ce même faisceau de tangentes : donc ces deux faisceaux ayant pour sommet les points P et P', seront homographiques entre eux; par conséquent, les rayons homologues se couperaient suivant une section conique C passant par P et P'. Or, d'après la description des courbes du troisième ordre donnée par M. Chasles, chaque rayon de chaque faisceau coupe la conique correspondante en deux points de la courbe du troisième ordre,

donc on peut ainsi déterminer un nombre infini de points des deux courbes du troisième ordre; parmi les points, se trouvent les cinq points communs d'intersection de ces deux courbes correspondant à cinq coniques communes : donc ces cinq points se trouveront sur la conique C ci-dessus qui passe par les points P et P' et qui contient tous les points d'intersection des deux faisceaux dont ces deux points sont les sommets.

Ce problème peut servir à résoudre le suivant :

Étant donnés les cinq points a, b, c, d, e *communs à deux courbes du troisième ordre, déterminer les quatre autres points d'intersection de ces deux courbes.*

On construira : 1° la conique ci-dessus relative aux quatre points a, b, c, d, puis celle qui est relative aux quatre points a, b, c et e. Ces deux coniques se couperont généralement en quatre points qui seront les points cherchés.

QUESTIONS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES. OCTOBRE 1855.

Mathématiques.

Similitude des figures planes.

Physique.

1°. Galvanomètre multiplicateur.
2°. Ammoniaque.

Histoire naturelle.

1°. De la digestion des mammifères.
2°. Fonctions des racines.

QUESTION.

314. Construire la courbe à équation polaire

$$\rho^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

et en donner *ad libitum* l'aire.

SOMMATION DES DEUX SUITES

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a + n - 1)^\alpha h^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{n=n} [a + n - 1]^\alpha h^{n-1};$$

Par le P. PEPIN, S. J.

Le P. Riccati, dans son Mémoire *De seriebus summam algebraicam vel exponentialem recipientibus*, donne la somme de la série

$$1^\alpha k^1 + 2^\alpha k^2 + \ldots + (n-1)^\alpha k^{n-1} \ (^*).$$

Je me propose d'exprimer aussi par un nombre limité de termes algébriques ou exponentiels la somme de la série plus générale

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a + n - 1)^\alpha h^{n-1}.$$

(*) C'est le P. Lecointe qui m'a fait connaître cette série et qui m'a engagé à entreprendre l'étude dont je donne ici les principaux résultats.

d'où l'on pourra déduire la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, ainsi que la somme d'une série analogue

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha} h^{n-1},$$

en désignant avec Vandermonde par $[a+n-1]^{\alpha}$ la factorielle

$$(a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+n-\alpha)$$

$\left\{\begin{array}{l}\alpha \text{ et } n \text{ sont entiers et positifs;}\\ a \text{ et } h \text{ sont quelconques.}\end{array}\right.$

1. Considérons la suite

$$X_{\alpha} = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha} k^{a+n-1}.$$

En différentiant, nous trouverons

$$X_{\alpha+1} = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha+1} k^{a+n-1} = k\,D_k . X_{\alpha}.$$

Si donc nous indiquons par le symbole $(kD_k)^p$, que l'on doit répéter p fois, une opération qui consiste à prendre la dérivée par rapport à k et à multiplier le résultat par k, nous obtiendrons successivement

$$X_{\alpha} = (kD_k).X_{\alpha-1} = (kD_k)^2.X_{\alpha-2} = \ldots = (kD_k)^{\alpha}.X_0.$$

Et comme

$$X_0 = k^a + k^{a+1} + \ldots + k^{a+n-1} = \frac{k^{a+n} - k^a}{k-1},$$

on aura

$$X_\alpha = \sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^\alpha k^{a+n-1} = (k\,D_k)^\alpha \cdot \frac{k^{a+n}-k^a}{k-1}.$$

Posons enfin

$$k = h + \tau,$$

h désignant une constante et τ une variable infiniment petite; nous aurons pour la série proposée

$$\sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^\alpha h^{n-1}$$

$$= h^{-a} \times \text{valeur de } [(h+\tau)\,D_\tau]^\alpha \frac{(h+\tau)^{a+n}-(h+\tau)^a}{h+\tau-1},$$

pour $\tau = 0$.

2. Supposons qu'en développant la fonction

$$\frac{(h+\tau)^{a+n}-(h+\tau)^a}{h-1+\tau}$$

suivant les puissances ascendantes de τ, on ait obtenu

$$\frac{(h+\tau)^{a+n}-(h+\tau)^a}{(h-1)+\tau}$$

$$= A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + \ldots + A_m\tau^m + \ldots.$$

Désignons par $h^m.\varpi_{m,\alpha}$ la valeur que prend l'expression

$$\frac{[(h+\tau)\,D_\tau]^\alpha.\tau^m}{1.2.3\ldots m}$$

quand, après avoir effectué les opérations indiquées, on

pose $\tau = 0$. On a évidemment

$$\varpi_{m,\alpha} = 0$$

si m est plus grand que α; l'équation obtenue précédemment deviendra donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{n=n} (a+n-1)^{\alpha} h^{n-1} \\ &= h^{-1} \left\{ \begin{aligned} &A_1\, h\, \varpi_{1,\alpha} + A_2 h^2 . [2]^2 . \varpi_{2,\alpha} + \ldots \\ &+ A_{\alpha} . h^{\alpha} [\alpha]^{\alpha} . \varpi_{\alpha,\alpha} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right.$$

3. Calcul des coefficients A_1, A_2, A_3,..., A_{α}.

Supposons d'abord que h ait une valeur différente de l'unité, nous aurons

$$\frac{(h+\tau)^{a+n} - (h+\tau)^a}{(h-1)+\tau} = \frac{h^a}{h-1} \left\{ \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \tau + \ldots + \mathcal{A}_m \tau^m + \ldots \right\}$$
$$\times \left\{ 1 + \frac{\tau}{1-h} + \frac{\tau}{(1-h)^2} + \ldots + \frac{\tau^m}{(1-h)^m} + \ldots \right\},$$

en posant, pour abréger,

$$\mathcal{A}_m = \frac{[a+n]^m . h^n - [a]^m}{[m]^m} . h^{-m}.$$

Le coefficient de τ^{μ} sera donc dans ce développement

$$(2) \qquad A_{\mu} = \frac{h^a}{h-1} . \sum_{m=0}^{m=\mu} \frac{[a+n]^m h^n - [a]^m}{[m]^m . h^m (1-h)^{\mu-m}}.$$

Si $h = 1$, on a

$$\frac{(1-\tau)^{a+n} - (1+\tau)^a}{\tau} = \frac{[a+n]^1 - [a]^1}{1}$$
$$+ \frac{[a+n]^2 - [a]^2}{[2]^2} . \tau + \ldots + \frac{[a+n]^{\mu+1} - [a]^{\mu+1}}{[\mu+1]^{\mu+1}} \tau^{\mu} + \ldots;$$

le coefficient de τ^μ est donc dans ce cas

$$(3)\qquad A_\mu = \frac{[a+n]^{\mu+1} - [a]^{\mu+1}}{[\mu]^\mu . [\mu+1]}.$$

4. Calcul de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ définie par l'équation

$$[m]^m . h^m \varpi_{m,\alpha} = \text{valeur de } [(h+\tau) D_\tau]^\alpha . \tau^m, \text{ pour } \tau = 0.$$

En effectuant une différentiation, on trouve

$$\begin{aligned} &[m]^m h^m . \varpi_{m,\alpha} \\ &= \left\{ mh.[(h+\tau) D_\tau]^{\alpha-1} . \tau^{m-1} + m [(h+\tau) D_\tau]^{\alpha-1} . \tau^m \right\}_{\tau=0} \\ &= mh.[m-1]^{m-1} . h^{m-1} . \varpi_{m-1,\alpha-1} + m[m]^m h^m . \varpi_{m,\alpha-1}. \end{aligned}$$

On a donc, en divisant par $[m]^m h^m$,

$$(A)\qquad \varpi_{m,\alpha} = \varpi_{m-1,\alpha-1} + m \varpi_{m,\alpha-1}.$$

On reconnaît aisément que

$$[(h+\tau) D_\tau]^\alpha . \tau = h + \tau;$$

d'où l'on conclut

$$\varpi_{1,\alpha} = 1, \quad \alpha > 0.$$

Cette condition jointe à l'équation (A) définit complétement la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ et permet d'en calculer les valeurs successives. Pour trouver son expression générale en fonction des nombres α et m, nous emploierons la méthode des fonctions génératrices de Laplace.

Multiplions par x^α les deux membres de l'équation (A) et faisons la somme des résultats obtenus, en donnant

à α les valeurs successives 1, 2, 3,..., n, nous trouvons

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m,\alpha}x^{\alpha}\right) = mx\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m,\alpha-1}x^{\alpha-1}\right)$$

$$+x\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m-1,\alpha-1}x^{\alpha-1}\right);$$

ou bien, en posant

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(\varpi_{m,\alpha}x^{\alpha}\right) = \mathrm{U}_m,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_m &= mx.\mathrm{U}_m + x.\mathrm{U}_{m-1} + x\left[m\varpi_{m,1} + \varpi_{m-1,0}\right]\\ &\quad - x^{n+1}\left[m\varpi_{m,n} + \varpi_{m-1,n}\right]\\ &= mx.\mathrm{U}_m + x\,\mathrm{U}_{m-1} - x^{n+1}\varpi_{m,n+1} + x\,\varpi_{m,1}.\end{aligned}$$

Si l'on convient de ne donner à m que des valeurs supérieures à l'unité, on aura

$$\varpi_{m,1} = 0.$$

On déduira donc de l'équation précédente,

$$\mathrm{U}_m = \frac{x.\mathrm{U}_{m-1}}{1-mx} - \frac{x^{n+1}\varpi_{m,n+1}}{1-mx}.$$

On aura ainsi successivement

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_2 &= \frac{x.\mathrm{U}_1}{1-2x} - \frac{x^{n+1}\varpi_{m,n+1}}{1-2x},\\ \mathrm{U}_3 &= \frac{x^2.\mathrm{U}_1 - x^{n+1}\varpi_{m,n+1}\mathrm{F}(x)}{(1-2x)(1-3x)},\\ \mathrm{U}_4 &= \frac{x^3.\mathrm{U}_1 - x^{n+1}\varpi_{m,n+1}\mathrm{F}_1(x)}{(1-2x)(1-3x)(1-4x)},\\ &\vdots\\ \mathrm{U}_m &= \frac{x^{m-1}.\mathrm{U}_1 - x^{n+1}\varpi_{m,n+1}f(x)}{(1-2x)(1-3x)\ldots(1-mx)};\end{aligned}$$

$F(x)$, $F_1(x)$,..., $f(x)$ désignant des fonctions entières de la variable x. D'ailleurs la condition $\varpi_{1,\alpha} = 1$ nous donne

$$U_1 = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

on aura donc définitivement

$$U_m = \frac{x^m - x^{n+1}.F(x)}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-mx)},$$

$F(x)$ étant une fonction entière de x. Cette équation étant identique par rapport à x, le coefficient $\varpi_{m,\alpha}$ de x^α dans U_m doit être égal au coefficient de x^α dans le second membre. Or si nous supposons $n > \alpha$, ce coefficient ne dépend que de la fraction

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-mx)}$$

$$= \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{1-2x} + \ldots + \frac{c_\rho}{1-\rho x} + \ldots + \frac{c_m}{1-mx}.$$

On aura donc

$$\varpi_{m,\alpha} = c_1 . 1^\alpha + c_2 . 2^\alpha + c_3 . 3^\alpha + \ldots + c_\rho . \rho^\alpha + \ldots + c_m . m^\alpha.$$

Pour déterminer la constante c_ρ, multiplions par $1 - \rho x$ les deux membres de l'équation précédente et faisons

$$x = \frac{1}{\rho},$$

nous trouvons

$$c_\rho = \frac{1}{\rho^m . \left(1-\frac{1}{\rho}\right)\left(1-\frac{2}{\rho}\right)\ldots\left(1-\frac{\rho-1}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho+1}{\rho}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{\rho}\right)};$$

d'où

$$c_\rho \cdot \rho^\alpha = \frac{(-1)^{m-\rho} \cdot \rho^{\alpha-1}}{[\rho-1]^{\rho-1}[m-\rho]^{m-\rho}}$$

$$= \frac{(-1)^{m-\rho}}{[m-1]^{m-1}} \cdot \frac{[m-1]^{\rho-1}}{[\rho-1]^{\rho-1}} \rho^{\alpha-1},$$

et, par suite,

$$(4) \begin{cases} \varpi_{m,\alpha} = \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \frac{(-1)^{m-\rho}}{[m-1]^{m-1}} \cdot \frac{[m-1]^{\rho-1}\rho^{\alpha-1}}{[\rho-1]^{\rho-1}} \\ = \frac{m^{\alpha-1} - \frac{m-1}{1}(m-1)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(m-2)^{\alpha-1} - \ldots \pm}{1.2.3\ldots m-1} \end{cases}$$

5. Les formules (1), (2), (3) et (4) donnent la solution complète du problème proposé. Pour une valeur quelconque de h, différente de l'unité, on aura

$$\sum_{n=1}^{n=n'} (a+n-1)^\alpha . h^{n-1}$$

$$= \sum_{m=1}^{m=\alpha} \frac{h^m.[m]^m.\varpi_{m,\alpha}}{h-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{[a+n]^\mu . h^n - [a]^\mu}{[\mu]^\mu . h^\mu . (1-h)^{m-\mu}}.$$

Si, dans le cas où $h = 1$, on remplace a par $\frac{a}{r}$ et qu'on multiplie les deux membres par r^α, on aura la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est a et dont la raison est r :

$$a^\alpha + (a+r)^\alpha + (a+2r)^\alpha + \ldots + [a+(n-1)r]^\alpha$$

$$= r^\alpha \sum_{m=1}^{m=\alpha} \frac{\left[\frac{a}{r}+n\right]^{m+1} - \left[\frac{a}{r}\right]^{m+1}}{m+1}$$

$$\frac{m^{\alpha-1} - \frac{m-1}{1}(m-1)^{\alpha-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(m-2)^{\alpha-1} - \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par M. Puiseux dans le XIe volume du *Journal* de M. Liouville.

Toutefois l'expression générale (4) de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul. Le plus simple, dans les applications, sera de former pour cette fonction un triangle arithmétique, analogue à celui de Pascal pour les coefficients binomiaux. En voici un pour les dix premières puissances :

$\alpha =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127	255	511
3			1	6	25	90	301	966	3025	9330
4				1	10	65	350	1701	7770	34105
5					1	15	140	1050	6951	42525
6						1	21	266	2646	22827
7							1	28	462	19980
8								1	36	750
9									1	45
10										1

on obtient la somme cherchée

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha} h^{n-1} = h^{-a+\alpha} [\alpha]^{\alpha} A_{\alpha}.$$

Si $h=1$, cette formule donne le résultat connu

$$\sum_{n=1}^{n=n} [a+n-1]^{\alpha} = \frac{[a+n]^{\alpha+1} - [a]^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

7. On peut obtenir sous d'autres formes l'expression de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$. En effet, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-mx)} = F(x),$$

$\varpi_{m,\alpha}$ est le coefficient de x^{α} dans le développement de $x^{m}.F(x)$ suivant les puissances entières et positives de x; on aura donc autant de manières de l'obtenir qu'il y a de manières d'effectuer le développement de $x^{m}.F(x)$.

Or si nous désignons généralement par p_n la somme des produits n à n des nombres $1, 2, 3, \ldots, m$, nous aurons

$$(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-mx)$$
$$= 1 - p_1 x + p_2 x^2 - p_3 x^3 + p_4 x^4 - \ldots \pm p_m x^m = 1 - X$$

en posant

$$p_1 x - p_2 x^2 + p_3 x^3 - \ldots \mp p_m x^m = X.$$

On aura donc

$$F(x) = \frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + \ldots$$
$$= 1 + p_1 x + (p_1^2 - p^2) x^2 + (p_1^3 - 2p_1 p_2 + p_3) x^3 + \ldots$$

et, par suite,

$$\varpi_{m,m} = 1, \qquad \varpi_{m,m+1} = p_1,$$
$$\varpi_{m,m+2} = p_1^2 - p_2, \quad \varpi_{m,m+3} = p_1^3 - 2p_1p_2 + p_3, \ldots .$$

D'ailleurs

$$p_1 = \sum_{m=1}^{m=m} m \cdot \frac{m(m+1)}{2},$$

$$p_2 = \sum_{m=2}^{m=m} m \cdot \frac{m(m-1)}{2},$$

$$p_3 = \sum_{m=3}^{m=m} \cdot m \sum_{m=2}^{m=m-1} m \cdot \frac{m(m-1)}{2}, \ldots .$$

En appliquant la formule générale,

$$\sum_{m=\alpha}^{m=m} [m]^\alpha = \frac{(m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

on trouve

$$p_2 = \sum_{m=2}^{m=m} \left\{ \frac{m(m-1)(m-2)}{2} + m(m-1) \right\}$$
$$= \frac{[m+1]^4}{2.4} + \frac{[m+1]^3}{3} = \frac{(m+1)m(m-1)(3m-2)}{24},$$

$$p_3 = \sum_{m=3}^{m=m} \left\{ \frac{[m]^4 (m-4)}{2.4} + \frac{[m]^4}{2} + \frac{[m]^3 (m-3)}{3} + [m]^3 \right\}$$
$$= \frac{[m+1]^6}{48} + \frac{[m+1]^5}{10} + \frac{[m-1]^5}{15} + \frac{[m+1]^4}{4}$$
$$= \frac{(m+1)^2\, m^2 . (m-1)(m-2)}{48}.$$

On aura par suite

$$\varpi_{m,m+2} = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24},$$

$$\varpi_{m,m+3} = \frac{m^2(m+1)^2(m+2)(m+3)}{48}.$$

En comparant ces valeurs de $\varpi_{m,m}$, $\varpi_{m,m+1}$, $\varpi_{m,m+2}$, $\varpi_{m,m+3}$,..., avec celles que fournit la formule (4), on obtient les relations données par M. Puiseux dans le Mémoire déjà cité.

On reçonnaît aussi que $\varpi_{m,\alpha} = 0$ si m est plus grand que α. On a donc ce théorème :

m *désignant un nombre entier et positif quelconque, si* n *est un nombre entier et positif plus petit que* m — 1, *on a la relation*

$$m^n - \frac{m-1}{1}(m-1)^n + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(m-2)^n - \ldots \pm 1 = 0.$$

SUR LES SECTIONS CIRCULAIRES DU TORE
et des surfaces de révolution algébriques d'ordre quelconque ;

Par M. BRETON (de Champ),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

J'ai eu la curiosité de rechercher par l'analyse toutes les sections circulaires du tore. On sait que M. Yvon Villarceau en a trouvé pour ces surfaces qui ne sont ni des *parallèles*, ni des *méridiens*. J'ai reconnu que ces sections sont les seules de ce genre que l'on puisse trouver pour le tore, et que, parmi les surfaces algébriques de révolution

à équation *irréductible* d'un degré supérieur au quatrième, aucune n'admet des sections circulaires obliques à l'axe, ni même des sections planes dont l'ordre soit inférieur à la moitié du nombre qui marque le degré de l'équation de la surface. Cette proposition peut être démontrée assez simplement comme il suit.

Lorsqu'une surface de révolution admet une section circulaire qui n'est pas un parallèle, cette section, en tournant autour de l'axe, engendre nécessairement la surface elle-même. Soit donc une circonférence tournant autour d'un axe situé d'une manière quelconque par rapport à elle. Je prends pour axe des coordonnées l'axe de révolution et deux autres droites perpendiculaires entre elles situées dans le plan de la circonférence décrite par le centre du cercle mobile. Parmi toutes les positions de ce cercle, je choisis celle où la trace de son plan sur le plan des xy est parallèle à l'axe des y. Cela posé, j'appelle α, β l'abscisse et l'ordonnée du centre, ρ le rayon, et φ l'inclinaison du plan du cercle sur celui des xy. Ce cercle résultera évidemment de l'intersection de la sphère qui a pour équation

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\rho^2$$

avec le plan qui a d'autre part pour équation

$$(2) \qquad z=(x-\alpha)\operatorname{tang}\varphi;$$

X étant le rayon d'un parallèle quelconque de la surface décrite, on aura

$$(3) \qquad X^2=x^2+y^2.$$

Si donc on élimine x et y entre ces trois équations, la relation entre X et z que l'on obtiendra sera l'équation de la section méridienne de la surface.

A cet effet, je développe les deux carrés de l'équa-

tion (1), je remplace $x^2 + y^2$ par X^2 et x par $\alpha + \frac{z}{\tang \varphi}$ et il vient

$$y = \frac{1}{2\beta}\left[X^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tang \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2\right],$$

et, par suite,

$$(4)\left(\alpha + \frac{z}{\tang \varphi}\right)^2 + \frac{1}{4\beta^2}\left[X^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tang \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2\right]^2 - X^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré, et lorsqu'on y remplace X^2 par $x^2 + y^2$ pour avoir celle de la surface, son degré ne change pas, de sorte que la surface dont il s'agit est du quatrième ordre, de même que sa section méridienne. On voit par là que si une surface de révolution d'un ordre n supérieur au quatrième admettait une section circulaire qui ne fût pas un parallèle, le premier membre de son équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

supposée mise sous forme rationnelle et entière, serait divisible par un facteur tel que

$$\left(\alpha + \frac{z}{\tang \varphi}\right)^2 + \frac{1}{4\beta^2}\left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tang \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2\right]^2 - (x^2 + y^2),$$

ce qui est la seconde partie de la proposition énoncée ci-dessus.

Plus généralement, si au lieu de l'équation (1) nous en considérons une de degré n,

$$\varphi(x, y) = 0,$$

et que nous la combinions avec l'équation (2), nous aurons une courbe de degré n, laquelle tournant autour de l'axe des z engendrera une surface, et en éliminant x et y à l'aide de l'équation (3), on aura l'équation de la sec-

tion méridienne de cette surface. Or φ étant du degré n, la substitution de $\sqrt{X^2 - x^2}$ au lieu de y donnera une équation au plus du degré $2n$ après la disparition des radicaux. D'ailleurs le degré ne s'élèvera pas en faisant ensuite

$$x = \alpha + \frac{z}{\tang \varphi},$$

donc la section méridienne sera tout au plus de l'ordre $2n$. Et comme cette élimination n'introduit évidemment que des puissances paires de x, il en sera de même de l'ordre de la surface. Donc, *toute section faite dans une surface algébrique de révolution à équation irréductible par un plan oblique à l'axe est d'un ordre égal à la moitié au moins du degré de l'équation.*

Il ne nous reste plus qu'à examiner quelles sont les relations qui doivent exister entre les données α, β, ρ et φ pour que la surface décrite soit un tore, et par là nous connaîtrons *toutes* les sections circulaires que le tore admet. Développons l'équation (4), elle devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(X^2 + z^2)^2 - \frac{4\alpha}{\tang \varphi}(X^2 + z^2)z - 2(\alpha^2 + \rho^2)X^2 \\ &+ \left[\frac{4(\alpha^2 + \beta^2)}{\tang^2 \varphi} - 2(\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)\right] z^2 \\ &+ \frac{4(\alpha^2 + \beta^2 + \rho^2)}{\tang \varphi} z + (\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

et son premier membre, si la surface est un tore, doit être divisible par un facteur de la forme

$$(X - R)^2 + (z - c)^2 - r^2,$$

car en égalant ce facteur à zéro, on a une circonférence de cercle. Mais il doit être divisible en même temps par

d'où

$$R^2 = \rho^2, \quad c = 0, \quad r^2 = R^2 \sin^2\varphi.$$

Cette solution donne précisément le système de sections circulaires découvert par M. Yvon Villarceau, et on voit en même temps que le tore n'en admet pas d'autres.

SOLUTION DE LA QUESTION 308;

PAR M. COMBESCURE,
Professeur au lycée de Bourges.

Inscrire dans un arc de section conique trois cordes consécutives formant trois segments équivalents.

(CHASLES.)

1°. *Parabole.* L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet étant

$$y^2 = 2px,$$

un segment correspondant aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) aura pour expression

$$\frac{2}{3}x_2y_2 - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2} - \frac{2}{3}x_1y_1$$

ou

$$\frac{1}{6}(x_2y_2 - x_1y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2),$$

ou, à cause de l'équation de la parabole,

$$\frac{1}{4p}\left\{\frac{y_2^3 - y_1^3}{3} + y_1^2y_2 - y_2y_1^2\right\}$$
$$= \frac{(y_2 - y_1)}{4p}\left\{\frac{y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2}{3} - y_1y_2\right\} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}.$$

Donc si l'on veut inscrire dans un arc de parabole n cordes successives donnant lieu à n segments égaux, il suffira de diviser la partie $y_{n+1}-y$ de l'axe des y, qui représente la projection de l'arc, en n parties égales, et de mener des parallèles à l'axe par les points de division. La jonction successive des points où ces parallèles coupent la parabole donnera lieu aux segments demandés.

2°. *Hyperbole.* On peut se borner à l'hyperbole équilatère, sauf à transporter la solution à une hyperbole quelconque au moyen d'une projection cylindrique. Soit donc

$$xy = a^2$$

l'équation d'une pareille hyperbole. Un segment a pour mesure

$$\frac{(x_2 - x_1)}{2}(y_2 + y_1) - a^2 \log \frac{x_2}{x_1},$$

x_1, y_1, x_2, y_2 désignant les coordonnées des extrémités de l'arc. D'après l'équation de l'hyperbole, cette expression peut s'écrire

$$a^2 \left\{ \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\}.$$

ou

$$a^2 \left\{ \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\}.$$

Donc, si l'on considère n segments successifs et que l'on pose

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{z}{m},$$

d'où

$$z^n - m^n \frac{x_{n+1}}{x_1} = 0,$$

tous les segments dont il s'agit seront équivalents. On voit que la division d'un arc en n parties répondant à n segments équivalents, revient à l'insertion de n moyens proportionnels entre les abscisses extrêmes x_1 et x_{n+1}. On reconnaît d'ailleurs tout de suite, sur la figure, que le mode de division est unique. Dans le cas de $n=3$, en écrivant x pour z, on aura à résoudre l'équation

$$x^3 = m^3 \frac{x_4}{x_1};$$

ou, en posant

$$\frac{m^2 x_4}{x_1} = a^2,$$

à chercher l'intersection de la parabole

$$x^2 = my$$

et de l'hyperbole donnée

$$xy = a^2.$$

Quant à m, on prendra la quatrième proportionnelle

$$a_1 = \frac{ax_1}{x_4},$$

puis la moyenne proportionnelle

$$m^2 = aa_1.$$

Si α désigne l'abscisse du point d'intersection de la parabole auxiliaire avec l'hyperbole donnée, on aura par des quatrièmes proportionnelles,

$$x_2 = \frac{\alpha x_1}{m}, \quad x_3 = \frac{\alpha x_2}{m}.$$

3°. *Ellipse*. L'équation de la courbe étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si l'on décrit un cercle sur le grand axe comme diamètre, les ordonnées Y_1, Y_2 qui répondent sur ce cercle aux abscisses x_1, x_2 des points (x_1, y_1), (x_2, y_2) de l'ellipse déterminent avec l'axe du cercle correspondant et l'axe des x une aire qui est l'aire elliptique homologue dans le rapport de a à b. En désignant par φ_1, φ_2 les angles que les rayons du cercle relatifs aux deux extrémités de l'arc circulaire font avec l'axe des y, l'aire elliptique dont il s'agit aura donc pour expression

$$\frac{b}{a}\left[a^2(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{a^2}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{Y_2 + Y_1}{2}(x_2 - x_1)\right],$$

c'est-à-dire

$$ab\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right] + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(x_2 - x_1).$$

Le segment elliptique a donc pour expression de sa mesure

$$ab\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right].$$

Donc, si l'on veut diviser un arc d'ellipse en n parties telles, que les segments correspondants soient égaux, il suffira de prendre, attendu que le mode de division est unique,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n+1} - \varphi_n,$$

c'est-à-dire qu'il faudra diviser en n parties égales l'arc de cercle déterminé, comme il a été dit, par les ordonnées extrêmes. Les perpendiculaires à l'axe des x menées par les points de division détermineront sur l'arc elliptique les points dont la jonction successive donnera la solution de la question. Dans le cas de $n = 3$, la trisection de l'angle

peut se faire, comme on sait, de diverses manières par l'intersection de coniques. Je ne m'arrêterai pas là-dessus.

NOUVELLE MANIÈRE D'ÉVALUER L'AIRE D'UN TRIANGLE SUR LE TERRAIN;

PAR M. BAILLY,
Professeur à l'Institution Barbet.

Menons du sommet A d'un triangle ABC deux obliques AD, AE au côté opposé BC, chacune faisant avec ce côté un angle de 60 degrés. Le triangle équilatéral ADE ayant même hauteur que le triangle ABC, on a

$$\text{aire ABC} = \frac{\text{BC}}{\text{DE}} \cdot \text{aire ADE}.$$

Prenons pour unité de surface l'aire du triangle équilatéral qui a pour côté l'unité de longueur, alors

$$\text{aire ADE} = \overline{\text{DE}}^2,$$

c'est-à-dire autant il y a d'unités dans $\overline{\text{DE}}^2$, autant l'aire ADE renferme d'unités superficielles; donc

$$\text{aire ABC} = \text{BC}.\text{DE}.$$

A l'aide d'une équerre d'arpenteur, de forme hexagonale, il est facile de trouver sur le terrain les points D et E; sur une telle équerre, on peut pratiquer des rainures formant des angles de 90 et de 60 degrés; après avoir mesuré et jalonné la base BC, on marchera avec l'équerre en partant de B, une des rainures étant constamment dirigée vers C, et on s'arrête lorsqu'à travers la rainure de

60 degrés on apercevra le sommet A ; on jalonne ainsi le point D, et de même le point E. Après avoir mesuré DE, le produit BC.DE indique le nombre de fois que l'aire ABD contient l'aire du triangle équilatéral pris pour unité de surface ; cette dernière est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$; donc

$$\text{aire ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \text{BC.DE}.$$

Ce produit donne le nombre de mètres carrés, si le mètre est l'unité de longueur. Après avoir jalonné le point D, on peut se servir de l'angle de 90 degrés de l'équerre et jalonner le point F, d'où l'on aperçoit A sous l'angle de 90 degrés ; alors

$$\text{DF} = \frac{1}{2}\,\text{DE}$$

et

$$\text{aire ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{BC.DF}.$$

Par cette méthode, on n'a pas besoin de se transporter au point A, et l'on peut trouver l'aire du triangle ABC lorsque le point A est inaccessible.

Note du Rédacteur. Ce procédé est annoncé d'une manière singulière dans un recueil qui fait autorité dans la science : « M. Bailly présente des considérations sur la » mesure des surfaces et sur l'*erreur* dans laquelle, sui- » vant lui, les géomètres seraient tombés à cet égard. » (*Comptes rendus*, t. XLI, 1855, p. 1063.)

On peut faire

$$\text{ADE} = 45^{\circ};$$

alors

$$\text{AF} = \text{DF}$$

et

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{BC.DF}.$$

l'origine, et supposons que l'on ait tracé une lemniscate dans le plan des xy en prenant pour ligne focale le diamètre dirigé suivant l'axe des x. Cette courbe sera représentée par

$$(1)\qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$
$$(2)\qquad z = 0.$$

Pour obtenir la projection stéréographique de cette courbe sur la sphère, il faut imaginer un cône dont le sommet serait le pôle du grand cercle sur lequel on a tracé la lemniscate et dont la directrice serait cette courbe elle-même.

La génératrice de ce cône dont le sommet est le point $z = -a$, $x = 0$, $y = 0$, aura des équations de la forme

$$(3)\qquad x = my,$$
$$(4)\qquad (z + a) = ny.$$

Éliminant x, y, z entre les quatre équations précédentes, nous obtenons la relation qui doit exister entre m et n pour que la génératrice s'appuie sur la directrice.

On a ainsi

$$(5)\qquad (m^2 + 1)^2 = (m^2 - 1)\, m^2 n^2.$$

Si maintenant nous éliminons entre les équations (3), (4), (5) les quantités m et n qui seules particularisent la génératrice, la relation

$$(6)\qquad (x^2 + y^2)^2 = (z + a)^2 (x^2 - y^2),$$

à laquelle nous parvenons, sera l'équation du cône. D'ailleurs la sphère est représentée par

$$(7)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

L'ensemble de ces deux équations (6), (7) représente donc la projection stéréographique de la lemniscate donnée.

Cherchons maintenant la projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan des zy. Il faut alors éliminer x entre les équations (6) et (7), ce qui conduit à

$$2(z+a)^2(-z^2+az-y^2)=0,$$

c'est-à-dire, d'une part, le point

$$z=-a, \quad x=0, \quad y=0$$

qui est le sommet, et, d'autre part, le cercle

$$z^2+y^2-az=0.$$

Il faut maintenant chercher l'aire de la partie restante de l'hémisphère lorsqu'on enlève la portion qui est intérieure à la courbe d'intersection des deux surfaces. Considérons seulement la portion de sphère située dans l'angle des coordonnées positives. La projection sur le plan zoy de l'aire cherchée est la surface du quart de grand cercle moins le demi-cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

Pour simplifier les calculs, nous ferons usage des coordonnées polaires dans le plan des zoy en prenant l'origine pour pôle.

Le cercle de rayon $\frac{a}{2}$ est alors représenté par le système

$$x=0, \quad r=a\cos\theta,$$

et on a de plus

$$r^2=z^2+y^2=a^2-x^2,$$

d'après l'équation de la sphère.

Considérons dans la projection sur le plan zoy de l'aire que nous cherchons un élément superficiel du second ordre $r\,dr\,d\theta$, où r représente la distance à l'origine. Cet

élément est la projection d'un élément de la surface sous un angle égal à celui que forme le plan des zy avec le plan tangent à la sphère au point déterminé par la position de l'élément considéré. Donc, en divisant l'élément $r\,dr\,d\theta$ par le cosinus de cet angle, nous aurons l'expression de l'élément même de la surface. Or ce cosinus est ici $\frac{x}{a}$ ou $\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}$; il suffit donc de calculer

$$a\int\int\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Si l'on attribue d'abord à θ une valeur constante, on aura alors un élément d'un secteur, et faisant la somme de pareils éléments depuis $r=a\cos\theta$ jusqu'à $r=a$, et intégrant de $\theta=0$ à $\theta=\frac{\pi}{2}$, on aura l'aire totale. On a successivement dans ce double calcul

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{a}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta,$$

et

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=a^2.$$

Ainsi dans le quart de l'hémisphère l'aire cherchée est a^2; donc dans l'hémisphère entier elle sera $4a^2$ ou le carré du diamètre de la sphère.

C. Q. F. D.

L'analogie de ce problème avec celui de la voûte carrable de Viviani est évidente. Viviani traçait deux cercles sur les rayons OA, OA' comme diamètres, puis il considérait ces cercles comme bases de cylindres dont les géné-

ratrices étaient parallèles à oz. Ces cylindres enlevaient à chaque hémisphère une portion de la surface sphérique; la partie restante était, comme ici, égale à $4a^2$. Les projections de l'intersection des cylindres et de la sphère sur les plans de coordonnées étaient les mêmes que les projections de la courbe que nous avons obtenue ici, mais elles se présentaient différemment. Ainsi sur le plan des zx on trouve dans la question que nous avons traitée la parabole

$$x^2 + ar - a^2 = 0,$$

et dans l'autre la même parabole dont le sommet a tourné de 90 degrés,

$$z^2 + ax - a^2 = 0.$$

Sur le plan des xy dans le problème de Viviani on trouve le cercle $r = a\cos\theta$ qui est la projection sur le plan zoy de la courbe que nous avons obtenue ici; et enfin cette même ligne se projette sur le plan des xy suivant la courbe qui est la projection de la fenêtre de Viviani sur le plan zoy. Cette courbe est représentée par l'équation

$$z^4 - a^2r^2 + a^2y^2 = 0.$$

Elle offre un nœud à l'origine et rappelle la lemniscate par sa forme générale. L'aire de cette projection est égale à $\frac{4}{3}a^2$, comme il est facile de s'en assurer d'après son équation.

Connaissant la solution du problème de Viviani, on pouvait vérifier immédiatement le théorème énoncé; car la projection stéréographique de la lemniscate est représentée par

$$(1)\qquad x^2 + y^2 + r^2 = a^2,$$
$$(2)\qquad (x^2 + y^2)^2 = (r + a)^2 (x^2 - y^2),$$

et la fenêtre de Viviani, en supposant les génératrices des cylindres parallèles à ox, est donnée par l'équation

$$(3) \qquad y^2 + r^2 - az = 0$$

jointe à l'équation (1).

Or, en éliminant x entre les équations (1) et (2), on trouve précisément l'équation (3). Donc la projection stéréographique de la lemniscate n'est autre chose que la fenètre de Viviani, puisque ces deux courbes se trouvent représentées par les mêmes équations. Mais nous avons préféré donner une solution directe du problème.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 296

(voir t. XIV, p. 80);

Par M. POUDRA.

Étant donnés sur un plan A sept points désignés par a, b, c, d, e, f, g et sur un autre plan A′ sept autres points a', b', c', d', e', f', g', correspondants respectivement aux premiers : on demande de trouver dans chacun de ces plans A et A′ un point P et P′ tels, que le faisceau formé par les sept rayons Pa, Pb, Pc, Pd, Pe, Pf, Pg soit homographique avec le faisceau formé de même par les sept rayons P′a', P′b', P′c', P′d', P′e', P′f', P′g'.

Considérons d'abord les six points a, b, c, d, e, f et les points respectivement correspondants a', b', c', d', e', f', et cherchons les lieux des points p et p' qui dans les deux plans A et A′ sont tels, que les six rayons pa, pb, pc, pd, pe, pf forment un faisceau homographique à celui des rayons $p'a', p'b', p'c', p'd', p'e', p'f'$, ces lieux sont des courbes du troisième ordre passant chacune par les

six points donnés, comme l'a démontré analytiquement M. Abadie (t. XIV, p. 142).

Transformons la figure A' en une autre figure homographique située sur le plan A et telle, qu'aux quatre points a', b', c', d' de cette figure correspondent les quatre points a, b, c, d de la première. Les deux autres points e', f' deviendront, dans cette transformation, deux points e'_1, f'_1 situés sur le plan A. Si l'on joint alors par des droites les deux points e et e'_1 et ceux f et f'_1, le point p_1 d'intersection de ces deux droites sera bien tel, que les six droites $p_1 a$, $p_1 b$, $p_1 c$, $p_1 d$, $p_1 e$, $p_1 f$ formeront un faisceau homographique avec celui qui est formé par les droites $p_1 a$, $p_1 b$, $p_1 c$, $p_1 d$, $p_1 e'_1$, $p_1 f'_1$ puisqu'ils sont superposés. A ce point p_1 de la figure A correspondra dans la figure A' un point p' qui sera donc un des points de la courbe cherchée. Or, comme on a deux couples de six points, on peut faire la transformation ci-dessus de quinze manières différentes. On aura donc ainsi quinze points de chacune des courbes cherchées et qui en outre passent respectivement par les six points donnés, ce qui fait en tout vingt et un points. Mais en nous aidant de ce principe que la courbe est du troisième ordre, il suffira d'en déterminer trois par cette méthode, ce qui, avec les six points donnés, formera neuf points avec lesquels on pourra construire chacune de ces courbes par une des belles méthodes données par M. Chasles.

On construira de même deux autres courbes du troisième ordre lieu des sommets des faisceaux homographiques passant par les six points a, b, c, d, e et g et par les points correspondants a', b', c', d', e', g'.

Les points d'intersection des deux courbes du troisième ordre situés dans le plan A et ceux respectifs dans le plan A' seront les points cherchés tels, que le faisceau passant par les sept points a, b, c, d, e, f, g de la fi-

gure A sera homographique à celui de la figure A′ passant par les sept points respectifs a', b', c', d', e', f', g'.

Les deux courbes du troisième ordre de chaque plan ont déjà cinq points communs a, b, c, d, e et a', b', c', d', e'; comme elles se coupent en neuf points, il n'en reste que quatre pour la solution de la question. Or comme d'après M. Chasles il ne doit y avoir que trois solutions, il faut qu'il en existe encore une étrangère à la question.

THÉORÈME SEGMENTAIRE SUR LE TRIANGLE;

PAR M. MANHEIM,
Officier d'artillerie.

1°. Soit ABC un triangle rectiligne; par un point intérieur D, menons les droites DA, DB, DC et prolongeons chacune jusqu'au côté opposé; soient a, a' les deux segments formés en D sur la droite venant de A; de même b et b', c et c'. Si l'angle ADB est droit et si l'on mène par D une droite transversale MN perpendiculaire à CD, et soient α, α' les deux segments de cette transversale formés au point D, on aura

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)^2=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)^2=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}\right)^2.$$

2°. Toute sphère tangente à la surface enveloppe d'une sphère tangente à deux plans et à une sphère donnée, touche cette surface suivant une circonférence ou la coupe suivant deux circonférences. Lorsque les deux plans sont parallèles, la surface enveloppe est un tore, et dans ce cas, lorsque la sphère tangente devient un plan, on a le théorème de M. Villarceau.

SUR LES QUESTIONS 301 ET 302

(voir t. XIV, p. 138);

PAR M. BRIOSCHI.

Soient

$$r = u = s = v = t = w = 0$$

les équations des côtés successifs d'un hexagone; en supposant que chaque point

$$\begin{array}{lll} a_1 & \text{soit déterminé par} & r = v = 0, \\ a_2 & — & r = u = 0, \\ a_3 & — & u = s = 0, \\ a_4 & — & s = v = 0, \\ \vdots & & \vdots \\ a_9 & — & t = w = 0, \end{array}$$

et en choisissant convenablement les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, l'équation

$$\alpha rst + \beta uvt + \gamma rsw + \delta uvw = 0$$

représentera une ligne du troisième ordre qui passe par les neuf points $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$.

L'équation d'une conique C_i menée par les points a_1, a_2, a_3, a_4, a_i sera

$$C_i = (uv)_i\, rs - (rs)_i\, uv = 0,$$

$(rs)_i$ étant la valeur de rs correspondante au point a_i, et $(uv)_i$ la valeur correspondante de uv. Mais si le point a_i est situé sur la ligne du troisième ordre, on aura identiquement

$$(rs)_i(\alpha t_i + \gamma w_i) + (uv)_i(\beta t_i + \delta w_i) = 0,$$

et, par conséquent,

$$C_i = (\alpha t_i + \gamma w_i) rs + (\beta t_i + \delta w_i) uv = 0.$$

Le rapport anharmonique des polaires d'un point quelconque relativement aux coniques C_5, C_6, C_7, C_8 sera donc

$$\varphi = \frac{(w_7 t_6 - w_6 t_7)(w_6 t_8 - w_8 t_6)}{(w_5 t_7 - w_7 t_5)(w_8 t_5 - w_5 t_8)};$$

w_i est la valeur de w en y mettant les coordonnées du point a_i et ainsi des autres, évidemment égal au rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient en joignant par des droites le point a_9 aux points a_5, a_6, a_7, a_8. En effet, la droite $(a_9\, a_i)$ est représentée par l'équation

$$w_i t - t_i v = 0.$$

On sait que le lieu géométrique du point a_9, déterminé par la propriété d'être le centre d'un faisceau de droites menées par quatre points dont le rapport anharmonique est donné, est une conique sur laquelle sont situés les quatre points. Soit

$$\varphi(a_5\, a_6\, a_7\, a_8) = 0$$

l'équation de cette conique. Analoguement on aura une seconde conique

$$\psi(a_5\, a_6\, a_7\, a_8) = 0,$$

sur laquelle sera situé le point a_9.

Le point a_9 sera, par conséquent, le quatrième point d'intersection de ces deux coniques dont les trois autres sont a_6, a_7, a_8.

NOUVELLE SOLUTION SYNTHÉTIQUE DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS;

PAR M. P. SAINT-GUILHEM,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

1. Le problème dont il s'agit, et qui a pour objet la détermination du mouvement d'un corps de figure invariable autour d'un point fixe, est considéré par les géomètres comme un des plus importants et des plus difficiles de la mécanique rationnelle. Toutes les solutions de cette question, jusqu'à celle de M. Poinsot, avaient été déduites de l'analyse par des calculs plus ou moins compliqués, plus ou moins élégants.

Dans un Mémoire lu à l'Institut en 1834, l'illustre auteur de la *Théorie des couples* a exposé une solution synthétique, remarquable par les vues élevées et les considérations ingénieuses qu'elle renferme. Cette solution, présentée sous une forme très-simple et dépouillée de l'appareil des calculs, est entrée sans objection dans le domaine de la science où elle a tenu jusqu'à présent une haute place.

Aujourd'hui un de nos savants confrères à l'Académie de Toulouse, M. Gascheau, conteste, avec toute l'autorité que donnent de grandes lumières et un esprit rigoureux, la solidité d'un des principes fondamentaux sur lesquels elles reposent; il n'attribue qu'à une compensation d'erreurs l'exactitude des résultats auxquels elle conduit.

Nous partageons, après un examen réfléchi, l'opinion

de notre savant confrère ; l'assertion qu'il a émise, à laquelle nous avons d'abord refusé de croire, est, pour nous, maintenant parfaitement justifiée : une application très-simple, placée à la fin de ce Mémoire, met en évidence l'erreur (*) du principe auquel nous faisons allusion.

Nous nous proposons, dans le travail suivant, de présenter une solution synthétique nouvelle du problème de la rotation des corps; elle nous paraît ne rien laisser à désirer, tant pour la simplicité que pour la rigueur.

Définition.

2. Lorsqu'un point matériel soumis à des forces et à des liaisons quelconques est en mouvement, une force unique qui produirait le même effet que les forces et les liaisons sur ce point devenu libre, sera la *force totale* qui sollicite ce point. La résultante des forces qui sollicitent un point matériel, sans égard à l'effet des liaisons, sera la *force motrice*.

Une force fictive qui serait appliquée à un point matériel dans le sens de la vitesse, et qui aurait pour mesure le produit de sa masse par sa vitesse, sera la *quantité de mouvement* du point matériel.

La *résultante de plusieurs droites* sera la résultante des forces qui seraient représentées par ces droites.

Nous appellerons, avec Poisson, *axe du moment* d'une force, une droite menée par le centre des moments perpendiculairement au plan du moment de la force.

(*) L'erreur est de supposer que la force centripète d'un point matériel qui fait partie d'un corps doué d'un mouvement de rotation est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe instantané ; elle est réellement proportionnelle à la distance de ce point au centre de courbure du petit arc qu'il décrit dans un instant.

Sa *direction* sera telle, qu'un spectateur qui aurait les pieds sur le plan et le dos appuyé contre l'axe, verrait la force dirigée autour de lui de sa gauche à sa droite.

Sa *grandeur* sera le moment de la force.

L'axe du moment résultant de plusieurs forces sera l'axe du moment de la résistance de ces forces, le centre des moments étant considéré comme fixe.

L'extrémité de l'axe du moment résultant de plusieurs forces sera le *pôle* de ces forces.

Un *milieu relatif* sera un espace indéfini, mobile, dont chaque point reste invariablement lié à tous les autres.

Trois axes ox, oy, oz seront dits *trois axes tournants* (*) lorsqu'ils seront disposés de manière qu'un spectateur qui aurait les pieds au point o et le dos appuyé contre l'axe oz, verrait l'axe ox à la gauche de l'axe oy. De cette manière, l'axe du moment d'une force située dans l'angle xoy, ou yoz, ou zox, et tendant à tourner autour du point o de ox vers oy, ou de oy vers oz, ou de oz vers ox, coïncidera avec l'axe oz, ou ox, ou oy.

Lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe, nous appellerons *caractéristique* du mouvement (**) l'axe du moment de la vitesse d'un point situé à la fois à l'unité de distance du point fixe et de l'axe instantané.

3. Cela posé, soient :

o le point fixe autour duquel un corps solide est assujetti à tourner;

ox, oy, oz trois axes rectangulaires tournants fixes dans le corps ;

(*) Je dis trois axes tournants, comme on dit trois lettres tournantes en parlant des trois lettres x, y, z qui se succèdent circulairement.

(**) L'introduction de ce terme ou d'un terme analogue en mécanique nous paraît d'une très-grande utilité.

x, y, z les cordonnées par rapport à ces axes d'un point du corps dont la masse est m.

Soient d'ailleurs au bout du temps t,

Ω la caractéristique du mouvement de rotation;

p, q, r les projections de la droite Ω sur les axes ox, oy, oz;

G l'axe du moment résultant des quantités de mouvement des divers points du corps;

L, M, N les projections de la droite G sur les axes.

Propositions préliminaires.

4. Nous admettrons comme démontré que l'axe du moment résultant de plusieurs forces est la résultante des axes des moments de ces forces. A l'aide de ce théorème, nous démontrerons aisément les lemmes suivants :

Lemme I. *L'axe du moment résultant des forces totales est représenté à chaque instant en grandeur et en direction par la vitesse absolue du pôle des quantités de mouvement.*

En effet, la quantité de mouvement qui anime chaque point du corps au bout du temps $t + dt$, est la résultante de celle qui l'anime au bout du temps t et de celle qui lui est communiquée dans l'instant dt.

Donc l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent les divers points du corps au bout du temps $t + dt$ est la résultante de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent ces points au bout du temps t et de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui leur sont communiquées dans l'instant dt.

Donc, si G′, G, g désignent ces trois axes, G′ sera la diagonale du parallélogramme construit sur les deux

droites G et g; donc g sera représenté en grandeur et en direction par la droite qui va de l'extrémité de G à l'extrémité de G'.

Or cette droite, agrandie dans le rapport de 1 à dt, représente la vitesse de l'extrémité de l'axe G.

Donc cette droite, agrandie dans le rapport de 1 à dt, représente en grandeur et en direction la vitesse du pôle des quantités de mouvement.

D'un autre côté, si la quantité de mouvement communiquée en chaque point dans l'instant dt est agrandie dans le rapport de 1 à dt, elle représentera la force totale en ce point; donc g, agrandi dans le rapport de 1 à dt, représente aussi l'axe du moment résultant des forces totales; donc, etc.

5. Lemme II. *Si l'on applique à un point quelconque du corps une droite égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite représentera en grandeur et en direction la vitesse du point dont il s'agit.*

En effet, soient m le point dont il s'agit, v une droite qui représente en grandeur et en direction sa vitesse, ρ sa distance à l'axe instantané, Ω' une droite appliquée au point m, égale, parallèle et contraire à la caractéristique Ω (*); V l'axe du moment de cette droite, on aura évidemment

$$V = \rho . \Omega' = v.$$

D'ailleurs les droites V et v étant l'une et l'autre perpendiculaires au plan qui passe par le point m et par l'axe instantané, sont parallèles; elles sont dirigées dans le même sens, car la droite Ω' doit être dirigée de gauche à droite autour de l'axe V, comme v l'est autour de la

(*) Le bras du moment Ω est l'unité. Ce moment est le même que la vitesse à l'unité de distance de l'axe. Tr.

caractéristique ; or cela ne peut avoir lieu qu'autant que V et v sont dirigés dans le même sens ; donc, etc.

6. Problème I. *Déterminer les projections de l'axe du moment d'une force* P *sur les trois axes coordonnés.*

Soient m le point d'application de la force P ; x, y, z ses coordonnées, X, Y, Z les composantes de la force P parallèles aux x, y, z.

On démontre aisément par la géométrie (en décomposant la force P en trois autres perpendiculaires aux axes) que la force P peut toujours être remplacée par ses projections sur trois plans rectangulaires et par une quatrième force égale, parallèle et contraire à la force P appliquée à l'origine.

De là il suit que l'axe du moment de la force P, estimé successivement suivant les axes des x, y, z, a pour expression

$$Zy - zY, \quad Xz - xZ, \quad Yx - Xy,$$

car il coïncide successivement avec l'axe du moment résultant des projections des trois forces X, Y, Z sur chacun des plans coordonnés yz, zx, xy ; et cet axe a pour expression les quantités ci-dessus, pourvu que l'on regarde les axes des moments qui coïncident avec les axes coordonnés comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils sont portés du côté positif ou négatif de ces derniers axes.

7. Problème II. *Déterminer l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.*

Appliquons à chaque point m une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite sera (lemme II) égal et parallèle à la vitesse du point m ; or la projection de la droite Ω' sur les axes ox, oy, oz étant $-p$, $-q$, $-r$, l'axe du moment de la droite Ω' aura pour projection les quantités $qz-ry$,

$rx - pz$, $py - qx$; par conséquent, l'axe du moment de la quantité de mouvement du point m aura pour projections, la masse de ce point étant m,

$$m[(py - qx)y - (rx - pz)z],$$
$$m[(qz - ry)z - (py - qx)x],$$
$$m[(rx - pz)x - (qz - ry)y];$$

par suite, si nous posons, comme à l'ordinaire,

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = A,\quad \Sigma m(z^2 + x^2) = B,\quad \Sigma m(x^2 + y^2) = C,$$
$$\Sigma myz = D,\qquad \Sigma mzx = E,\qquad \Sigma mxy = F.$$

Le signe de sommation Σ s'étendant à tous les points du corps, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement aura pour projections

$$(1)\qquad \begin{cases} L = Ap - Fq - Er, \\ M = Bq - Dr - Fp, \\ N = Cr - Ep - Dq. \end{cases}$$

Ces projections déterminent à chaque instant la grandeur et la direction de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

8. Problème III. *Déterminer la vitesse du point du corps qui coïncide avec le pôle des quantités de mouvement.*

Soit π le pôle des quantités de mouvement; appliquons à ce point une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la droite Ω, caractéristique du mouvement, l'axe du moment de la droite Ω' sera, lemme II, égal et parallèle à la vitesse du point π; or les projections de la droite Ω' sur les axes ox, oy, oz étant respectivement $-p$, $-q$, $-r$, et les coordonnées du point π sur les mêmes axes étant L, M, N, les projections de la vitesse du point π seront respectivement, d'après les formules du pro-

blème I,

$$Nq - Mr, \quad Lr - Np, \quad Mp - Lq;$$

ces projections font connaître à chaque instant la vitesse dont il s'agit (*).

9. PROBLÈME IV. *Déterminer la vitesse du pôle des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps, c'est-à-dire par rapport aux axes* ox, oy, oz.

L, M, N étant les coordonnées du pôle des quantités de mouvement par rapport aux axes ox, oy, oz, les projections de la vitesse de ce point sur ces axes sont respectivement

$$\frac{dL}{dt}, \quad \frac{dM}{dt}, \quad \frac{dN}{dt};$$

ces projections font connaître à chaque instant la vitesse dont il s'agit.

Équations du mouvement.

10. Si l'on applique à chaque point du corps une force égale et contraire à la force totale qui le sollicite, il est évident que les forces auxquelles le corps sera soumis se feront équilibre, conformément au principe de d'Alem-

(*) Nous avions démontré dans un précédent Mémoire, en partageant l'erreur de M. Poinsot, que la vitesse dont il s'agit représente en grandeur et en direction l'axe du moment résultant des forces centripètes. Ce théorème n'a plus lieu; mais on peut le remplacer évidemment par le suivant: *La vitesse du point du corps qui coïncide avec le pôle des quantités de mouvement représente en grandeur et en direction l'axe du moment résultant des forces centripètes, l'axe instantané étant tout à coup rendu fixe.* Ainsi modifié, ce théorème donne encore une interprétation de l'un des termes de chacune des équations d'Euler.

Si l'on regarde la force totale comme la résultante de la force centripète que nous venons de considérer et d'une autre force, il est visible que cette autre force ne sera pas généralement dans le plan qui passe par la force totale et par la force centripète réelle.

bert; donc l'axe du moment résultant des forces motrices coïncide en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces totales, ou, d'après le lemme I, avec la vitesse absolue du pôle des quantités de mouvement.

Or la vitesse absolue d'un point situé dans un milieu relatif est évidemment la résultante de la vitesse de ce point dans le milieu relatif, et de la vitesse du même point considéré comme un point du milieu relatif; donc l'axe du moment résultant des forces motrices coïncidera en grandeur et en direction avec la résultante de la vitesse du pôle des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps et de la vitesse du même point considéré comme un point du corps.

Traduisons cette relation en nombres :

Si l'on désigne par P, Q, R les projections de l'axe du moment résultant des forces motrices sur les axes ox, oy, oz, on aura, d'après les formules des préliminaires,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} + Nq - Mr,\\ Q &= \frac{dM}{dt} + Lr - Np,\\ R &= \frac{dN}{dt} + Mp - Lq.\end{aligned}\right.$$

Ces équations coïncident avec les équations d'Euler lorsque l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux du corps.

Elles déterminent, avec les équations (1), les vitesses angulaires du corps à une époque quelconque autour des trois axes ox, oy, oz; il reste à trouver la position des axes mobiles ox, oy, oz par rapport à trois axes rectangulaires ox', oy', oz' fixes dans l'espace. A cet effet, remarquons que le corps tournant autour de l'axe instan-

tané avec une vitesse angulaire égale à Ω pendant l'instant dt occupe à la fin de cet instant, par rapport à l'un quelconque des axes ox', oy', oz' la même position que si le corps était resté fixe et que l'axe considéré eût tourné autour de l'axe instantané pendant l'instant dt avec une vitesse angulaire égale et contraire à celle qu'avait le corps autour de l'axe instantané.

Donc, si l'on prend sur l'un des axes ox', oy', oz' un point m_1 et qu'on applique en ce point une droite Ω_1 égale et parallèle à la droite Ω, l'axe du moment de cette droite sera égal et parallèle à la vitesse du point m_1; donc, si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point m_1 par rapport aux axes ox, oy, oz, on aura, en observant que la droite Ω_1 a pour projection sur les axes p, q, r,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ry_1 - qz_1,\\ \frac{dy_1}{dt} &= pz_1 - rx_1,\\ \frac{dz_1}{dt} &= qx_1 - py_1. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces relations, on aura la position de l'un quelconque des axes ox_1, oy_1, oz_1 par rapport aux axes ox, oy, oz, et, par conséquent, la position de chacun de ceux-ci par rapport aux axes fixes dans l'espace (*).

Note.

M. Poinsot suppose, dans sa *Théorie nouvelle de la Rotation,* que lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe, la force centripète est toujours proportionnelle à la distance de ce point à l'axe instantané, et, par conséquent, que cette distance est toujours égale au rayon de courbure de l'arc décrit par ce point en un instant. Le

(*) *Voir* Sturm, *Nouvelles Annales,* t. X, p. 419. Tm.

problème suivant met en évidence l'inexactitude de cette hypothèse.

Problème. *Un cercle dont le centre est fixe et dont le plan est vertical, tourne à la fois autour de son diamètre vertical et autour de son centre dans son plan. Les vitesses angulaires de ces deux rotations sont toujours égales entre elles; on demande de déterminer : 1° la trajectoire de l'un des points de la circonférence du cercle mobile; 2° la longueur de la perpendiculaire abaissée d'une position quelconque du point générateur sur l'axe instantané correspondant; 3° le rayon de courbure de la trajectoire correspondant au même point.*

Soient :

- m — le point générateur de la trajectoire, point que nous supposerons, pour plus de simplicité, distant du point fixe d'une quantité égale à l'unité;
- om — le rayon vecteur mené du point fixe au point m;
- ox, oy, oz — trois axes rectangulaires tels, que l'axe oz coïncide avec om lorsque ce rayon est dirigé verticalement de bas en haut; que l'axe ox coïncide avec la position qu'aurait eue le rayon om après avoir décrit un angle de 90 degrés si le plan du cercle était resté immobile; que l'axe oy coïncide avec la position qu'occupe réellement le rayon om à la même époque;
- x, y, z — les coordonnées du point m à une époque quelconque;
- φ — l'angle que le rayon vecteur om fait avec l'axe oz, angle toujours égal à celui que la projection de om sur le plan des xy fait avec l'axe des x.

Au moyen de ces notations, on trouve immédiatement les relations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \sin\varphi\cos\varphi, \\ y = \sin^2\varphi, \\ z = \cos\varphi. \end{cases}$$

De là on déduit d'abord

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 - y = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent que la trajectoire est l'intersection de la sphère décrite par la circonférence du cercle mobile avec un cylindre droit vertical tangent au plan de ce cercle dans sa position initiale et ayant pour base un cercle dont la diamètre est le rayon du cercle mobile.

Cherchons, en second lieu, la longueur de la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe instantané correspondant.

Pour avoir la position de l'axe instantané à une époque quelconque, il suffit de construire la diagonale du parallélogramme dont les côtés contigus sont les caractéristiques des deux mouvements de rotation à cette époque. Ces caractéristiques sont, d'après l'énoncé, égales entre elles; l'une coïncide toujours avec l'axe oz, l'autre est toujours dans un plan perpendiculaire au cercle mobile; donc l'axe instantané fait un angle de 45 degrés avec l'axe des z et reste toujours dans un plan vertical perpendiculaire au plan du cercle mobile.

D'après cela, si l'on désigne par h la perpendiculaire dont il s'agit, on trouvera sans peine

$$h^2 = \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi,$$

d'où

$$(3)\qquad h=\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{2}}.$$

Cherchons enfin le rayon de courbure de la trajectoire au point m; si nous désignons ce rayon par ρ, et par s l'arc de la trajectoire compris entre le point m et l'axe des z, on aura

$$(4)\qquad \rho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}.$$

Or on déduit des équations (1):

$$\frac{dx}{d\varphi}=\cos 2\varphi,\qquad \frac{dy}{d\varphi}=\sin 2\varphi,$$
$$\frac{dz}{d\varphi}=-\sin\varphi,\qquad \frac{ds^2}{d\varphi^2}=1+\sin^2\varphi,$$
$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=-2\sin 2\varphi,\qquad \frac{d^2y}{d\varphi^2}=2\cos 2\varphi,$$
$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}=-\cos\varphi,\qquad \frac{ds\,d^2s}{d\varphi^3}=\sin\varphi\cos\varphi.$$

Au moyen de ces valeurs, la formule (4) devient

$$(5)\qquad \rho=\sqrt{\frac{(1+\sin^2\varphi)^3}{5+3\sin^2\varphi}}.$$

Pour que le rayon de courbure de la trajectoire au point m soit égal, comme le suppose M. Poinsot, à la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe instantané correspondant, il faut que l'on ait, quel que soit φ,

$$\frac{(1+\sin^2\varphi)^2}{5+3\sin^2\varphi}=\frac{1}{2}.$$

Or cette équation n'est satisfaite que par les valeurs

$$\varphi=90^\circ(1\pm 2n);$$

n étant un nombre entier quelconque, ces valeurs correspondent au point unique où la trajectoire vient couper le plan des xy.

Ainsi la solution du problème de la rotation des corps par M. Poinsot est inacceptable.

Note du Rédacteur. Il faut se rappeler que tout couple est représenté en *grandeur* et en *direction* par son axe, de sorte que l'axe représente une force; de là l'expression de l'auteur résultante des *axes*. Il n'emploie pas le mot *couple* et le remplace par le mot *moment;* il semble que cette substitution n'est pas favorable à la clarté, mais ne nuit pas à la justesse des raisonnements. L'erreur signalée provient de ce que les vitesses dépendent d'infiniment petits du premier ordre, tels sont les contacts des tangentes; tandis que les forces accélératrices, et, par conséquent, les forces centripètes dépendent d'infiniment petits du second ordre, tels sont les contacts des cercles de courbures.

SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE RELATIVE A DEUX ÉQUATIONS CUBIQUES;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Etant données deux équations du troisième degré, savoir

(I) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ (racines α, α', α''),

(II) $x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0$ (racines β, β', β''),

je vais discuter l'équation dont les racines sont les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta''.$$

Désignons cette fonction par z et posons

$$M = p^2 q' + p'^2 q - 3qq',$$
$$N = 2(p^3 r' + p'^3 r) - q(pqr' + p'q'r) + pp'qq' + 27rr',$$
$$\Delta = 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3 r - p^2 q^2,$$
$$\Delta' = 27r'^2 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3 r' - p'^2 q'^2$$

(Δ, Δ' sont les fonctions qu'on appelle aujourd'hui *discriminants* des équations données, et la condition $\Delta = 0$ exprime que l'équation (I) a deux racines égales) : l'équation dont il s'agit s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{(III)} \qquad \left(z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N\right)^2 - \frac{1}{4}\Delta\Delta' = 0.$$

Si l'équation (I) a deux racines égales, l'équation (III) a ses racines égales deux à deux, ce qui se vérifie aisément à priori; et si les équations données deviennent identiques, Δ égale Δ', et l'équation (III) se décompose dans les suivantes :

$$z^3 - p^2 z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N + \Delta) = 0,$$

$$z^3 - p^2 z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N - \Delta) = 0.$$

Les racines de la première sont

$$\alpha^2 + 2\alpha'\alpha'', \quad \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'', \quad \alpha''^2 + 2\alpha\alpha',$$

ce qu'on peut faire voir en éliminant x entre l'équation (I) et la suivante :

$$x^3 - xz + 2r = 0.$$

Les racines de la seconde sont évidemment q deux fois et $p^2 - 2q$.

Nous tirons aussi par différentiation

$$\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'} = 4\,(27\,N - 18\,M\,pp' + 4p^3 p'^3),$$

et en représentant par Δ'' le discriminant de l'équation

$$\text{(IV)} \qquad z^3 - PP' z^2 + Mz - \frac{1}{2} N = 0,$$

nous avons

$$8\frac{d\Delta''}{dN} = \frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'},$$

ce qui exprime une relation entre les racines des dérivées des équations (I), (II), (IV).

En posant

$$z - \frac{pp'}{3} = u,$$

l'équation (III) se transforme en

$$\left\{ u^3 - \frac{u}{3}(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q') - \frac{1}{216}\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'} \right\}^2 - \frac{1}{4}\Delta\Delta' = 0;$$

d'où nous tirons

$$27\,\Delta'' = \left(\frac{1}{64}\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 - 4\,(p^2 - 3q)^3 (p'^2 - 3q')^3;$$

mais on a

$$\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\,\Delta = 16\,(p^2 - 3q)^3 :$$

en sorte que

$$\Delta'' = \frac{1}{16}\left\{ \Delta\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 + \Delta'\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\,\Delta\Delta' \right\}.$$

Posons maintenant

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

le produit P de ces six déterminants s'exprime d'une manière assez élégante. En effet, nous trouvons

$$16P = \Delta\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 - \Delta'\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2,$$

ou bien encore

$$P = \Delta\,(p'^2 - 3q')^3 - \Delta'(p^2 - 3q)^3.$$

Si l'équation (III) n'a que deux racines égales, on a

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \left(\frac{p^2 - 3q}{p'^2 - 3q'}\right)^3.$$

Note du Rédacteur. Les six racines de l'équation (III) sont

$$\begin{array}{l} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'', \\ \alpha\beta + \alpha'\beta'' + \alpha''\beta', \\ \alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha''\beta'', \\ \alpha\beta' + \alpha'\beta'' + \alpha''\beta, \\ \alpha\beta'' + \alpha'\beta + \alpha''\beta', \\ \alpha\beta'' + \alpha'\beta' + \alpha''\beta, \end{array}$$

et l'équation (III) s'obtient par la théorie des fonctions symétriques. Cette équation peut toujours se ramener au troisième degré, car on a

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\Delta'} = 0.$$

Si

$$r = r' = 0,$$

on peut supposer

$$\alpha = \beta = 0;$$

l'équation (III) est alors relative à deux équations du second degré, et en supposant p, q, r des fonctions d'une variable y, on est amené à des propriétés géométriques des courbes du second et du troisième degré.

EXERCICES
sur la résolution numérique des équations algébriques ; D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. comm. Gotting. vol. II, 1814-15, pages 72.

1. $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0.$

$$x_1 = 0{,}2113248654\,051871,$$
$$x_2 = 0{,}7886751345\,948129.$$

2. $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20} = 0.$

$$x_1 = 0{,}1127016653\,792583,$$
$$x_2 = 0{,}5,$$
$$x_3 = 0{,}8872983346\,207417.$$

3. $x^4 - 2x^3 + \frac{9}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{70} = 0.$

$$x_1 = 0{,}0694318442\,029754,$$
$$x_2 = 0{,}3300094782\,075677,$$
$$x_3 = 0{,}6699905217\,924323,$$
$$x_4 = 0{,}9305681557\,970246.$$

4. $x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{20}{9}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{42}x - \frac{1}{252} = 0.$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}0469100770\ 306680, \\ x_2 &= 0{,}2307653449\ 471585, \\ x_3 &= 0{,}05, \\ x_4 &= 0{,}7692346550\ 528415, \\ x_5 &= 0{,}9530899229\ 693320. \end{aligned}$$

5. $x^6 - 3x^5 + \frac{75}{22}x^4 - \frac{20}{11}x^3 + \frac{5}{11}x^2 - \frac{1}{22}x + \frac{1}{924} = 0.$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}0337652428\ 984240, \\ x_2 &= 0{,}1693953067\ 668678, \\ x_3 &= 0{,}3806904069\ 584015, \\ x_4 &= 0{,}6193095930\ 415985, \\ x_5 &= 0{,}8306046932\ 331322, \\ x_6 &= 0{,}9662347571\ 015760. \end{aligned}$$

6. $x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2$

$+ \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0.$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}0254460438\ 286202, \\ x_2 &= 0{,}1292344072\ 003028, \\ x_3 &= 0{,}2970774243\ 113015, \\ x_4 &= 0{,}5, \\ x_5 &= 0{,}7029225756\ 886985, \\ x_6 &= 0{,}8707655927\ 996972, \\ x_7 &= 0{,}9745539561\ 713798. \end{aligned}$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 319.)

Remarque. Nous donnerons l'analyse du Mémoire.

SUR LE CALCUL DE π;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur.

Permettez-moi quelques observations au sujet d'une Note insérée dans les *Nouvelles Annales*, tome XIV, p. 462.

1°. Legendre traitant le même sujet (*Géométrie*, livre IV, prop. XIII) emploie des formules qui diffèrent de celles de M. Schlomilch,

$$A' = \sqrt{A.B},$$

$$B' = \frac{2A.B}{A + A'}.$$

A et B sont les surfaces de deux polygones réguliers l'un inscrit, l'autre circonscrit, A' et B' sont les surfaces des polygones d'un nombre double de côtés.

En adoptant cette notation, M. Schlomilch écrirait

$$A' = \sqrt{A.B}, \quad B' = \frac{2A'.B}{A' + B}.$$

Ces formules peuvent se déduire de celles de Legendre. En effet

$$A = \frac{A'^2}{B},$$

$$B' = \frac{2A'^2 B}{AB + A'B},$$

$$B' = \frac{2A'^2 B}{A'^2 + A'B};$$

je supprime le facteur commun A′ et j'ai

$$B' = \frac{2A'B}{A'+B}.$$

2°. Appelons P_n, p_n les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un circonscrit, l'autre inscrit à un cercle. On a les formules

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n}\right), \quad \frac{1}{p'_n} = \sqrt{\frac{1}{p_n}\frac{1}{P_{2n}}}.$$

On est conduit aux mêmes calculs que M. Schlomilch, et ces calculs ne paraissent pas différer essentiellement de ceux de Schwab.

3°. Si l'on forme une série de termes commençant par a, b et telle, que chaque terme soit moyen arithmétique entre les deux précédents, le terme général de la série est

$$\frac{a+2b}{3} - (-1)^n \frac{a-b}{3.2^n},$$

ce que l'on démontre aisément en admettant que deux termes consécutifs aient cette forme et en calculant le terme suivant.

Ce terme général a évidemment pour limite $\frac{a+2b}{3}$.

4°. La méthode de Schwab est généralement adoptée pour le calcul élémentaire mais *sérieux* du nombre π.

Quand il s'agit d'indiquer rapidement à des élèves la possibilité de ce calcul, ne pourrait-on employer la marche suivante ?

(On est prié de tracer la figure.)

Dans un cercle dont le diamètre est 2 et dont la surface sera π, je trace deux rayons perpendiculaires OA, OC. Je divise en cinq parties égales la moitié OE de OA et aux points de division j'élève des ordonnées ou demi-cordes perpendiculaires sur OA, savoir ED, ff', gg', hh', ll'. Ces ordonnées sont moyennes proportionnelles entre les segments qu'elles interceptent sur le diamètre :

$$ff' = \sqrt{0,6 \times 1,4} = \sqrt{0,84} = 0,92,$$
$$gg' = \sqrt{0,7 \times 1,3} = \sqrt{0,91} = 0,95,$$
$$hh' = \sqrt{0,8 \times 1,2} = \sqrt{0,96} = 0,98,$$
$$ll' = \sqrt{0,9 \times 0,1} = \sqrt{0,99} - 1,00.$$

ED est la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86.$$

L'aire COED a pour valeur approchée

$$0,1\left(\frac{1}{2}\text{DE} + ff' + gh' + hh' + ll' + \frac{1}{2}\text{OC}\right) = 0,478.$$

Le triangle ODE a pour mesure

$$\frac{1}{2}\text{OE} \times \text{DE} = \frac{\sqrt{3}}{8.} = 0,216.$$

Le secteur COD étant la différence entre COED et COE, on a

$$\text{aire COD} = 0,478 - 0,216 = 0,262$$

Ce secteur est d'ailleurs la douzième partie du cercle; donc

$$\pi = 12 \times 0,262 = 3,144.$$

Cette valeur est approchée à moins d'un centième, mais on ne pourrait l'affirmer à priori.

Si l'on voulait être sûr que l'erreur commise est plus petite que ε, il faudrait que le nombre de divisions de OE fût plus grand que

$$\frac{2-\sqrt{3}}{8\varepsilon},$$

et l'on serait conduit à des calculs plus longs que ceux de Schwab.

5°. Un auteur connu par de nombreuses publications vient d'insérer dans sa *Géométrie* une Note d'un professeur du lycée Bonaparte.

Ce professeur calcule le nombre π au moyen des périmètres des polygones inscrits seulement et avec les Tables de Lalande (*Sic visum Superis*). On trouve ainsi :

Pour 64 côtés....	3,1394
Pour 128 côtés....	3,119

L'approximation diminue quand le nombre des côtés augmente. M. le Professeur se garde bien d'avouer ce fait, dans la crainte fondée d'effaroucher les élèves; mais a-t-il raison de le déguiser en disant que le périmètre du polygone de 128 côtés est aussi 3,1394? N'a-t-il pas à redouter la censure de ce juge sévère qui accuse les anciens auteurs (tels que M. Blanchet) de ne pas appliquer *franchement* la méthode des limites, par ce seul fait qu'ils emploient les polygones circonscrits.

Note du Rédacteur. M. Saigey vient de publier une méthode de calculer π, qui, conséquence de la méthode de Thomas Simpson, donne la même approximation. Nous reviendrons sur cette méthode, d'une élégance et d'une simplicité remarquables. On la trouve dans un ouvrage intitulé : *Géométrie élémentaire*, par M. Saigey; 1856, in-12

de 252 pages (*). Géométrie curieuse. On y trouve des proportions sans rapport et le célèbre axiome XI d'Euclide, qui a résisté pendant des milliers d'années aux efforts de tous les géomètres, y est démontré avec une rapidité électrique, à l'aide d'un mouvement d'éventail. C'est très-gracieux.

NOTE SUR QUELQUES IDENTITÉS;

PAR M. E. PROUHET.

Je me propose de démontrer quelques identités curieuses énoncées sans démonstration par M. Oscar Weber, professeur à Dresde (*Archives de Grunert*, t. XXXII, p. 853; 1854).

Afin d'éviter une trop grande complication, je prendrai un exemple particulier, mais on verra sans peine que le même raisonnement convient à tous les cas.

Soient a, b, c, d, e, f six quantités inégales et que nous supposerons racines de l'équation

$$x^6 + P_1 x^5 + P_2 x^4 + P_3 x^3 + P_4 x^2 + P_5 x + P_6 = 0.$$

Considérons le tableau formé des diverses puissances de ces quantités

$$\begin{array}{ccccccc} a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & a^0 \\ b^6 & b^5 & b^4 & b^3 & b^2 & b & b^0 \\ c^6 & c^5 & c^4 & c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^6 & d^5 & d^4 & d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^6 & e^5 & e^4 & e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^6 & f^5 & f^4 & f^3 & f^2 & f & f^0 \end{array}$$

(*) Chez Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. Prix: 3f 50c.

Ce tableau renferme quarante-deux termes, de sorte que si l'on enlève une des colonnes verticales, il restera trente-six quantités avec lesquelles on pourra former un déterminant. Je nomme D le déterminant que l'on obtient après avoir supprimé la première colonne à gauche, D_1 celui qu'on obtient en supprimant la seconde, et ainsi de suite.

D'après un théorème de Vandermonde (*A. S.*, 1772, 2e partie, p. 522), on a

$$D = (a-b)(a-c)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(b-f)\ldots(e-f).$$

D'après un second théorème du même géomètre (*Ibid*, p. 254), on a

$$D_1 = \sum a^6 \times \begin{bmatrix} b^4 & b^3 & b^2 & b & b^0 \\ c^4 & c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^4 & d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^4 & e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^4 & f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix}.$$

Les déterminants compris sous le signe $\sum$ ont tantôt le signe +, tantôt le signe —. Cette particularité n'ayant aucune importance pour l'objet que j'ai en vue, je me contenterai de remarquer que le terme exprimé a le signe +.

D'après le premier théorème de Vandermonde, on peut encore écrire

$$D_1 = \sum a^6 (b-c)(b-d)\ldots(b-f)\ldots(e-f),$$

on aura ensuite

$$D_2 = \sum \begin{bmatrix} a^6 & a^5 \\ b^6 & b^5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix},$$

et, par conséquent,

$$D_2 = \sum a^5 b^5 (a-b)(c-d)(c-e)(c-f)\ldots(e-f);$$

on aura aussi

$$D_3 = \sum \begin{bmatrix} a^6 & a^5 & a^4 \\ b^6 & b^5 & b^4 \\ c^6 & c^5 & c^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d^2 & d & d^0 \\ e^2 & e & e^0 \\ f^2 & f & f^0 \end{bmatrix}$$

ou bien

$$D_3 = \sum a^4 b^4 c^4 (a-b)(a-c)(b-c)(d-e)(d-f)(e-f),$$

et ainsi de suite.

Ces préliminaires admis, soit à résoudre le système des équations suivantes :

$$\begin{gathered} P_1 a^5 + P_2 a^4 + P_3 a^3 + P_4 a^2 + P_5 a + P_6 = -a^6, \\ P_1 b^5 + P_2 b^4 + P_3 b^3 + P_4 b^2 + P_5 b + P_6 = -b^6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 f^5 + P_2 f^4 + P_3 f^3 + P_4 f^2 + P_5 f + P_6 = -f^6, \end{gathered}$$

où l'on considère P_1, P_2, etc., comme des inconnues. Le dénominateur commun de ces inconnues sera D : le numérateur de la valeur de P_1 sera le déterminant D_1 dans lequel on aurait changé de signe tous les termes de la première colonne. On aura donc

$$P_1 = -\frac{D_1}{D},$$

ou, en substituant les valeurs de D et de D_1 trouvées plus haut et réduisant,

$$(1)\quad a+b+c+\ldots+f = \sum \frac{a^6}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)}.$$

Le numérateur de P_2 sera le déterminant D_2 dans lequel on aurait transporté la première colonne à la seconde place en changeant les signes de tous ses termes, ce qui n'altère pas la valeur de ce déterminant.

On aura donc

$$P_2 = \frac{D_2}{D},$$

ou, en réduisant,

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} ab + ac + \ldots + ef \\ = \sum \dfrac{a^5 b^5}{(a-c)(a-d)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(b-f)}. \end{array}\right.$$

On aura de même

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} abc + abd + \ldots + def \\ = \sum \dfrac{a^4 b^4 c^4}{(a-d)(a-e)(a-f)(b-d)\ldots(c-f)}, \end{array}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} abcd + abce + \ldots + cdef \\ = \sum \dfrac{a^3 b^3 c^3 d^3}{(a-e)(a-f)(b-e)(b-f)\ldots(d-f)}, \end{array}\right.$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} abcde + \ldots + bcdef \\ = \sum \dfrac{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2}{(a-f)(b-f)(c-f)(d-f)(e-f)}. \end{array}\right.$$

Les formules (1), (2),..., (5) sont celles de M. Weber. On peut les renfermer dans le théorème suivant :

Si

$$a,\quad b,\quad c,\ldots,\quad f,\ g,\ldots,\quad l$$

sont m *quantités inégales et racines de l'équation*

$$f(x) = 0,$$

la somme des produits de ces racines prises n *à* n *sera*

égale à

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum \frac{(abc\ldots fg)^{m-n+1}(a-b)^2(a-c)^2\ldots(f-g)^2}{f'(a)\,f'(b)\ldots f'(g)}.$$

Un peu d'attention suffira pour voir que cet énoncé comprend toutes les formules particulières que nous venons de démontrer.

Note du Rédacteur. Ces identités sont d'utiles exercices de calcul à donner aux élèves ; développons-en quelques-unes :

$$a+b=\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a},$$

$$a+b+c=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)},$$

$$a+b+c+d=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

etc. ;

$$ab+ac+bc=\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{a^2c^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)},$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{a^3 b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{a^3 c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}$$
$$+ \frac{a^3 d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}$$

etc.;

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$
$$+ \frac{a^2 b^2 d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}$$
$$+ \frac{a^2 c^2 d^2}{(a-c)(c-b)(c-d)}$$
$$+ \frac{b^2 c^2 d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

etc.

NOTE SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE,

Formule de Lhuilier;

Par M. PROUHET.

---

1. Si l'on représente par $2S$ la surface d'un triangle sphérique, on pourra mettre les deux formules de Delambre

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

sous la forme suivante :

$$(1)\qquad \frac{\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$(2)\qquad \frac{\cos\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

2. On déduit de l'équation (1)

$$\frac{\sin\frac{C}{2}-\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}+\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}=\frac{\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}},$$

ce qui, en changeant les sommes ou différences en produits, devient

$$(3)\qquad \frac{\tang\frac{S}{2}}{\tang\frac{C-S}{2}}=\tang p\tang\frac{p-c}{2}.$$

Par une transformation analogue, on déduit de l'équation (2) la suivante :

$$(4)\qquad \tang\frac{S}{2}\tang\frac{C-S}{2}=\tang\frac{p-a}{2}\tang\frac{p-b}{2}.$$

Multipliant les équations (3) et (4) membre à membre et extrayant la racine carrée du résultat, on obtient

$$(5)\quad \tang\frac{S}{2}=\sqrt{\tang\frac{p}{2}\tang\frac{p-a}{2}\tang\frac{p-b}{2}\tang\frac{p-c}{2}},$$

formule de Simon Lhuilier.

3. On peut encore écrire les équations (1) et (2) sous cette forme,

$$(6)\qquad \sin\frac{C}{2}\cos S - \cos\frac{C}{2}\sin S = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\sin\frac{C}{2},$$

$$(7)\qquad \cos\frac{C}{2}\sin S + \sin\frac{C}{2}\sin S = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cos\frac{C}{2}.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à cos S et à sin S, on aura, après quelques transformations faciles,

$$(8)\qquad \cos S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$(9)\qquad \sin S = \frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

4. Si l'on désigne par 2σ la surface du triangle supplémentaire et par $2S'$, $2S''$, $2S'''$ les aires des triangles formés d'un côté du triangle proposé et des prolongements des deux autres, on aura

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{S'}{2}\operatorname{tang}\frac{S''}{2}\operatorname{tang}\frac{S'''}{2}}{\operatorname{tang}\frac{S}{2}}}.$$

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE M. STEINER

(voir t. XIV, p. 141);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

THÉORÈME I. *En inscrivant dans un quadrilatère deux coniques, les huit points de contact sont sur une même conique.*

Soient ABCD le quadrilatère; EF les points de concours de ses côtés opposés; G le point de croisement des diagonales AC, DB; H le point de rencontre de DB et de EF; 1, 2, 3, 4 les quatre points de contact de la première conique; 5, 6, 7, 8 ceux de la seconde sur les côtés AD, AB, BC, CD respectivement. On sait que les cordes de contact 12, 56, 87, 43 concourent en H, et que les cordes de contact 13, 24, 57, 68 concourent en G (*Géométrie supérieure*, n° 692).

Cela posé, par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 faisons passer une conique, elle coupera la droite H5 en un point qui sera le conjugué harmonique du point 5 par rapport aux deux points H et au point *h*, où cette droite est coupée par les diagonales FF et AC respectivement (*Géom. sup.*, n° 698); or le point 6, qui est sur cette droite HS, est précisément ce conjugué harmonique (*Géom. sup.*, n° 693); donc la conique (12345) passera par le point 6.

De même, cette conique coupera la droite G5 en un point qui sera le conjugué harmonique du point 5 par rapport au point G et au point *g* où la droite G5 coupe EF (n° 698); or le point 7, qui est sur cette droite, est

précisément ce conjugué harmonique (n° 693); donc la conique passe par ce point 7.

En considérant enfin la corde 6G8, on prouverait de la même manière que la conique passe par le point 8.

Ainsi le théorème est démontré.

Théorème II. *Une conique étant inscrite dans un quadrilatère, si, par les quatre points de contact, on fait passer une seconde conique, elle coupera les côtés en quatre nouveaux points qui sont les points de contact d'une conique inscrite.*

Ce théorème est le réciproque du précédent. La démonstration s'appuie exactement sur les mêmes propositions de la *Géométrie supérieure;* il suffit de renverser le raisonnement qu'on vient de faire pour le premier théorème.

Théorème III. *Les huit points de contact des deux coniques inscrites dans un quadrilatère donnent soixante-dix groupes de quatre points.*

Douze de ces points sont avec deux des quatre sommets opposés sur une même conique.

Ces douze coniques se partagent en six couples de coniques tels, que dans chaque couple les coniques ont un double contact.

On a soixante-dix groupes de quatre points, parce que c'est le nombre des combinaisons différentes de huit points pris quatre à quatre.

Les trois diagonales AC, BD, EF du quadrilatère sont des ellipses infiniment aplaties inscrites dans ce quadrilatère; leurs extrémités représentent chacune deux points de contact de ces ellipses avec les côtés du quadrilatère. Donc, par le théorème I, les deux extrémités d'une même diagonale se trouvent sur la même conique que quatre points de contact d'une autre conique inscrite.

Cela donne d'abord les six coniques :

(1234 AC), (1234 BD), (1234 EF),
(5678 AC), (5678 BD), (5678 FF).

Combinons actuellement ces extrémités des diagonales avec quatre points de contact appartenant à deux coniques distinctes, et choisis de manière que l'on n'ait que deux points sur chaque côté du quadrilatère en comptant ces extrémités elles-mêmes ; on obtiendra les six coniques suivantes :

(1278 AC), (1476 BD), (1638 EF),
(3456 AC), (3258 BD), (2457 EF).

Je dis ces *six coniques*, car il est évident que les raisonnements employés pour démontrer le théorème I s'appliquent encore ici, puisque les cordes (12) et (78), par exemple, concourent au point H, *pôle* de AC ; que, dans le second groupe, les cordes (14), (67) concourent au *pôle* de BD, et que, dans le troisième, les cordes (13), (68) concourent au *pôle* de EF.

Et il est d'ailleurs bien évident que ce sont là les seules combinaisons possibles. En tout douze coniques.

Associons-les de la manière suivante :

(1234 AC)	(5678 AC)	(1234 BD)
(1278 AC)	(5634 AC)	(1674 BD)
(5678 BD)	(1234 EF)	(5678 EF)
(5238 BD)	(1638 EF)	(5274 EF)

Les deux coniques de chacun de ces six groupes ont un double contact aux sommets du quadrilatère par lesquels elles passent. Par exemple, les deux coniques (1234AC) (1278 AC) se touchent en A et en C. Ceci résulte de ce que, dans ces deux coniques, la corde AC a le même pôle

H, et que, par conséquent, elles ont l'une et l'autre pour tangentes en A et C les droites AH, CH.

Et ainsi des autres. Le théorème est donc démontré.

Théorème IV. L'énoncé de ce théorème est évidemment faux; il faut lire :

Dans un quadrilatère inscrit à un cercle, le produit des distances de chaque point de la circonférence à deux côtés opposés est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés opposés.

Il est démontré dans la *Géométrie supérieure*, p. 463.

Théorème V. *Étant donné sur un plan un système de paraboles ayant même foyer* F *et deux points fixes* A *et* B, *si par ces deux points on mène quatre tangentes à l'une d'elles, le produit des rayons vecteurs qui aboutissent aux points de contact est constant, quelle que soit la parabole.*

En effet, le théorème n° 664 de la *Géométrie supérieure* (p. 498 — *autrement*) s'applique aux sections coniques avec une démonstration identique et il prend l'énoncé suivant :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, si une tangente roule sur la courbe, le produit de ses distances à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets opposés dans une raison λ *qui reste constante.*

La raison λ *est égale au produit des distances de l'un quelconque des deux foyers aux deux premiers sommets divisé par le produit des distances du même foyer aux deux autres sommets.*

Si l'un des foyers est à l'infini, $\lambda = 1$; donc :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer de la courbe à deux sommets opposés est égal au produit des distances de ce foyer aux deux autres sommets.

Si l'on suppose que les deux premiers sommets soient deux points de la courbe, les deux autres sommets se confondront avec les deux points de concours des tangentes en ces deux points. Il en résulte que :

Quand un angle est circonscrit à une parabole, le produit des distances des points de contact des deux côtés au foyer de la courbe est égal au carré de la distance de son sommet à ce foyer.

De ce dernier théorème, dû à Lambert, on conclut, dans la question qui nous occupe, que le produit

$$Fa.Fb.Fc.Fd = FA^2.FB^2 = \text{constante}.$$

Or ce produit est indépendant de la parabole que l'on considère. Donc le théorème est démontré.

On démontre, par d'autres considérations, que si les points A et B sont deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique dont les foyers sont φ et φ', on a toujours la relation

$$FA.FB = F\varphi.F\varphi',$$

F étant comme ci-dessus le foyer d'une parabole inscrite dans ce même quadrilatère. On a donc

$$Fa.Fb.Fc.Fd = F\varphi.F\varphi' = \text{constante},$$

quelles que soient la conique et la parabole auxquelles est circonscrit le quadrilatère qui donne lieu aux points de contact *a*, *b*, *c*, *d*, pourvu que cette conique ait les points φ et φ' pour foyers et que la parabole ait son foyer en F.

C'est le théorème VIII de M. Steiner.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 280 (CHASLES);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Il s'agit de prouver que si, par trois points en ligne droite de la branche infinie d'une courbe du troisième ordre, composée d'une telle branche et d'un ovale, on mène, respectivement, deux tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point.

Je ferai voir, par la démonstration même, que ce théorème est susceptible d'un énoncé plus général.

Soient A, B, C les trois points en ligne droite pris sur la branche infinie; les trois cordes de contact sont pq, KL, FG.

Maclaurin démontre très-simplement, dans son *Traité des courbes du troisième ordre* (prop. XV, fin du corollaire), que si par chacun des trois points A, B, C on mène quatre tangentes à la courbe, toute droite qui joint deux quelconques des douze points de contact passe par l'un des dix autres, de telle sorte qu'en chacun des douze points de contact il y a toujours quatre cordes semblables qui viennent s'y croiser.

Par le point A passent les tangentes AF, AG à l'ovale; Af, Ag à la branche infinie.

Par le point B passent les tangentes BK, BL à l'ovale; Bk, Bl à la branche infinie.

Par le point C passent les tangentes CP, CQ à l'ovale; Cp, Cq à la branche infinie.

F, G, K, L, P, Q sont les points de contact sur l'ovale.

f, *g*, *k*, *l*, *p*, *q* sont les points de contact sur la branche infinie.

J'ajouterai que ce point de croisement est toujours le point de contact d'une tangente issue de celui des trois points A, B, C qui est étranger aux deux points de contact que réunit la corde en question. Ainsi, par exemple, les quatre cordes QG, PF, *fp*, *qg* qui joignent, deux à deux, les points de contact des tangentes issues des points A, C, viennent se couper au point de contact *k* de la tangente B*k* issue du troisième point B.

De même, le point de contact *f* de la tangente A*f* est le point de croisement des quatre cordes QL, PK, *ql*, *pk* qui joignent les points de contact relatifs aux points B, C.

De même encore, le point de contact *p* de la tangente C*p* issue du point C, est le point de croisement des quatre cordes LG, FK, *lg*, *fk* dont les extrémités sont les points de contact relatifs aux deux autres points A, B.

D'après cela, les triangles QLG, PKF dont les côtés homologues se coupent en *f*, *k*, *p* sur la droite *pf* sont *homologiques*. Donc (*Géométrie supérieure*, n° 365) leurs sommets homologues sont deux à deux sur trois droites concourantes en un même point O. Or ces trois droites PQ, LK, FG sont précisément les cordes de contact dont il s'agit dans l'énoncé de la question. Donc le théorème est démontré.

Considérons actuellement les deux triangles Q*lg*, P*kf*; ces triangles sont pareillement *homologiques* en vertu du *corollaire* déjà cité. Car les côtés *gl* et *kf* se coupent en *p*; les côtés Q*l*, P*k* se coupent en F; les côtés Q*g*, P*f* se coupent en K; et les trois points *p*, *k*, F sont en ligne droite. Donc les droites PQ, *kl*, *fg* qui joignent deux à deux les sommets homologues des deux triangles se croisent en un même point O'. Or, ces trois droites sont trois cordes de contact relatives aux trois points A, B, C dont

deux sont prises sur la branche infinie et une sur l'ovale.

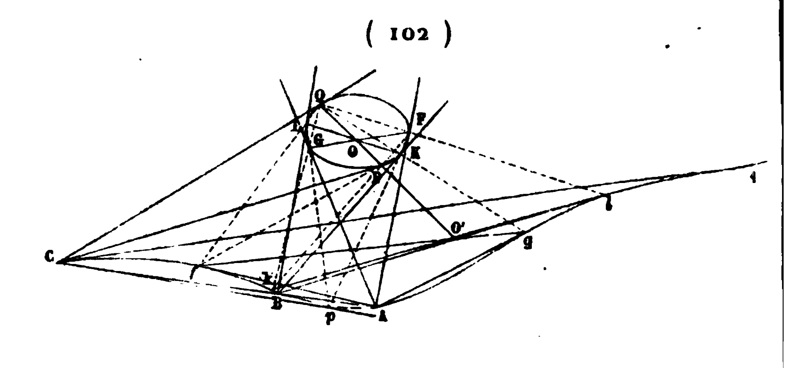
La comparaison des triangles qLg, pKf et, pareillement, celle des triangles qlG, Fkp donneraient lieu à une conclusion analogue, relativement aux deux autres permutations que l'on peut faire en prenant une corde de contact sur l'ovale et deux sur la branche infinie.

On a donc ce nouveau théorème.

Une courbe du troisième ordre étant composée d'un ovale et d'une branche infinie, si l'on prend trois points en ligne droite sur cette branche; que par l'un de ces trois points on mène deux tangentes à l'ovale, et que par chacun des deux autres on mène deux tangentes à la branche infinie, les trois cordes de contact ainsi déterminées passeront par un même point.

Remarque. Si les trois points A, B, C étaient pris sur les deux branches, savoir deux sur l'ovale et un sur la branche infinie, tels que Q, G, k, le théorème n'existerait plus; car par chacun des points Q, G de l'ovale on ne peut mener à la courbe aucune autre tangente que celle qui touche l'ovale en ce point même (et qui en représente deux superposées); il n'existe donc, dans ce cas, qu'une seule corde de contact, savoir celle qui est relative au point k, soit sur la branche infinie, soit sur l'ovale.

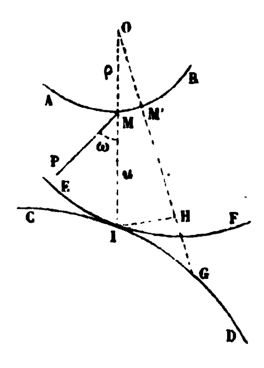
Quant à la proposition de Maclaurin, sur laquelle s'appuie la démonstration, elle résulte de considérations très-simples et purement géométriques, comme on le verra dans ma traduction du Traité de ce grand géomètre sur les courbes du troisième ordre, traduction que je n'ai d'ailleurs entreprise que pour faciliter aux jeunes gens la lecture de cet ouvrage remarquable, qui est aujourd'hui extrêmement rare en France et peut-être peu connu.



NOTE SUR LA THÉORIE DES ROULETTES;

PAR E. CATALAN.

1. PROBLÈME. *Étant données deux lignes* AB, CD *situées dans un même plan, trouver une ligne* EF *telle, que si elle roule sur* CD, *un point* M, *invariablement lié à cette ligne* EF, *décrive* AB.



On sait que la droite menée du point *décrivant* M au point de contact I entre la *ligne roulante* EF et la *ligne fixe* CD est normale, en M, à la roulette AB.

Cela posé, on peut admettre que CD soit déterminée,

au moyen de AB, par les longueurs des normales telles que MI. En d'autres termes,

$$(1) \qquad y = f(x)$$

étant l'équation de AB, l'autre ligne donnée CD pourra être représentée par une équation de la forme

$$(2) \qquad u = \varphi(x).$$

Enfin on peut supposer que la ligne EF, *si elle existe,* soit rapportée aux coordonnées polaires u et ω, M étant le pôle, et l'axe étant une droite arbitraire MP, mobile avec le pôle. Il s'agit de trouver la relation entre ω et u.

A cet effet, menons la normale M′G à la roulette AB, au point M′ infiniment voisin de M; et, du centre de courbure O, décrivons l'arc IH. Nous aurons, dans le triangle *rectangle* HGI,

$$(3) \qquad \operatorname{tang} G = \frac{IH}{HG} = \frac{(\rho + u)\varepsilon}{du} = \left(1 + \frac{u}{\rho}\right)\frac{ds}{du},$$

en désignant par ρ le rayon de courbure, par ds l'élément MM′, et par ε l'angle MOM′ ou l'*angle de contingence* de la roulette AB.

D'un autre côté, on sait que

$$\operatorname{tang} G = u\frac{d\omega}{du},$$

donc

$$(4) \qquad d\omega = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{\rho}\right) ds.$$

Si, au moyen des équations (1) et (2), on exprime ρ et ds en fonction de u et de du, la formule (4) donnera l'équation de la ligne cherchée EF. Par conséquent:

Toute courbe plane est une roulette.

II. Si

$$u = -\rho,$$

c'est-à-dire *si la ligne fixe* CD *est le lieu des centres de courbure des centres de la roulette* AB, l'équation (4) donne

$$d\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \text{constante}.$$

Cette dernière équation représente une ligne droite. Donc, *la courbe quelconque* AB *peut être engendrée par un point* M *appartenant à une droite qui roule sur la développée de cette même courbe*; ce qui est évident.

III. Si u = constante,

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{ds}{\rho};$$

ou, à cause de

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2}, \quad \rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{y''\,dx}{1+y'^2},$$

ou encore

(5) $$\omega = \frac{s}{u} + \text{arc tang}\, y' + \text{constante}.$$

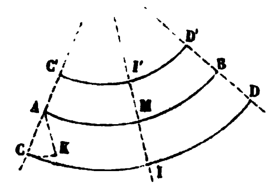
Mais le rayon vecteur u étant constant, *la courbe roulante* EF *est une circonférence dont le centre est le point décrivant* M. L'élément de cette circonférence, ou l'élément de la ligne fixe CD, a pour expression

(6) $$d\sigma = u\,d\omega.$$

Si donc nous supposons, ce qui est permis, que $y' = 0$ donne $s = 0$ et $\sigma = 0$, nous aurons, à cause des relations (5) et (6),

$$\sigma = s + u \,\text{arc tang}\, y'.$$

De là ce théorème très-probablement connu :



Si l'on considère une courbe AB *et une* parallèle CD *à cette courbe, la différence entre les deux arcs correspondants* CI, AM (c'est-à-dire terminés à deux normales communes AC, MI) *est égale à l'arc de cercle* CK, *décrit de l'origine* A *comme centre, et terminé à une parallèle* AK *à la normale commune* MI.

IV. Soit C'I'D' une autre parallèle à AMB, menée à la distance u. On aura

$$C'I' = AM - \text{arc tang}\, y',$$

et, par conséquent,

$$AM = \frac{1}{2}(CI + C'I').$$

Ainsi *l'arc* AM *est égal à la demi-sommè des arcs correspondants* CI, C'I'; ce qui est encore évident.

V. Supposons que la ligne fixe CD soit droite. Alors, en prenant cette ligne pour axe des abscisses, on aura

$$(7) \qquad u = y\sqrt{1 + y'^2};$$

puis, par l'équation (4),

$$d\omega = \int \frac{dx}{y} + \frac{dy'}{1 + y'^2},$$

$$(8) \qquad \omega = \int \frac{dx}{y} + \text{arc tang}\, y' + \text{constante}.$$

Ces deux dernières formules feront connaître, dans chaque cas particulier, *la courbe* EF *qui, roulant sur une*

droite donnée, fait décrire, à un point qu'elle entraîne, une ligne donnée AB.

VI. Si, par exemple, AB est une droite ayant pour équation

$$y = x \operatorname{tang} \alpha,$$

les équations (7) et (8) deviendront

$$u = \frac{x \operatorname{tang} \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \omega = \cot \alpha . \, \mathrm{l} x + \alpha + \text{constante},$$

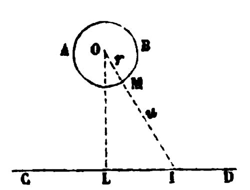
d'où en supposant $\omega = 0$ pour $x = 1$,

(9) $$u = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \alpha} e^{\omega \operatorname{tang} \alpha}.$$

Cette équation représente une spirale logarithmique. Donc, *quand une spirale logarithmique roule sur une droite, son pôle décrit une droite.*

VII. La ligne CD étant toujours une droite, si l'on prend, pour la roulette AB, une cycloïde ordinaire, une chaînette, etc., on trouve que la courbe roulante est une circonférence, une parabole, etc.

VIII. Considérons le cas particulier où, la ligne fixe



étant toujours une droite CD, la roulette AB serait une circonférence de rayon r. Désignons par β l'ordonnée OL de son centre et par φ l'angle IOL. Nous aurons

$$u = \frac{\beta}{\cos \varphi} - r, \quad \rho = r, \quad ds = r d\varphi;$$

puis

$$d\omega = \frac{\beta\, d\varphi}{\beta - r\cos\varphi}.$$

L'intégrale de cette équation est, en supposant $\omega = 0$ pour $\varphi = 0$,

$$\omega = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{\beta + r}{\beta - r}} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\right].$$

Mais, à cause de $\cos\varphi = \frac{\beta}{u + r}$,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{u + r - \beta}{u + r + \beta}};$$

donc l'équation de la courbe EF est

$$\omega = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{(\beta + r)(u + r - \beta)}{(\beta - r)(u + r + \beta)}}.$$

Celle-ci donne, par un calcul facile,

$$(10) \qquad u = \frac{\frac{\beta^2 - r^2}{r}}{1 + \frac{\beta}{r}\cos\frac{\omega\sqrt{\beta^2 - r^2}}{\beta}}.$$

Cette dernière équation a la forme de celle qui appartient aux *transformées des sections coniques* (*). Mais, comme le multiplicateur de ω est une fraction proprement dite, la ligne EF représentée par l'équation (10) n'est pas une de ces transformées.

IX. Les derniers calculs supposent l'ordonnée β plus grande que le rayon r.

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie, p. 58.

Si $\beta = r$, la formule (10) doit être remplacée par

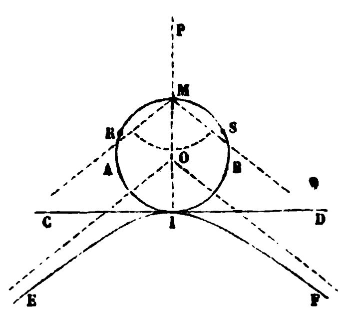
$$(11) \qquad u = \frac{2r}{(C-\omega)^2 - 1},$$

C désignant la constante arbitraire.

Si on la suppose nulle, l'équation (11) devient

$$(12) \qquad u = \frac{2r}{\omega^2 - 1},$$

$\omega = 0$ donne $u = -2$; ainsi quand le point de contact entre la courbe roulante et la droite CD se confond avec le point de contact I entre la droite et la circonférence AB, le point décrivant est en M, à l'extrémité du diamètre IM, et l'axe des amplitudes est dirigé suivant le prolongement MP de ce diamètre.



La courbe roulante EIF a deux asymptotes, parallèles aux rayons vecteurs *infinis* déterminés par

$$\omega = \pm 1,$$

et situées à une distance de ces rayons égale à r. Quand cette courbe roulera sur CD, le point M décrira l'arc RMS, dont la longueur est égale au diamètre IM. Etc.

MÉTHODE DE QUADRATURE DE COTES;

D'APRÈS GAUSS (*).

1. *Lemme.* Soit

$$Y = \sum_0^n \frac{A(\mu)\,T(\mu)}{M(\mu)};$$

le signe sommatoire se rapporte à l'indice μ.

n est un nombre positif entier donné et μ prend successivement les $n+1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots n$; les A sont des constantes données,

$$T_{(\mu)} = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{nt-\mu};$$

t une variable; de sorte que

$$T_{(\mu)} = nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-\mu+1)$$
$$(nt-\mu-1)\ldots(nt-n).$$

Désignons par $M_{(\mu)}$ la valeur numérique que prend $T_{(\mu)}$ en y faisant $nt=\mu$, on aura

$$M_{(\mu)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1.-1.-2\ldots\mu-n,$$
$$T_0 = (nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n),$$
$$M_0 = -1.-2.-3\ldots-n.$$

Le premier terme de Y est

$$\frac{A(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)}.$$

On met A au lieu de $A_{(0)}$.

(*) *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, autore Carolo Friderico Gauss, Societati regiæ Scientiarum exhibita D. 16 septembris 1814, p. 39-76.

Le deuxième terme est

$$\frac{A_1\, nt(nt-2)\ldots(nt-n)}{1.-1\ldots 1-n},$$

le dernier terme est

$$\frac{A_n\, nt(nt-1)\ldots(nt-n+1)}{n(n-1)\ldots 1}.$$

Faisant successivement t égal à l'un des nombres de la suite

$$0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n},\ldots,\quad \frac{n}{n},$$

les $n+1$ valeurs numériques correspondantes de Y sont

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots\ A_n.$$

Si Y_1 est une autre fonction de t, ayant ces mêmes valeurs pour les mêmes valeurs de t, $Y'-Y$ sera divisible par les $(n+1)$ facteurs

$$t,\quad t-\frac{1}{n},\quad t-\frac{2}{n},\ldots,\quad t-1,$$

et, par conséquent, par le produit de ces facteurs. Il faut donc que Y_1 soit d'un degré plus élevé que t; ainsi de toutes les fonctions de t qui donnent ces valeurs A, $A_1,\ldots$, A_n pour les valeurs correspondantes de t, la moins élevée est la fonction Y.

Corollaire. Si une fonction de t étant développée suivant les puissances de t est interrompue avant le terme qui renferme t^{n+1}, cette fonction est identique avec la fonction Y.

2. Soit à intégrer $\int_g^h y\,dx$ par la méthode des rectangles; où y est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

Faisons

$$h - g = \Delta,$$

donnons successivement à x les $n+1$ valeurs

$$g, \quad g+\frac{\Delta}{n}, \quad g+\frac{2\Delta}{n}, \quad g+\frac{3\Delta}{n}, \ldots, \quad g+\frac{n\Delta}{n},$$

et supposons que les valeurs correspondantes de y sont

$$A, \ A_1, \ A_2, \ldots \ A_n.$$

Posons

$$x = g + \Delta t,$$

où t est une nouvelle variable et y devient fonction de t.

Alors

$$\int y\,dx = \Delta \int y\,dt.$$

Remplaçons y par Y et l'on aura

$$\int y\,dx = \Delta \int Y\,dt.$$

Développant $T_{(\mu)}$ suivant les puissances décroissantes de t, on a

$$T_{(\mu)} = \alpha t^n + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} + \delta t^{n-3} + \ldots,$$

$$\int_0^1 T_\mu\,dt = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n-1} + \frac{\delta}{n-2} + \ldots = M_\mu R_\mu,$$

M_μ est un nombre, donc R_μ est aussi un nombre. On aura

$$\Delta \int_0^1 y\,dt = \Delta \int_0^1 \sum \frac{T_\mu\,dt}{M_{(\mu)}}$$

$$= \Delta (AR + A_1 R_1 + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n).$$

Car

$$g = 0, \quad h = 1, \quad \Delta = 1.$$

Cette intégrale est exacte.

Exemple :

$$n = 5, \quad \mu = 2,$$

$$T_2 = 5t(5t - 1)(5t - 3)(5t - 4)(5t - 5)$$
$$= 5^5 t^5 - 13.5^4.t^4 + 59.5^3.t^3 - 107.5^2.t^2 + 60.5\, t,$$

$$M_2 = 2.1. - 1. - 2. - 3 = -12,$$

$$\alpha = \quad 3125,$$
$$\beta = - 6125,$$
$$\gamma = \quad 7375,$$
$$\delta = - 2675,$$
$$\varepsilon = \quad 300;$$

$$-12\,R_2 = \frac{3125}{6} - 1625 + \frac{7375}{4} - \frac{2675}{3} + \frac{300}{2} = -\frac{25}{12},$$

$$R_2 = \frac{25}{144}.$$

3. On peut abréger cè calcul. Posons

$$2t - 1 = u,$$

alors

$$T_{(\mu)} = \frac{(nu+n)(nu+n-2)(nu+n-4)\ldots(nu-n+4)(nu-n+2)(nu-n)}{2^n(nu+n-2\mu)}$$

Posons

$$\frac{(n^2u^2 - n^2)[n^2u^2 - (n-2)^2][n^2u^2 - (n-4)^2][n^2u^2 - (n-6)^2]\ldots}{n^2u^2 - (n-2\mu)^2} = U_{(\mu)}$$

Lorsque n est pair, le numérateur se termine par $(n^2u^2 - 4)\,nu$, et lorsque n est impair par

$$(n^2u^2 - 9)(n^2u^2 - 1),$$

et

$$T_{\mu} = \frac{nu - n + 2\mu}{2^n} U_{(\mu)},$$

$U_{(\mu)}$ est de degré $n - 1$ en u; et

$$\int_0^1 T_\mu\, dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} T_\mu\, du$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{nu\, U_\mu\, du}{2^{n+1}} + \int_{-1}^{+1} \frac{(2\mu - n)\, U_\mu\, du}{2^{n+1}}.$$

Posons

$$U_{(\mu)} = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-3} + \gamma u^{n-5} + \ldots.$$

Si n est pair la seconde intégrale s'évanouit, et si n est impair la première s'évanouit.

Ainsi pour n pair,

$$\int_0^1 T_\mu\, dt = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-3} + \frac{\delta}{n-5} + \ldots\right);$$

pour n impair,

$$\int_0^1 T_\mu\, dt = \frac{2\mu - n}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n-4} + \frac{\delta}{n-6} + \ldots\right).$$

U_μ ne change pas en remplaçant $n - 2\mu$ par $2\mu - n$, c'est-à-dire en remplaçant μ par $n - \mu$, donc

$$U_{(\mu)} = U_{(n-\mu)}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 T_{(n-\mu)}\, dt = \pm \int_0^1 T_\mu\, dt,$$

le signe supérieur pour n pair et le signe inférieur pour n impair; et comme

$$M_{n-\mu} = \pm M_\mu,$$

on a donc toujours

$$R_{n-\mu} = R_\mu.$$

Ainsi, dans les coefficients $R, R_1, R_2, \ldots, R_n$,

$$R = R_n, \quad R_1 = R_{n-1}, \quad R_2 = R_{n-2}, \ldots.$$

Table des valeurs de R, *d'après Cotes.*

Valeurs de n.						
1	$R = R_1 = \frac{1}{2}$.					
2	$R = R_2 = \frac{1}{6}$,	$R_1 = \frac{2}{3}$.				
3	$R = R_3 = \frac{1}{8}$,	$R_1 = R_2 = \frac{3}{8}$.				
4	$R = R_4 = \frac{7}{90}$,	$R_1 = R_3 = \frac{16}{45}$,	$R_2 = \frac{2}{15}$.			
5	$R = R_5 = \frac{19}{288}$,	$R_1 = R_4 = \frac{25}{96}$,	$R_2 = R_3 = \frac{25}{144}$.			
6	$R = R_6 = \frac{11}{840}$,	$R_1 = R_5 = \frac{9}{35}$,	$R_2 = R_4 = \frac{9}{280}$,	$R_3 = \frac{34}{105}$.		
7	$R = R_7 = \frac{751}{17280}$,	$R_1 = R_6 = \frac{3577}{17280}$,	$R_2 = R_5 = \frac{49}{640}$,	$R_3 = R_4 = \frac{2089}{17280}$.		
8	$R = R_8 = \frac{980}{28350}$,	$R_1 = R_7 = \frac{2944}{14175}$,	$R_2 = R_6 = -\frac{464}{14175}$,	$R_3 = R_5 = \frac{5248}{14175}$,	$R_4 = -\frac{454}{2835}$.	
9	$R = R_9 = \frac{2857}{89600}$,	$R_1 = R_8 = \frac{15741}{89600}$,	$R_2 = R_7 = \frac{27}{2240}$,	$R_3 = R_6 = \frac{1209}{5000}$,	$R_4 = R_5 = \frac{2889}{44800}$.	
10	$R = R_{10} = \frac{16067}{598752}$,	$R_1 = R_9 = \frac{26575}{149688}$,	$R_2 = R_8 = -\frac{16175}{199584}$,	$R_3 = R_7 = \frac{5675}{12474}$,	$R_4 = R_6 = -\frac{4825}{11088}$,	$R_5 = \frac{17807}{24948}$.

4. *Évaluation de l'erreur.*

Soit

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{m+1} = \text{valeur exacte}.$$

Partageons l'intervalle de o à 1 en $n+1$ parties égales

$$0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n},\ldots,\quad \frac{n}{n},$$

$$\Delta = h - g = 1,$$

les $n+1$ valeurs de A sont

$$0,\quad \frac{1}{n^m},\quad \left(\frac{2}{n}\right)^m,\quad \left(\frac{3}{n}\right)^m,\ldots,\quad \left(\frac{n}{n}\right)^m;$$

donc

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{n^m}\left[R_1 + 2^m.R_2 + 3^m.R_3 + \ldots + n^m.R_n\right],$$

valeur approchée.

Désignons par $k_{(m)}$ la différence des deux valeurs, on a

$$k_{(m)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n^m}\left[R_1 + 2^m R_2 + 3^m R_3 + \ldots + n^m R_n\right],$$

$$k = 1 - R_1 - R_2 - \ldots - R_n,\quad \text{car}\quad m = 0.$$

Développant y suivant les puissances croissantes de t,

$$y = K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots,$$

alors

$$k_{(m)} = K k + K_1 k_1 + K_2 k_2 + K_3 k_3 + \ldots + K_n k_n.$$

Car pour t^0 la différence est k, pour t^1 la différence est k_1, etc.

Tant que le développement de y ne dépasse pas n, la valeur approchée se confond avec la vraie valeur; ainsi

$k_{(0)}, k_{(1)}, k_{(2)}, \ldots, k_{(n)}$ sont nuls et la correction ne commence qu'à k_{n+1}. En effet, tant que m est moindre que n, y est identique avec Y et l'intégration est exacte telle qu'elle a été donnée ci-dessus. Donc

$$k_m = K_{n+1} k_{n+1} + K_{n+2} k_{n+2} + \ldots.$$

Exemple.

$n = 1$, $k_2 = -\frac{1}{6}$, $k_3 = -\frac{1}{4}$, $k_4 = -\frac{3}{10}$,

$n = 2$, $k_3 = 0$, $k_4 = -\frac{1}{120}$, $k_5 = -\frac{1}{48}$,

$n = 3$, $k_4 = -\frac{1}{270}$, $k_5 = -\frac{1}{108}$,

$n = 4$, $k_5 = 0$, $k_6 = -\frac{1}{2688}$, $k_7 = -\frac{1}{768}$,

$n = 5$, $k_6 = -\frac{11}{32500}$, $k_7 = -\frac{11}{15000}$,

$n = 6$, $k_7 = 0$, $k_8 = -\frac{1}{38880}$, $k_9 = -\frac{1}{8640}$,

$n = 7$, $k_8 = -\frac{167}{10588410}$, $k_9 = -\frac{167}{2352980}$,

$n = 8$, $k_9 = 0$, $k_{10} = -\frac{37}{17301504}$, $k_{11} = -\frac{37}{3145728}$

Pour $n = 1$,

$$k_1 = 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{1^2} R_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Pour $n = 2$,

$$k_1 = k_2 = 0,$$

$$k_3 = \frac{1}{3+1} - \frac{1}{2^3}(R_1 + 2^3 R^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3} + \frac{8}{6}\right) = 0,$$

$$k_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2^4}(R_1 + 2^4 R^2 + 3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{66}\left(\frac{2}{3} + \frac{16}{6}\right) = -\frac{1}{120}.$$

On a en général pour n pair

$$k_{n+1} = 0,$$

et

$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} k_{(2n+2)}.$$

En effet, soit l_m la différence entre la valeur vraie et la valeur approchée de

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

on a

$$l_{(m)} = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt$$

$$- \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{2}\right)^m R + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_1 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_2 \\ + \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_3 + \ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^m R_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^m R_n \end{array} \right].$$

Pour m impair l'intégrale et la série s'évanouissent; car

$$R_p = R_{n-p}.$$

Pour m et n pairs

$$l_m = \frac{1}{2^m (m+1)} - \frac{2}{n^m}$$

$$\times \left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2}n\right)^m R + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^m R_1 + \left(\frac{1}{2}n - 2\right)^m R_2 + \ldots \\ + 2^m R_{\frac{1}{2}n-2} + R_{\frac{1}{2}n-1} \end{array} \right].$$

Pour m pair et n impair

$$l_m = \frac{1}{2^m} \left[\frac{1}{m+1} - \frac{2}{n^m} n^m R + (n-2)^m R_1 + (n-4)^m R_2 + \ldots + 3^m R_{\frac{n-3}{2}} + R_{\frac{n-1}{2}} \right].$$

Développons y suivant les puissances $t-\frac{1}{2}$:

$$y = L + L_1\left(t-\frac{1}{2}\right) + L_2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + L_3\left(t-\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots;$$

la correction sera

$$l_m = Ll + L_2 l_2 + L_4 l_4 + L_6 l_6 + \ldots.$$

Car pour toute valeur de m qui ne surpasse pas n, $l_{(m)}$ s'évanouit.

Ainsi la correction sera pour n pair

$$L_{n+2} l_{n+2} + L_{n+4} l_{n+4} + L_{n+6} l_{n+6} + \ldots,$$

pour n impair

$$L_{n+1} l_{n+1} + L_{n+3} l_{n+3} + L_{n+5} l_{n+5} + \ldots,$$

On a

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^m = t^m - \frac{1}{2} m t^{m-1} + \frac{1}{4}\frac{m(m-1)}{1.2} t^{m-2} + \ldots,$$

donc

$$l_m = k_m - \frac{1}{2} m k_{m-1} + \frac{1}{4}\frac{m(m-1)}{1.2} k_{m-2} + \ldots,$$

car pour t^m la correction est k_m, etc.

Et de même

$$k_m = l_m + \frac{1}{2} m\, l_{m-1} + \frac{1}{4}\frac{m(m-1)}{1.2} l_{m-2}$$

(où il faut rejeter les l d'indice impair).

Il faut dans les deux séries (p. 115) ne commencer qu'à $n+1$.

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$

$$k_{n+2} = l_{n+2} + \frac{1}{2}(n+2)\, l_{n+1},$$

$$k_{n+3} = l_{n+3} + \frac{1}{2}(n+3)\, l_{n+2} + \frac{1}{4}\frac{(n+3)(n+2)}{1.2} l_{n+1},$$

car

$$k_n = k_{n-1} = k = 0,$$
$$l_n = l_{n-1},\ \ l = 0.$$

Donc si n est pair,

$$k_{n+1} = 0,$$
$$k_{n+2} = l_{n+2},$$
$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} l_{n+2} = \frac{n+3}{2} k_{n+2};$$

si n est impair,

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$
$$k_{n+2} = \frac{n+2}{2} l_{n+1} = \frac{n+2}{2} k_{n+1};$$

ce qui démontre les relations indiquées ci-dessus.

Il est toujours avantageux dans la méthode de Cotes, de prendre n pair, parce qu'alors $k_{n+1} = 0$ et la correction est de l'ordre $n+1$.

Autre intégration par approximation.

$$\int_g^h y dx, \quad g - h = \Delta, \quad \Delta t = x - g,$$
$$\int_g^h y dx = \Delta \int_0^1 y dt,$$

y devient fonction de t.

Soit

$$\begin{aligned}Y = {} & A \frac{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_n)}\\ & + A_1 \frac{(t-a)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_1-a)(a_2-a)(a_3-a)\ldots(a_n-a)}\\ & + A_2 \frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_2-a)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_1-a_n)}\\ & \vdots\\ & A_n \frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.\end{aligned}$$

Supposons que pour ces valeurs de

t	correspondent les valeurs de	y,
a	—	A,
a_1	—	A_1,
a_2	—	A_2,
⋮		⋮
a_n	—	A_n.

y est identique avec Y tant que le degré de y ne dépasse pas n, ou lorsque des termes de degré supérieur à n peuvent être négligés (p. 110).

Soit

$$T = (t - a)(t - a_1)(t - a_2)\ldots(t - a_n)$$
$$= t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \alpha_2 t^{n-2} + \ldots + \alpha_n.$$

Désignant par M, M_1, M_2,..., les valeurs des numérateurs dans Y en y faisant t successivement égal à a, a_1, a_2, a_n, on aura

$$Y = \frac{AT}{M(t-a)} + \frac{A_1 T}{M_1(t-a_1)} + \frac{A_2 T}{M_2(t-a_2)} + \ldots$$
$$+ \frac{A_n T}{M_n(t-a_n)};$$

M, M_1, M_2,..., M_n sont les valeurs de $\frac{dT}{dt}$ pour $t = a$, a_1, a_2,..., a_n.

$$\frac{T}{t-a} = t^n + \begin{array}{l|l|l|l} a & t^{n-1} + a^2 & t^{n-2} + a^3 & t^{n-3} + \ldots + a^n \\ \alpha & a\alpha & \alpha\, a^2 & \alpha\, a^{n-1} \\ & \alpha_1 & \alpha_1\, a & \alpha_1 a^{n-2} \\ & & \alpha_2 & \alpha_2 a^{n-3} \\ & & & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{T\,dt}{t-a} = \frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n-1} + \frac{a^3}{n-2} + \ldots + a^n$$

$$\frac{a}{n} + \frac{\alpha a}{n-1} + \frac{\alpha a^2}{n-2} + \ldots + \alpha\, a^{n-1}$$

$$\frac{\alpha_1}{n-1} + \frac{\alpha_1 a}{n-2} + \ldots + \alpha_2 a^{n-3}$$

$$\frac{\alpha_2}{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}$$

$$= a^n + \alpha a^{n+1} + \alpha_1 a^{n-2} + \alpha_2 a^{n-3} + \ldots \alpha_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[a^{n-1} + \alpha a^{n-2} + \alpha_1 a^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2} \right]$$

$$+ \frac{1}{3}\left[a^{n-2} + \alpha a^{n-3} + \alpha_1 a^{n-4} + \ldots + \alpha_{n-3} \right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[a^{n-3} + \alpha a^{n-4} + \alpha' a^{n-5} + \ldots + a_{n-4} \right]$$

$$+ \ldots$$

$$+ \frac{1}{n-1}\left[a^2 + \alpha a + a' \right]$$

$$+ \frac{1}{n}\left[a + \alpha \right]$$

$$+ \frac{1}{n+1}.$$

Soit

$$T \log \left(\frac{1}{1-t^{-1}} \right) = T \left(t^{-1} + \frac{1}{2} t^{-2} + \frac{1}{3} t^{-3} + \frac{1}{2} t^{-4} + \ldots \right)$$
$$= T' + T'',$$

où T' représente la somme des termes où l'exposant de t est positif et T'' la somme des termes où cet exposant est négatif.

En faisant $t = a$ dans T', on obtient la série ci-dessus pour

$$\int_0^1 \frac{T\,dt}{t-a}.$$

Désignant par R, R_1, R_2, R_3,..., R_n les valeurs que prend

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

en y remplaçant successivement t par a, a_1, a_2, a_3,..., a_n, on aura

$$\int_0^1 Y\,dt = AR + A_1 R_1 + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n,$$

$$\int_g^h y\,dx = \Delta \int_0^1 Y\,dt,$$

vraie ou approchée.

Faisons

$$u = 2t - 1, \quad b = 2a - 1,$$
$$b_1 = 2a_1 - 1, \quad b_2 = 2a_2 - 1 \ldots,$$

alors

$$T = \frac{U}{2^{n+1}}, \quad U = (u-b)(u-b_1)(u-b_2)\ldots(u-b_n),$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2^n}\frac{dU}{du};$$

ainsi on aura M, M_1, M_2, etc., si l'on remplace successivement u par b, b_1, b_2,..., b_n dans $\frac{1}{2^n}\frac{dU}{du}$.

$$\log\frac{1}{1-t^{-1}} = \log\frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}}$$
$$= 2u^{-1} + \frac{2}{3}u^{-3} + \frac{2}{5}u^{-5} + \frac{2}{7}u^{-7} + \ldots$$

Faisons

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots\right) = U' + U'',$$

où U′ est la partie à exposants positifs, on aura

$$T' + T'' = \frac{1}{2^n}(U' + U'');$$

donc

$$U' = 2^n T', \quad U'' = 2^n T''.$$

Ainsi on trouve les valeurs de R, R_1, R_2, R_3, etc., en faisant successivement $u = b, b_1, b_2, b_3$, etc., dans

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}.$$

3. *Applications numériques.*

$$n = 5, \quad a = 0,$$

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{3}{5}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad a_5 = 1,$$

$$T = t^6 - 3t^5 + \frac{17}{5}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{274}{625}t^2 - \frac{24}{625}t,$$

$$T' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 + \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500},$$

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = \frac{t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 - \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500}}{6t^5 - 4t^4 + \frac{68}{5}t^3 - \frac{27}{5}t^2 - \frac{548}{625}t - \frac{24}{625}}.$$

Remplaçant t par les valeurs de a, on trouve les valeurs de R; mais la seconde méthode est un peu plus courte.

$$U = u^6 - \frac{7}{5}u^4 + \frac{259}{625}u^2 - \frac{9}{625},$$

$$U' = u^5 - \frac{16}{15}u^3 + \frac{277}{1875}u,$$

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)} = \frac{u^4 - \frac{16}{15}u^2 + \frac{277}{1875}}{6u^4 - \frac{28}{5}u^2 + \frac{518}{625}};$$

où l'on remplace u par les valeurs de b, savoir

$$-1, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{1}{5}, \ldots,$$

On aura aussi les valeurs de R et les mêmes que par la méthode de Cotes, puisque les a forment une progression arithmétique, et l'on a

$$R = R_5 = \frac{19}{288}, \quad R_1 = R_4 = \frac{25}{90}, \quad R_2 = R_3 = \frac{25}{144} \text{ (p. 114)}.$$

Degré de précision.

Posons

$$Ra^m + R_1 a_1^m + R_2 a_2^m + \ldots + R_m a_m^m = \frac{1}{m+1} - k_m,$$

k_m est la différence entre l'intégrale exacte $\int_0^1 t^m\,dt$ et l'intégrale approchée. Nous aurons, en développant en séries,

$$\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a_2} + \ldots + \frac{R}{t-a_m}$$

$$= (1-k)t^{-1} + \left(\frac{1}{2} - k_1\right)t^{-2} + \left(\frac{1}{3} - k_2\right)t^{-3}$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - k_3\right)t^{-4} - \ldots$$

$$= t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \ldots - \Theta,$$

$$\Theta = kt^{-1} + k_1 t^{-2} + k_2 t^{-3} + k_3 t^{-4} + \ldots.$$

Comme nous savons que k, k_1, k_2, ..., k_m sont nuls, on a donc

$$\Theta = k_{n+1} t^{-(n+2)} + k_{n+2} t^{-(n+3)} + k_{n+3} t^{-(n+4)} + \ldots;$$

multipliant par T, on obtient

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a^2} + \ldots + \frac{R_m}{t-a_m}\right)$$

$$= T' + T'' - T\Theta \text{ (p. 121)}.$$

Le premier membre est une fonction entière de t de l'or-

dre n; donc le deuxième membre doit être aussi entier. Or T′ est une fonction entière, donc

$$T'' = T\Theta.$$

Ainsi l'on trouve Θ en développant la fraction $\frac{T''}{T}$, et par là on détermine les coefficients k_{n+1}, k_{n+2}, etc., et si l'on développe y en puissance de t, savoir

$$y = K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots,$$

on aura

$$\int y dt = k_{n+1} K_{n+1} + k_{n+2} K_{n+2} + \ldots.$$

Seconde manière d'exprimer la correction.

Soit

$$y = L + L_1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + L_2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + L_3 \left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

la correction sera

$$l_{(n+1)} L_{n+1} + l_{n+2} L_{n+2} + l_{n+3} L_{n+3} + \ldots,$$

où l_m est la correction de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

et l'on a

$$l_m = k_m - \frac{1}{2} m k_{m-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} k_{m-2}$$
$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} k_{m-3} + \ldots.$$

Θ devient, en remplaçant t par $\frac{1}{2} u + \frac{1}{2}$,

$$2k(u^{-1} + u^{-2} + u^{-3} - u^{-4} + \ldots)$$
$$4k_1(u^{-2} + 2u^{-3} + 3u^{-4} - 4u^{-5} + \ldots)$$
$$+ 8k_2(u^{-3} - 3u^{-4} + 6u^{-5} - 10u^{-6} + \ldots)$$
$$+ \ldots$$

ou bien

$$2ku^{-1} + 4\left(k_1 - \frac{1}{2}\right)u^{-2} + 8\left(k_2 - \frac{1}{2}\cdot 2k_1 + \frac{1}{4}k\right)u^{-3}$$
$$+ 6\left(k_3 - \frac{1}{2}.3k_2 + \frac{1}{4}.3k_1 - \frac{1}{8}k\right)u^{-4},$$

ou

$$2lu^{-1} + 4l_1u^{-2} + 8l_2u^{-3} + 16l_3u^{-4} + \ldots;$$

mais $l, l_1, l_2, \ldots, l_n$ sont nuls; donc Θ se change en

$$2^{n+2}l_{n+1}u^{-(n+2)} + 2^{n+3}l_{n+2}u^{-(n+3)} + 2^{n+4}l_{n+3}u^{-(n+4)}.$$

Mais

$$\Theta = \frac{T''}{T}$$

et T, T″ se changent par la substitution de $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ au lieu de t, en $\frac{U}{2^{n+1}}$ et $\frac{U''}{2^n}$ (voir ci-dessus, art. 2). Ainsi la fonction Θ devient $\frac{2U''}{U}$.

Désignant par Ω la série résultant du développement de $\frac{U''}{U}$, on a

$$\Omega = 2^{n+1}l_{n+1}u^{-(n+2)} + 2^{n+2}l_{n+2}u^{-(n+3)}$$
$$+ 2^{n+3}l_{n+3}u^{-(n+4} + \ldots.$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus,

$$U'' = -\frac{176}{13125}u^{-1} - \frac{304}{28125}u^{-3} - \frac{2576}{309375}u^{-5} + \ldots,$$
$$\Omega = -\frac{176}{13125}u^{-7} - \frac{832}{28125}u^{-9} - \frac{189856}{42968875}u^{-11} - \ldots.$$

La correction de la valeur approchée de l'intégrale est

$$-\frac{11}{525000}L_6 - \frac{13}{112500}L_8 - \frac{5933}{137500000}L_{10} - \ldots.$$

Méthode d'approximation plus approchée.

Quelles que soient les valeurs de $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'approximation est toujours exacte jusqu'à l'ordre n; mais on peut choisir ces valeurs telles que l'approximation soit d'un ordre plus élevé ; ainsi dans la méthode de Cotes nous avons vu que l'ordre devient $n+1$ lorsque n est pair. Généralement, si les valeurs de a sont tellement choisies, que dans T″ ou U″ des termes disparaissent au commencement de la série, alors la précision dépassera l'ordre n d'autant d'unités qu'il aura disparu de termes.

Supposons

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \ldots;$$

il faut donc choisir α, α', α'' de manière que dans le produit

$$T\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \ldots\right)$$

les puissances t^{-1}, t^{-2}, $t^{-3}, \ldots, t^{-(n+1)}$ disparaissent, ou bien posant

$$U = u^{n+1} + \beta u^n + \beta' u^{n+1} + \beta'' u^{n+2} + \ldots,$$

on prenne β, β', β'' de manière que dans le produit

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} - \frac{1}{7}u^{-7} - \ldots\right)$$

les puissances u^{-1}, u^{-2}, $u^{-3}, \ldots, u^{-(n+1)}$ disparaissent.

Il est évident que cette condition ne peut être satisfaite à moins que l'on n'ait

$$\beta = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \beta''' = 0,$$

ce qui abrége le calcul.

Soit

$$n = 0;$$

alors

$$T = t + \alpha,$$

$$(t + \alpha)\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \ldots\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse, on doit avoir

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad x = -\frac{1}{2},$$

donc

$$T = t - \frac{1}{2},$$

et

$$U = u,$$

$$n = 1, \quad T = t^2 + \alpha t + \alpha',$$

$$(t^2 + \alpha t + \alpha')\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} - \frac{1}{3}t^{-3} + \ldots\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha + \alpha' = 0.$$

Pour que t^{-2} disparaisse

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha' = 0,$$

d'où

$$\alpha = -1, \quad \alpha' = \frac{1}{6}, \quad T = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Pour $U = u^2 + \beta^2$,

$$(u^2 + \beta')\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \ldots\right),$$

$$\beta' + \frac{1}{3} = 0, \quad \beta' = -\frac{1}{3}, \quad U = u^2 - \frac{1}{3},$$

$$n = 2, \quad T = t^3 + \alpha t^2 + \alpha' t + \alpha.$$

Pour que t^{-1}, t^{-2}, t^{-3} disparaissent, on a les équations

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\alpha'+\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\alpha'+\frac{1}{2}\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\alpha+\frac{1}{4}\alpha'+\frac{1}{3}\alpha''=0,$$

d'où

$$\alpha=-\frac{3}{2},\quad \alpha'=\frac{3}{5},\quad \alpha''=-\frac{1}{20}.$$

Pour U on trouve

$$\beta'=-\frac{3}{5}.$$

Méthode générale par les fractions continues.

Par la théorie des fractions continues, on trouve que la fonction U qui jouit de la propriété que

$$U\left(u^{-1}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{5}u^{-5}+\frac{1}{7}u^{-7}+\ldots\right)$$

donne une série qui commence par $u^{-(n+2)}$, est

$$U=u^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}u^{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.(2n+1)(2n-1)}u^{n-3}$$
$$-\frac{(n+1)n\;n-1.n-2.n-3.n-4}{2.4.6.2n+1.2n-1.2n-3}u^{n-5}+\ldots,$$

et

$$T=t^{n+1}-\frac{(n+1)^2}{1.2n+2}t^{n}+\frac{(n+1)^2.n^2}{1.2.(2n+2)(2n+1)}t^{n-1}$$
$$-\frac{(n+1)^2n^2(n-1)^2}{1.2.3.2n+2\ldots 2n+1.2n}t^{n-2}+\ldots.$$

Gauss donne ces valeurs par induction et dit que la démonstration en est facile.

Prochainement cette méthode et une application numérique (*).

(*) Voir pour la première démonstration, Prouhet (*N. A.*, t. I, p. 348).

REMARQUES DIVERSES SUR LES NOMBRES PREMIERS ;

Par M. LEBESGUE,
Professeur.

1. Théorème. *On peut toujours trouver tant de nombres consécutifs qu'on voudra qui ne soient pas premiers.*

La démonstration est bien simple et bien connue ; elle peut être présentée ainsi qu'il suit : Si l'on veut avoir au moins $2n$ nombres consécutifs non premiers, on représentera la suite complète des nombres premiers par

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \ldots, \quad p_{i-1}, \; p_i, \; p_{i+1}.$$

Supposons que n tombe entre p_{i-1} et p_i, on fera

$$P = p_0 p_1 p_2 \ldots p_{i-1}.$$

Comme P, p_{i+1}, p_i sont premiers entre eux, on pourra toujours trouver des entiers x, y, z, tels, qu'on ait

$$Px - 1 = p_i y,$$
$$Px + 1 = p_{i+1} z,$$

et il en résultera que les

$$1 + 2(p_i - 1) = 2p_i - 1$$

nombres

$$\begin{array}{ll} & Px - (p_i - 1), \\ (a) & \ldots, Px - 1, \; Px, \; Px + 1, \; Px + 2, \ldots, \\ & Px + (p_i - 1), \end{array}$$

sont composés, et que chaque terme est divisible par un des nombres

$$2, \; 3, \; 5, \ldots, \; p_{i-1}, \; p_i, \; p_{i+1}.$$

Cela résulte des équations données plus haut pour les trois termes moyens

$$Px - 1, \quad Px, \quad Px + 1.$$

D'ailleurs P est divisible par les nombres

$$2, \; 3, \; 5, \; p_{i-1},$$

et il en est de même des nombres consécutifs

$$2, \; 3, \; 4, \; 5, \; 6, \; 7, \; p_i - 1.$$

Ainsi les $2p_i - 1$ nombres (a) sont composés. Comme

$$p_i > n, \quad 2p_i - 1 > 2n - 1,$$

on a plus de $2n$ nombres consécutifs non premiers. Si l'on supprimait dans les nombres (a) les nombres pairs, il resterait $p_i - 1$ nombres impairs

$$Px - (p_i - 2),$$
$$\ldots, \; Px - 1, \quad Px + 1, \ldots,$$
$$Px + p_i - 2,$$

contenant

$$2 \times \frac{p_i - 1}{2} = p_i - 1 \text{ termes}.$$

De là ce théorème de Legendre :

On peut trouver $p_i - 1$ *nombres impairs consécutifs non premiers et divisibles chacun par quelques-uns des nombres*

$$3, \; 5, \; 7, \ldots \; , p_i, \; p_{i+1}$$

Quand on admet des diviseurs quelconques au lieu des diviseurs consécutifs, on obtient des solutions en nombres bien plus petits. On peut d'ailleurs en trouver à l'aide de la Table de Burckhardt. Entre les deux nombres premiers 3029867 et 3029947, dont la différence est 80, il n'y a pas de nombres premiers.

Legendre a cru avoir démontré qu'on ne saurait trouver plus de $p_i - 1$ nombres impairs consécutifs dont chacun fût divisible par quelqu'un des nombres

$$3,\ 5,\ 7,\ldots,\ p_{i+1}.$$

Il n'a fait que donner à la proposition une grande probabilité. Ainsi il n'a point prouvé que la formule

$$Ax + B,$$

où A et B sont premiers entre eux, ou encore que la progression arithmétique

$$B,\quad B+A,\quad B+2A,\quad B+3A,\ldots$$

renferme une infinité de nombres premiers. Cette importante proposition a été démontrée par M. Dirichlet dans un Mémoire extrêmement remarquable (dont M. Terquem a donné la traduction dans le *Journal de Mathématiques*, t. IV, p. 39), et sa méthode lui a donné par suite nombre d'importants théorèmes.

On peut voir dans un article de M. Desboves (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 281) en quoi consiste l'imperfection de la démonstration de Legendre. Cependant comme il n'est pas prouvé que la proposition soit inexacte, et qu'on peut même l'établir rigoureusement pour un petit nombre de diviseurs consécutifs, par exemple pour

$$3,\ 5,\ 7,$$

on peut demander si la chose étant admise pour la suite de diviseurs

$$3,\ 5,\ 7,\ldots,\ p_{i+1},$$

est vraie aussi pour la suite

$$3,\ 5,\ 7,\ldots,\ p_{i+2}.$$

Ainsi M. Gauss ayant vérifié la loi de réciprocité de Legendre jusqu'à une certaine limite, a montré par une réduction à l'absurde que la limite pouvait être reculée, de sorte que la loi s'est trouvée généralement établie.

Cette démonstration très-compliquée a été notablement simplifiée par M. L. Dirichlet dans le tome XLVII du *Journal* de M. Crelle. Quelques propositions de ce Mémoire établissent très-simplement que les formules

$$8x+1, \quad 8x+3, \quad 8x+5, \quad 8x+7$$

renferment une infinité de nombres premiers. M. Serret en a déjà donné une démonstration élémentaire dans le *Journal de Mathématiques*, t. XVII, p. 186.

2. Théorème. *Les formules*

$$4x+1, \quad 4x+3$$

renferment une infinité de nombres premiers.

1°. On ne saurait avoir y^2+1 divisible par un nombre premier $4\alpha+3$, car en supposant que $4\alpha+3$ soit le moindre diviseur de cette forme, on aurait

$$y^2+1=(4\alpha+3)z.$$

Or on peut toujours poser

$$y=(4\alpha+3)n\pm r$$

de manière à avoir r pair inférieur à $4\alpha+3$. De là

$$r^2+1=4k+1=(4\alpha+3)(4n+3),$$

$4n+3$ étant nécessairement inférieur à $4\alpha+3$; or $4n+3$ a nécessairement un diviseur premier de forme $4\beta+3$, inférieur à $4\alpha+3$, ce qui est contre l'hypothèse.

(Cette démonstration est dans le Mémoire cité plus haut.)

2°. Il y a une infinité de nombres premiers $4k+1$; car si $p_1, p_2, \ldots, p_i$ étaient les seuls de cette forme, on aurait

$$N = 4(p_1, p_2, \ldots, p_i)^2 + 1$$

composé et divisible par un nombre premier de forme $4k+1$ et nécessairement autre que l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_i$ qui ne divisent pas N.

3°. Il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$, car si $p_1, p_2, \ldots, p_i$ étaient les seuls nombres de cette forme, on aurait

$$N = 4p_1, p_2, \ldots, p_i + 3$$

composé et ayant un diviseur $4k+3$, autre que l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_i$ qui ne divisent pas N. Cette démonstration est imitée d'Euclide.

TROISIÈME DÉMONSTRATION

De la possibilité de décomposer les fonctions algébriques entières en facteurs réels;

D'APRÈS GAUSS.

(Gotting. t. III, p. 135; 1816.)

1. Soit

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Lx + M;$$

A, B, C,... sont des coefficients réels.

Faisons

$$x = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

on obtient

$$X = t + u\sqrt{-1},$$

$$t = r^m \cos m\varphi + A r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + B r^{m-2} \cos(m-2)\varphi$$
$$+ C r^{m-3} \cos(m-3)\varphi + \ldots + L r \cos\varphi + M,$$

$$u = r^m \sin m\varphi + A r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + B r^{m-2} \sin(m-2)\varphi$$
$$+ C r^{m-3} \sin(m-3)\varphi + \ldots + L r \sin\varphi.$$

Faisons

$$t' = r\frac{dt}{dr},$$

$$u' = r\frac{du}{dr},$$

$$t'' = r\frac{dt'}{dr},$$

$$u'' = r\frac{du'}{dr},$$

$$y = \frac{(t^2 + u^2)(tt'' + uu'') + (tu' + ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(t^2 + u^2)^2};$$

il est évident que r disparaît du dénominateur.

2. Théorème. *Soit* R *une quantité positive déterminée, arbitraire pourtant et plus grande que les quantités*

$$mA\sqrt{2},\quad \sqrt{mB\sqrt{2}},\quad \sqrt[3]{mC\sqrt{2}},\quad \sqrt[4]{mD\sqrt{2}},\ldots$$

abstraction faite des signes; prenant

$$r = R,$$

$tt' + uu'$ *sera une quantité positive, quelque valeur réelle qu'on donne à* φ.

Démonstration. Posons

$$R\cos 45^\circ + AR^{m-1}\cos(45^\circ + \varphi) + BR^{m-2}\cos(45^\circ + 2\varphi)$$
$$+ CR^{m-3}\cos(45^\circ + 3\varphi) + \ldots$$
$$+ LR\cos[45^\circ + (m-1)\varphi]$$
$$+ M\cos(45^\circ + m\varphi) = T.$$

Désignons par U ce que devient T en remplaçant cosinus par sinus,

$$T' = R\frac{dT}{dR}, \quad U' = R\frac{dU}{dR},$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}[R + mA\sqrt{2}\cos(45^\circ + \varphi)], \\ & + \frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}[R^2 + mB\sqrt{2}\cos(45^\circ + 2\varphi)], \\ & + \frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}[R^3 + mC\sqrt{2}\cos(45^\circ + 3\varphi)], \\ & + \frac{R^{m-4}}{m\sqrt{2}}[R^4 + mD\sqrt{2}\cos(45^\circ + 4\varphi)], \\ & + \ldots; \end{aligned}$$

donc, vu les inégalités ci-dessus, T est essentiellement positif, quelque valeur qu'on donne à φ. On démontre de la même manière que T', U et U' sont positifs. Ainsi $TT' + UU'$ est une quantité positive. En faisant $r = R$ dans t, u, t', u', ces expressions deviennent

$$\begin{aligned} & T\cos(45^\circ + m\varphi) + U\sin(45^\circ + m\varphi), \\ & T\sin(45^\circ + m\varphi) - U\cos(45^\circ + m\varphi), \\ & T'\cos(45^\circ + m\varphi) + U'\sin(45^\circ + m\varphi), \\ & T'\sin(45^\circ + m\varphi) - U'\cos(45^\circ + m\varphi), \end{aligned}$$

et $tt' + uu'$ se change en $TT' + UU'$; donc $tt' + uu'$ est une quantité positive, quelle que soit la valeur de φ, en faisant

$$r = R. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc aussi $t^2 + u^2$ devenant $T^2 + U^2$ est une quantité positive en faisant

$$r = R,$$

quelle que soit la valeur de φ; ainsi t et u ne peuvent devenir simultanément nuls tant que $r = R$.

3. Théorème. *Lorsque* r *est compris entre* o *et* R, *et* φ *est compris entre* o *et* 360, *il existe des valeurs de* r *et de* φ *qui rendent simultanément nuls* t *et* u.

Démonstration. Supposons au contraire que dans ces intervalles t et u ne peuvent jamais s'évanouir simultanément. Alors dans ces mêmes intervalles y (p. 135) sera toujours une quantité finie; cette hypothèse mène à une absurdité. En effet, soit la double intégrale

$$\int_0^R \int_0^{360} y dr d\varphi = \Omega;$$

intégrant par rapport à φ, on a indéfiniment

$$\int y d\varphi = \frac{tu' - ut'}{r(t^2 + u^2)} + \text{constante}.$$

Faisant

$$\varphi = 0,$$

u et u' s'évanouissent; donc la constante est nulle en faisant commencer l'intégrale à $\varphi = 0$.

Mais posant

$$\varphi = 360°,$$

u et u' s'évanouissent encore. Donc, dans l'intervalle,

$$\int_0^{360} y d\varphi = 0,$$

quelle que soit la valeur de r. Donc

$$\Omega = 0.$$

On doit obtenir la même valeur en commençant l'intégration par r; alors

$$\int y dr = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2};$$

on n'ajoute pas non plus de constante, l'intégrale commençant à

$$r = 0,$$

et alors

$$t' = 0, \quad u' = 0;$$

donc l'intégrale dans l'étendue de $r = 0$ à $r = R$ se change en $\frac{TT' + UU'}{T^2 + U^2}$, quantité essentiellement positive pour toute valeur de φ (p. 136). Donc Ω n'est pas nul; ce qui établit une contradiction; l'hypothèse est donc inadmissible. Ainsi y ne conserve pas une valeur constamment finie dans les intervalles indiqués.

4. Nous avons vu qu'en remplaçant dans X la valeur de x par

$$x = r(\cos\varphi + \sqrt{1} \sin\varphi),$$

X se change en $t + u\sqrt{-1}$, et de même en $t - u\sqrt{-1}$, en faisant

$$x = r(\cos\varphi - \sqrt{-1} \sin\varphi).$$

Si donc pour des valeurs déterminées de r et de φ, savoir pour

$$r = g, \quad \varphi = G,$$

t et u s'annulent simultanément (l'existence de telles valeurs a été démontrée), alors par la substitution de

$$x = g(\cos G + \sqrt{-1} \sin G)$$

et

$$x = g(\cos G + \sqrt{-1} \sin G),$$

X devient nul et deviendra divisible par

$$x - g(\cos G + \sqrt{-1} \sin G)$$

et par

$$x - g\,(\cos G - \sqrt{-1}\,\sin G);$$

et toutes les fois qu'on n'a pas ni $g = 0$, ni $G = 0$, ces diviseurs sont inégaux et X sera divisible par leur produit

$$x^2 - 2g\cos G\; x + g,$$

et toutes les fois qu'on a soit $\cos G = \pm 1$ ou $G = 0$, les deux facteurs sont identiques, savoir $x - g$. Il est donc certain que X a un diviseur réel, soit du second degré, soit du premier, et comme la même conclusion subsiste pour le quotient, X sera entièrement décomposable en de tels facteurs.

DESCRIPTION MÉCANIQUE DE CERTAINES COURBES;

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques, Répétiteur à l'Institution Favart.

Étant donné un cercle fixe de centre C et un point fixe O, on imagine un rectangle invariable GHKL, emporté par un mouvement uniforme de rotation autour du point O, de sorte que l'axe AB de ce rectangle, égal au diamètre du cercle, passe constamment par ce point, et que les côtés GK et KL restent tangents à la circonférence.

On voit que cette dernière condition impose au rectangle un mouvement de glissement dans le sens de l'axe BA.

Ce mouvement se réalise dans l'industrie en adaptant un mécanisme très-simple au tour ordinaire.

Je fais abstraction du frottement.

§ I.

Je me propose d'abord de déterminer le mouvement d'un point quelconque du plan mobile GHKL.

Je prends, pour origine du temps, l'époque à laquelle le rectangle se trouve dans la position GHKL, et pour origine des coordonnées le point fixe O; les axes rectangulaires seront naturellement Ox et Oy, où OA est l'axe des x.

Soient

$OC = \alpha$,

ω la vitesse angulaire de rotation;

(a, b) les coordonnées OP, PM d'un certain point M par rapport aux axes fixes Ox et Oy, à l'origine du temps;

(x, y) les coordonnées du même point devenu M' par rapport aux mêmes axes, à l'époque t.

Soit G'H'K'L' la position du rectangle à cette époque t; si alors les coordonnées du point M' par rapport aux axes mobiles ox' et oy' sont (x', y'), on aura les formules

$$x = x' \cos\omega t - y' \sin\omega t,$$
$$y = x' \sin\omega t + y' \cos\omega t.$$

Or il est facile d'avoir x' et y'. En effet

$$a = \text{OP}, \quad b = \text{MP},$$
$$x' = \text{OP}', \quad y' = \text{M}'\text{P}';$$

M' étant la position du point M à l'époque t. Or la distance du point à l'axe des abscisses n'a pas changé pendant le mouvement; donc

$$y' = \text{M}'\text{P}' = \text{MP} = b.$$

L'équation du cercle par rapport aux axes Ox et Oy étant

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \text{R}^2,$$

devieudra, en la rapportant aux axes ox' et oy',

$$x'^2 + y'^2 - 2\alpha(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t) + \alpha^2 = R^2.$$

Soit OA′ l'abscisse d'une tangente parallèle à l'axe oy'. Faisons dans cette équation

$$x' = OA',$$

et exprimons que les deux racines sont égales; on aura

$$OA' = \alpha\cos\omega t + R.$$

Or pendant le mouvement, on a toujours

$$PA = P'A'$$

ou

$$a + R - a = \alpha\cos\omega t + R - x';$$

donc

$$x' = a - \alpha + \alpha\cos\omega t.$$

Les lois du mouvement du point M seront donc données par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x = (a - \alpha)\cos\omega t - b\sin\omega t + \alpha\cos^2\omega t, \\ y = (a - \alpha)\sin\omega t + b\cos\omega t + \alpha\sin\omega t\cos\omega t, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(2)\quad \begin{cases} y\sin\omega t + x\cos\omega t = a - \alpha + \alpha\cos\omega t, \\ y\cos\omega t - x\sin\omega t = b. \end{cases}$$

L'élimination de t entre les équations (2) nous conduira à l'équation de la courbe décrite par le point M dans son mouvement

$$(3)\quad \begin{cases} [x(x-a) + y^2]^2 = (x^2 + y^2)[(a-\alpha)^2 + b^2] \\ + 2\alpha b[(a-\alpha)y - bx] + \alpha^2 b^2; \end{cases}$$

l'hypothèse $\alpha = 0$ donne un cercle; résultat qu'on pouvait prévoir.

En faisant

$$b = 0 \quad \text{et} \quad a = \alpha,$$

on voit que le point C décrit un cercle dont le diamètre est

$$OC = \alpha.$$

Si le point m est sur l'axe des x, c'est-à-dire si $b = 0$, l'équation de la courbe en coordonnées polaires sera

$$r = \alpha \cos\theta \pm (a - \alpha);$$

c'est l'équation du limaçon de Pascal.

Il faut prendre le signe $+$, car pour $t = 0$ on doit avoir

$$x = r\cos\theta = a,$$
$$y = r\sin\theta = 0,$$

et, par conséquent,

$$r = a \quad \text{pour} \quad \theta = 0.$$

Si l'on prend toujours sur l'axe Ox deux points dont les abscisses soient respectivement a et $a + 2\alpha$, ces deux points décriront la même courbe; mais pour les superposer, il faudra tourner l'une d'elles de 180 degrés.

Je bornerai à ces quelques mots la discussion de ce problème, pour envisager le mouvement sous un autre point de vue.

§ II.

Imaginons un second rectangle $ghkl$ animé d'un mouvement semblable au mouvement défini au commencement de cet article et autour d'un nouveau cercle; le centre du nouveau cercle fixe étant en c, et le centre de rotation en o, un crayon est fixé en un certain point μ du deuxième plan mobile $ghkl$, perpendiculairement à ce plan; il s'agit de trouver la courbe que le crayon décrira sur le premier plan mobile GHKL.

Je suppose qu'à l'origine du temps les deux rectangles ont les positions respectives GHKL et *ghkl*.

Je suppose encore les deux plans parallèles ; et même, pour résoudre la question, on peut regarder les deux plans mobiles comme situés dans un seul et même plan.

Un point fixe (a, b) du premier plan GHKL occupera à l'époque t, par rapport aux axes fixes Ox et Oy, tracés dans le plan du cercle C, une position (x, y) déterminée par les formules

$$(4)\quad \begin{cases} y \sin \omega t + x \cos \omega t = a - \alpha + \alpha \cos \omega t, \\ y \cos \omega t - x \sin \omega t = b, \end{cases}$$

d'après les conclusions du § I.

Un point fixe (a', b') du deuxième plan *ghkl* occupera à l'époque t par rapport aux axes $o\xi$ et $o\eta$, une position (ξ, η) déterminée par les formules

$$(5)\quad \begin{cases} \eta \sin \Omega t + \xi \cos \Omega t = a' - \beta + \beta \cos \Omega t, \\ \eta \cos \Omega t - \xi \sin \Omega t = b', \end{cases}$$

Ω étant la vitesse angulaire de rotation de ce deuxième système et $\beta = oc$.

Or si (p, q) sont les coordonnées de o par rapport aux axes Ox et Oy, (m, n) les coordonnées du point (a', b') ou μ par rapport à ces mêmes axes, et (X, Y) les coordonnées par rapport à Ox, Oy du point (ξ, η), on aura

$$\xi = X - p, \quad a' = m - p,$$
$$\eta = Y - q, \quad b' = n - q,$$

les formules (5) deviendront

$$(6)\quad \begin{cases} (Y - q) \sin \Omega t + (X - p) \cos \Omega t = m - p - \beta + \beta \cos \Omega t, \\ (Y - q) \cos \Omega t - (X - p) \sin \Omega t = n - q. \end{cases}$$

Ces équations donneront à l'époque t la position (X, Y)

du point fixe (m, n) du deuxième plan par rapport aux axes Ox et Oy.

Les équations (4) déterminent les coordonnées (x, y) à l'époque t du point du plan mobile GHKL qui avait pour coordonnées (a, b) à l'origine du mouvement, par rapport aux axes fixes Ox et Oy tracés dans le plan du cercle C.

Si l'on change x et y en a et b et réciproquement, on aura les équations suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} b\cos\omega t - a\sin\omega t = y, \\ b\sin\omega t + a\cos\omega t = x - \alpha + \alpha\cos\omega t, \end{cases}$$

qui déterminent les coordonnées *primitives* (x, y) du point mobile qui est en (a, b) à l'époque t ; les coordonnées (a, b) étant rapportées aux axes fixes Ox et Oy tracés dans le plan du cercle; les coordonnées (x, y) étant rapportées aux axes Ox_1 et Oy_1 tracés dans le plan GHKL, fixes dans ce plan, mais mobiles avec lui. Si pour point (a, b) on prend (X, Y), les coordonnées (x, y) représentent la position *primitive* (par rapport aux axes Ox et Oy) et *actuelle* (par rapport aux axes Ox_1 Oy_1) du point qui, à l'époque t, se trouve sous le crayon (m, n).

Donc en associant les équations (7) et les suivantes :

$$(8)\quad \begin{cases} (b-q)\sin\Omega t + (a-p)\cos\Omega t = m - p - \beta \\ \qquad\qquad + \beta\cos\Omega t, \\ (b-q)\cos\Omega t - (a-p)\sin\Omega t = n - q, \end{cases}$$

et en éliminant a, b et t, on obtient la courbe décrite par le crayon, fixé en (m, n), sur le plan mobile GHKL et rapportée aux axes mobiles Ox_1 et Oy_1 tracés dans ce plan, qui coïncident avec les axes fixes Ox et Oy à l'origine du mouvement; et, par conséquent, si l'on veut seulement connaître la nature et la forme de cette courbe,

rien ne s'oppose à ce qu'on prenne pour axes Ox et Oy. Éliminons d'abord a et b entre ces équations, on trouvera

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &(n-q)\cos kt + (m-p-\beta)\sin kt \\ &+\beta\cos\Omega t \sin kt = y - q\cos\omega t + p\sin\omega t \\ &-(n-q)\sin kt + (m-p-\beta)\cos kt \\ &+\beta\cos\Omega t\cos kt = x - \alpha + \alpha\cos\omega t \\ &- q\sin\Omega t - p\sin\omega t, \end{aligned}\right.$$

où

$$k = \Omega - \omega.$$

En éliminant t entre ces deux équations, on aura la courbe cherchée.

La discussion de ces équations présente des cas nombreux et intéressants.

I.

$$\Omega = 0.$$

Le deuxième plan *hgkl* est immobile, on a donc la courbe décrite par un crayon présenté au point (m, n) sur le plan HGKL.

Cette hypothèse introduite dans les équations (9) donne

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &m\cos\omega t - m\sin\omega t = y, \\ &n\sin\omega t + m\cos\omega t = x - \alpha + \alpha\cos\omega t. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de t conduit à l'équation de la courbe décrite

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &[(m-\alpha)^2 + n^2]y^2 + 2\alpha n(x-\alpha)y \\ &+ (m^2+n^2)(x-\alpha)^2 = [m(m-\alpha)+n^2]^2. \end{aligned}\right.$$

On voit que c'est une ellipse dont le centre est en C.

C'est en effet le moyen employé par les tourneurs pour décrire des ellipses.

Examinons quelques cas particuliers.

Si l'on suppose $n = 0$, on a une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Cx et CY; le grand axe est dirigé suivant CY tant que $m > \frac{\alpha}{2}$; il est dirigé suivant Cx. lorsque $m < \frac{\alpha}{2}$.

Si l'on a, en même temps que $n = 0$,

$$m = 2\alpha,$$

le grand axe est double du petit;

$$m = \alpha,$$

le crayon décrit une droite égale à 2α suivant l'axe CY:

$$m = \frac{\alpha}{2},$$

la courbe décrite est un cercle qui a pour rayon $\frac{\alpha}{2}$;

$$m = 0,$$

le crayon décrit une droite égale à 2α suivant l'axe Cx;

$$m = -\frac{\alpha}{2},$$

le grand axe est triple du petit.

Revenons à l'équation générale (11).

Si l'on prend deux points qui aient respectivement pour coordonnées (m, n) et $(\alpha - m, n)$, les deux ellipses décrites seront égales, mais inversement disposées.

Si $m = \frac{\alpha}{2}$, l'ellipse a ses axes dirigés suivant les bissectrices des angles YCx. Si en même temps

$$n = \pm \frac{\alpha}{2},$$

le crayon décrira suivant les bissectrices deux droites de longueur 2α.

II.

$$\beta = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

On a alors un plan tournant autour du point O; il s'agit de trouver la courbe décrite sur le plan CHKL par un crayon fixé au point (m, n) sur le premier plan $ghkl$.

Introduisons ces hypothèses dans les équations (9) et éliminons t; on trouve

$$(12)\quad y = \rho \sin\left\{\gamma + \frac{\Omega - \omega}{\omega} \operatorname{arc}\left[\cos = \frac{-(x-\alpha) \pm \sqrt{\rho^2 - y^2}}{\alpha}\right\}\right];$$

$$m = \rho \cos\gamma, \quad n = \rho \sin\gamma.$$

Cette formule peut se transformer dans la suivante :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} x - \alpha = \pm\sqrt{\rho^2 - y^2} \\ \quad - \alpha \cos\left\{\dfrac{\omega}{\Omega - \omega}\left[-\gamma + \operatorname{arc}\left(\sin = \dfrac{y}{\rho}\right)\right]\right\}. \end{array}\right.$$

Si l'on remonte aux équations qui ont servi pour l'élimination, on en déduira (en remarquant qu'on doit avoir en même temps

$$t = 0, \quad x = m, \quad y = n)$$

que le radical $\sqrt{\rho^2 - y^2}$ ne doit entrer qu'avec le signe $+$ dans les équations (12) et (13).

Si $m = 0$ et $n = 0$, le crayon décrira suivant l'axe des x une longueur égale à 2α.

Examinons quelques cas correspondants aux différentes valeurs du rapport $\frac{\Omega}{\omega}$.

1°.

$$\Omega = \omega.$$

Le crayon décrira une droite égale à 2α parallèle à l'axe des x, et à une distance n de cet axe.

2°.

$$\Omega = 2\omega.$$

La courbe décrite aura pour équation

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &[(m-\alpha)^2 + n^2]\,y^2 + 2\alpha n\,(x-\alpha)\,y \\ &+ (m^2+n^2)\,(x-\alpha)^2 = [m\,(m-\alpha) + n^2]^2. \end{aligned} \right.$$

En comparant cette équation avec l'équation (11), on voit que l'ellipse décrite au moyen de ce mécanisme lorsque

$$\Omega = 2\omega,$$

est égale à l'ellipse décrite par un crayon présenté au point (m, n) à l'origine du mouvement, et qu'elle a la même position dans le plan GHKL ; on reproduira toutes les variétés examinées à cette occasion.

3°.

$$\omega = 2\Omega.$$

Cette hypothèse permet de transformer immédiatement l'équation (13) qui prend alors la forme suivante :

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} x - \alpha = {} & \frac{\rho^4 - 4\alpha mny}{\rho^4}\sqrt{\rho^2 - y^2} \\ & + \frac{\alpha\,(m^2-n^2)}{\rho^4}\,(\rho^2 - 2y^2), \end{aligned} \right.$$

où

$$\rho^2 = m^2 + n^2.$$

4°.

$$\Omega = -\omega.$$

Dans ce cas, la formule (13) devient

$$(16)\quad x - \alpha = \sqrt{\rho^2 - y^2} - \frac{\alpha}{2\rho}\left[\begin{aligned} &\sqrt{(\rho+m)\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - y^2}\right)} \\ &+ \sqrt{(\rho-m)\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - y^2}\right)} \end{aligned} \right].$$

Si l'on a égard aux formules

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

où

$$C = \sqrt{A^2 - B},$$

on aura

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} x - \alpha = \sqrt{\rho^2 - y^2} - \frac{\alpha}{2\rho} \\ \times \left[\begin{aligned} (\sqrt{\rho + m} + \sqrt{\rho - m}) \sqrt{\frac{\rho + y}{2}} \\ + (\sqrt{\rho + m} - \sqrt{\rho - m}) \sqrt{\frac{\rho - y}{2}} \end{aligned} \right]; \end{aligned} \right.$$

les radicaux étant pris avec les signes dont ils sont affectés. Sous cette forme, l'équation de la courbe se prête à une discussion facile.

Lorsque

$$\Omega = i\omega,$$

i étant un nombre entier positif ou négatif, l'équation (13) devient algébrique ; mais je me dispenserai de reproduire les calculs, qui me semblent fort compliqués.

III.

$$\beta = 0.$$

On a un plan tournant uniformément autour du point fixe (p, q) ; il s'agit de trouver la courbe décrite sur le plan mobile GHKL par un crayon fixé au point (m, n) sur le premier plan.

On a les équations suivantes entre lesquelles il faut éli-

miner la variable t,

$$(18)\quad \begin{cases} (n-q)\cos(\Omega-\omega)t + (m-p)\sin(\Omega-\omega)t \\ = y - q\cos\omega t + p\sin\omega t \\ -(n-q)\sin(\Omega-\omega)t + (m-p)\cos(\Omega-\omega)t \\ = x - \alpha + \alpha\cos\omega t - q\sin\omega t - p\cos\omega t. \end{cases}$$

On pourrait effectuer l'élimination de t, mais les calculs seraient fort compliqués. Je me contenterai d'examiner les cas particuliers les plus simples.

1°.

$$m = p, \quad n = q.$$

On arrive au même résultat qu'en présentant un crayon au point (p, q) à l'origine du mouvement sur le plan HGKL, ce que l'on voit à priori.

2°.

$$q = 0, \quad p = \alpha.$$

Le centre de rotation du plan *ghkl* est au point C. L'élimination de t conduit à l'équation suivante :

$$(19)\quad x - \alpha = r\cos\left\{\gamma + \frac{\Omega-\omega}{\omega}\operatorname{arc}\left[\sin = \frac{-y+\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}{\alpha}\right]\right\},$$

où l'on a posé

$$m - \alpha = r\cos\gamma,$$
$$n = r\sin\gamma,$$

équation qui a une grande analogie avec l'équation (12) et qu'on peut soumettre aux mêmes hypothèses et aux mêmes transformations.

3°.

$$\Omega = \omega.$$

On est conduit à l'équation

$$(20)\quad \begin{cases} [(p-\alpha)^2 + q^2]Y^2 + 2\alpha q XY + (p^2+q^2)X^2 \\ = [p(p-\alpha) + q^2]^2, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$X = x - \alpha - (m - p),$$
$$Y = y - (n - q).$$

Remarquons que la grandeur de l'ellipse ne dépend que de la position du centre de rotation (p, q) ; et quelle que soit la position du crayon en (m, n), on décrira toujours la même ellipse pour les mêmes valeurs de p et q ; il n'y aura de variable que le centre de la courbe et la direction de ses axes.

Si $q = 0$, l'ellipse se trouve rapportée à ses axes.

4°.

$$\Omega = 2\omega.$$

L'équation de la courbe décrite sera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &[(n - 2q)^2 + (m - \alpha)^2]\,y^2 \\ &+ 2[4pq + n\alpha - 2qm - 2pn]\,y(x - \alpha) \\ &+ [n^2 + (m - 2p)^2](x - \alpha)^2 \\ &= [n(n - 2q) + (m - \alpha)(m - 2p)]^2. \end{aligned}\right.$$

Dans ce cas, la grandeur de l'ellipse dépend de la position du centre de rotation et de la position du crayon.

Lorsque

$$m = 2p \quad \text{et} \quad n = 2q,$$

on a une droite dont l'équation est

$$y = \frac{2q}{2p - \alpha}(x - \alpha),$$

et dont la longueur est

$$2\sqrt{(2p - \alpha)^2 + 4q^2}.$$

Les valeurs

$$n = 0,$$
$$m = 2p,$$

ou

$$n = 2q,$$
$$m = \alpha$$

donnent les droites

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \alpha.$$

Lorsque le centre de rotation (p, q) est quelconque, et qu'on place le crayon en un point déterminé par les valeurs

$$\left(m = p + \frac{\alpha}{2}, \quad n = q\right),$$

la courbe décrite sera un cercle qui a pour équation

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = \left(p - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2.$$

Si on laisse la position (m, n) du crayon arbitraire, on aura un cercle lorsque le centre de rotation aura pour coordonnées

$$q = 0,$$
$$p = \frac{\alpha}{2}$$

ou

$$q = n,$$
$$p = m - \frac{\alpha}{2}.$$

Dans ces deux cas, qui sont les seuls, le cercle aura pour équation

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = n^2 + (m - \alpha)^2.$$

IV.

Abordons le cas général où la quantité β n'est pas nulle. La solution de la question sera donnée par les équations (9).

Laissant de côté un certain nombre de cas où l'élimination est possible, mais compliquée, je n'examinerai que deux hypothèses particulières.

1°.

$$2p = \alpha, \quad q = 0.$$

On trouve

$$\cos 2\omega t = \frac{-(m - \alpha - \beta) + \sqrt{y^2 + (x - \alpha)^2 - n^2}}{\beta}.$$

Il est alors facile d'avoir l'équation de la courbe et de discuter les différents cas relatifs aux hypothèses qu'on peut faire sur les paramètres m, n et β.

2°.

$$\Omega = \omega.$$

La courbe décrite est une ellipse qui a pour équation

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} [q^2 + (p - \alpha + \beta)^2] Y^2 + 2q(\alpha - \beta) XY \\ + (p^2 + q^2) X^2 = [q^2 + p(p - \alpha + \beta)]^2, \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$X = x - \alpha + \beta - (m - p),$$
$$Y = y - (n - q).$$

La grandeur de ces ellipses ne dépend que de la position du centre de rotation (p, q) et des paramètres α et β.

Si $\alpha = \beta$, on a un cercle dont le rayon est constant pour toutes les valeurs de m et n. Si $p = 0$ et $q = 0$, ce cercle se réduit à un point.

Ne voulant pas donner trop d'extension à cet article, je n'entrerai pas dans plus de détails sur ces questions.

Note du Rédacteur. Familiarisé avec les considérations cynématiques et les procédés de la géométrie descriptive, le savant professeur se propose de publier une

nouvelle édition de l'*Art du tourneur* de Bergeron. Sorti de mains si habiles, un tel ouvrage sera recherché par les artistes, les technologues et les géomètres.

QUESTIONS.

321. Dans un hexagone *gauche* ayant les côtés *opposés* égaux et parallèles, les milieux des côtés sont dans un même plan.

322. Dans un polygone *gauche* d'un nombre *pair* de côtés, ayant les côtés opposés égaux et parallèles, les droites qui joignent les sommets opposés et celles qui joignent les milieux des côtés opposés passent par un seul et même point.

323. Deux cercles étant dans un même plan et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.

THÉORÈMES SUR LES ERREURS RELATIVES;

Par M. JAUFROID,
Professeur à Toulon.

On démontre que si sur la gauche d'un nombre on prend un certain nombre de chiffres à partir du premier chiffre significatif, en remplaçant par des zéros les unités des différents ordres qu'on néglige, on fait une erreur relative plus petite qu'une fraction ayant pour numéra-

teur l'unité et pour dénominateur le premier chiffre significatif à gauche suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres conservés moins un, et dans tous les cas plus petits qu'une décimale d'un ordre marqué par le nombre des chiffres conservés moins un, et plus petite qu'une demi-décimale de ce même ordre si le premier chiffre significatif à gauche est différent de l'unité.

Ce que nous voulons remarquer, c'est que ces trois limites existent encore lorsqu'on force l'unité sur le premier chiffre conservé à droite; cela tient à ce que l'erreur absolue a la même limite supérieure que dans le premier cas.

En effet, soit 63,789; on prend 63,8, on a

$$\text{erreur absolue} = 0,011 < 1 \text{ dixième},$$

$$\text{erreur relative} = \frac{0,011}{63,789} < \frac{1 \text{ dixième}}{600 \text{ dixièmes}} < \frac{1}{600},$$

d'où l'on tire les trois limites citées précédemment.

Cette remarque sert à établir le théorème suivant :

Si N' représente un nombre N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$, par exemple, et *en moins*, on pourra dans le développement de N' s'arrêter au quatrième chiffre significatif à gauche en le forçant d'une unité, et on aura encore le nombre N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

Soit 37,4875 la valeur de N approchée en moins avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$. On a

$$37,4875 < N < 37,4875 + \frac{N}{1000}.$$

Mais, d'après la remarque faite précédemment, si sur la

gauche de 37,4875 je prends les quatre premiers chiffres significatifs en forçant le dernier d'une unité, le nombre 37,49 représente 37,4875 avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus; on a donc

$$37,4875 < 37,49 < 37,4875 + \frac{37,4875}{1000},$$

à fortiori

$$37,4875 < 37,49 < 37,4875 + \frac{N}{1000},$$

car on a

$$N > 37,4875$$

par hypothèse.

Il suit de là que les deux nombres N et 37,49 sont compris entre deux limites qui diffèrent de $\frac{N}{1000}$; ils diffèrent donc entre eux de moins de $\frac{N}{1000}$, c'est-à-dire que 37,49 représente N avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

Application. Calculer avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$ le carré du rayon du cercle dont la surface est $\sqrt{2}$.

On a

$$R^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3,141 est en moins le dividende avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$.

1,4142 étant les cinq premiers chiffres de $\sqrt{2}$, 1,4143

est en plus le diviseur avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{10000}$, à fortiori plus petite que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$.

On a donc pour R^2, en moins et avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, la fraction $\frac{3,141}{1,4143}$,

On trouve pour les quatre premiers chiffres de son développement 2,220; donc 2,221 représente le carré du rayon avec une erreur relative plus petite que $\frac{1}{1000}$, mais en plus ou en moins.

SOLUTION DE LA QUESTION 318 (CHASLES);

PAR M. FÉLIX LUCAS,
Élève de l'École Polytechnique.

1°. La courbe à double courbure du quatrième ordre provenant de l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles, est telle, que la somme des distances de chacun de ses points aux sommets des deux cônes, multipliés respectivement par des constantes, est constante. Cette courbe, comme les ovales de Descartes, a un troisième foyer.

Considérons les axes comme verticaux.

Lemme. La courbe d'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux est sur un troisième cône de révolution dont l'axe est aussi vertical (*voir* plus bas).

En coupant les deux cônes par le plan de leurs axes, j'obtiens deux couples de droites (A, B), (A', B') également inclinées sur la verticale. Je regarde ces droites comme côtés opposés d'un quadrilatère dont je construis

les diagonales A″ et B″. Il est facile de reconnaître, d'après les propriétés du quadrilatère, que A″ et B″ sont également inclinés sur la verticale (*Géom. sup.*, n° 348) : je puis donc les regarder comme la section méridienne d'un cône circulaire droit et vertical. Or les trois cônes (A, B), (A′, B′), (A″, B″) se coupent deux à deux suivant la même courbe.

Pour le prouver, menons un plan horizontal quelconque, et désignons par LT sa trace sur le tableau. Les six droites A, B, A′, B′, A″, B″ coupent LT aux points (a, b), (a', b'), (a'', b'') qui forment trois couples en involution, puisque ces droites sont les côtés et les diagonales d'un quadrilatère (*Géom. sup*, n° 339). Les cercles décrits sur les diamètres a, b, a', b', a'', b'' dans le plan horizontal représentent les sections faites par ce plan dans les trois cônes; mais à cause de l'involution des six points, ces trois cercles ont une corde commune (*Géom. sup*, n° 302); les extrémités de cette corde sont les intersections de notre plan horizontal avec la courbe d'intersection de deux quelconques des trois cônes.

Comme cela a lieu quel que soit le plan horizontal que l'on considère, on en conclut que les trois cônes se coupent deux à deux suivant la même courbe.

Cela posé, j'appelle

S et S′ les sommets des deux cônes donnés;

S″ le sommet du cône auxiliaire;

α, α', α'' les demi-angles au sommet des trois cônes;

d et d_1 les distances verticales S, S′ et S, S″.

Si je coupe les trois cônes par un plan horizontal mené à la distance variable h du point S, les points de la courbe commune aux trois cônes que contiendra ce plan ont pour distances aux trois sommets les longueurs

$$\delta = \frac{h}{\cos\alpha}, \quad \delta' = \frac{h-d}{\cos\alpha'}, \quad \delta'' = \frac{h-d_1}{\cos\alpha''}.$$

On a donc

$$\delta - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\delta' = \frac{d}{\cos\alpha},$$

$$\delta - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}\delta'' = \frac{d_1}{\cos\alpha},$$

$$\delta' - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha'}\delta'' = \frac{d_1 - d}{\cos\alpha'},$$

et, par conséquent, les trois sommes

$$\delta - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\delta', \quad \delta - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}\delta'', \quad \delta' - \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha'}\delta'',$$

sont constantes quel que soit h, c'est-à-dire constantes pour tous les points de la courbe.

On conclut de là que S, S', S'' sont les trois foyers de la courbe.

2°. Le lemme sur lequel je m'appuie est une conséquence du théorème suivant:

Quand deux cônes du deuxième degré ont une direction cyclique commune et leurs axes (lieux des centres des sections circulaires) situés dans un même plan, leur courbe d'intersection peut être placée sur un troisième cône du deuxième degré ayant son axe dans le plan de leurs axes, et un de ses plans cycliques parallèles à leur direction cyclique commune.

L'axe de ce nouveau cône s'obtient en joignant le point de concours des axes des deux cônes donnés au point d'intersection des deux diagonales du quadrilatère qui résulte des sections faites dans les deux cônes par le plan de leurs axes; et ces deux diagonales sont elles-mêmes la section du cône auxiliaire par le plan dont nous parlons.

SUR LES Nos 170 ET 652 DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE;

PAR M. DE JONQUIÈRES.

Si deux rayons A*m*, B*m* pivotent autour de deux points fixes A et B d'un cercle en se coupant constamment en un point *m* de la circonférence, ils marquent sur une tangente au cercle deux divisions homographiques dont les deux *points doubles* coïncident avec le point de contact de la tangente.

Si l'on fait la perspective de la figure de manière que ce point de contact passe à l'infini, le cercle devient une hyperbole et la tangente une asymptote. Les deux divisions homographiques ont leurs points doubles coïncidents à l'infini. Donc (170):

Si deux rayons Am, Bm *pivotent autour de deux points fixes d'une hyperbole, en se coupant constamment en un point* m *de la courbe, le segment qu'ils interceptent sur une asymptote a une longueur constante.*

On en déduit un mode de génération de l'hyperbole et un moyen de construire la tangente au point A ou au point B.

2°. On a (*Géom. sup.*, n° 652) ce théorème général:

Si l'on a des angles (A, A'), (B, B'), (C, C'), etc., *tous de même grandeur et formés dans le même sens de rotation à partir de leurs origines, mais placés d'une manière quelconque, leurs côtés forment sur la droite située à l'infini deux divisions homographiques.*

Supposons que tous les premiers côtés de ces angles A, B, C, etc., passent par un point fixe P, ces côtés marqueront, sur une transversale quelconque L, une divi-

sion homographique à celle qu'ils marquent sur la droite de l'infini. Supposons encore que les sommets a, b, c, etc., des angles, au lieu d'être situés d'une manière quelconque, soient sur cette transversale L; ils y forment, comme on vient de le dire, une division homographique à celle que les côtés A, B, C, etc., forment sur la droite de l'infini, donc aussi homographique à celle formée à l'infini par les seconds côtés A', B', C', etc., qui joignent, deux à deux, les points homologues de deux divisions homographiques décrites, l'une sur L, l'autre sur la droite de l'infini enveloppant une conique (n° 549).

Quand le sommet de l'angle mobile est à l'infini sur L, le second côté M' est tout entier à l'infini. Or le côté est une tangente; donc la conique est une parabole qui est évidemment tangente à L. On a ainsi une démonstration extrêmement simple de ce théoreme connu : *Si le sommet d'un angle de grandeur constante parcourt une droite, pendant qu'un de ses côtés tourne autour d'un point fixe, son autre côté enveloppe une parabole tangente à la droite parcourue par le sommet de l'angle.*

PROBLÈME SUR SEPT PLANS;

PAR M. POUDRA.

Lemme. Par une droite et six points faire passer un hyperboloïde.

Désignons la droite par L et les six points par les lettres a, b, c, d, e, f.

Par la droite L et les cinq points a, b, c, d, e faisons passer cinq plans. En les coupant par un plan quelconque, on obtiendra un faisceau de cinq droites.

Joignons le point f aux points a, b, c, d, nous aurons

quatre droites qu'on peut considérer comme les arêtes d'un cône. Coupons ce cône par un plan, nous aurons quatre points de sa base. On fera passer par ces quatre points une section conique telle, qu'un point de cette courbe joint à ces quatre points donne un faisceau de quatre droites homographiques avec le faisceau des quatre premiers plans ci-dessus passant par la droite L et par *a*, *b*, *c*, *d*. Cette courbe sera la base du cône.

Formons de même un second cône ayant même sommet *f*, et faisons la même opération que ci-dessus, en prenant les points *a*, *b*, *c*, *e*.

Les deux cônes de même sommet *f*, ayant trois arêtes *fa*, *fb*, *fc* communes, se couperont en une seule et même arête qui sera telle, que les plans passant par cette droite et par les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* formeront un faisceau homographique avec celui qui passe par L et les mêmes points; donc, d'après un théorème connu, les plans de ces deux faisceaux se couperont respectivement suivant un hyperboloïde passant par les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et par la droite L. Le problème est donc résolu.

Corollaire. Si, en conservant la droite L et les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, on fait varier le point *f*, on obtiendra pour chaque position un hyperboloïde différent et qui tous auront en commun les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et la droite L.

On peut en conclure que si deux hyperboloïdes ont cinq points communs, ils se coupent encore suivant une seule et même droite.

Problème. *On donne sept points sur une droite formant une division quelconque. On donne dans l'espace sept plans. On demande de déterminer une transversale qui soit coupée par les sept plans en sept points formant sur cette droite une division homographique à la première.*

Ce problème me semble difficile à attaquer par l'analyse. En voici une solution géométrique fondée sur les notions des fonctions anharmoniques.

Par une transformation polaire, on peut substituer à cette question la suivante :

On donne un faisceau de sept plans désignés par A, B, C, D, E, F, G passant par conséquent par une même droite L; on donne dans l'espace sept points désignés par *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. On demande de faire passer par ces sept points un faisceau de sept plans homographiques au faisceau donné.

Considérons d'abord les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et cherchons le lieu géométrique d'une droite telle, que les six plans passant par cette droite et les six points forment un faisceau homographique à celui qui passe par la droite L et par les six plans A, B,..., F. Ce lieu sera évidemment un hyperboloïde passant par ces six points.

Pour déterminer cet hyperboloïde, prenons un des points *a* pour le sommet d'un cône passant par les quatre points *b*, *c*, *d*, *e*; coupons les quatre arêtes *ab*, *ac*, *ad*, *ae* par un plan quelconque, nous aurons quatre points par lesquels nous ferons passer une conique telle, qu'un point de cette courbe jointe à ces quatre points donne un faisceau de quatre droites homographiques avec celui des quatre plans B, C, D, E. On regardera cette section conique comme la base d'un cône de sommet *a* et passant par les points *b*, *c*, *d*, *e*.

Déterminons ensuite un deuxième cône de même sommet *a* et faisons la même opération, mais en prenant les points *b*, *c*, *d*, *f*.

Les deux cônes de même sommet *a* ayant trois arêtes communes *ab*, *ac*, *ad*, se couperont suivant une autre et unique arête qui sera telle, que les plans passant par les cinq points *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et par cette droite formeront

un faisceau homographique avec celui qui est formé par les cinq plans B, C, D, E, F.

Par cette droite, menons encore un sixième plan, et tel, que les six plans forment un faisceau homographique à celui des six plans A, B, C, D, E, F. Ce sixième plan sera le plan tangent à l'hyperboloïde en un point de cette droite.

Par un autre point *f* de ceux donnés, déterminons de même la droite par laquelle faisant passer six plans par les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ils forment un faisceau aussi homographique à celui formé par ceux A, B, C, D, E, F et, par conséquent, au faisceau formé ci-dessus. Or les deux faisceaux de plans étant homographiques, il en résultera que leurs plans respectifs se rencontreront deux à deux suivant les génératrices de l'hyperboloïde cherché. Pour avoir d'autres génératrices de cette surface, il suffira de faire passer par les axes de ces deux faisceaux une suite de couples de plans homographiques.

On peut construire de même un deuxième hyperboloïde passant par les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *g* et tel, que les six plans passant par une quelconque de ses arêtes et par ces six points forment un faisceau homographique à celui des six plans A, B, C, D, E, G.

On aura alors deux hyperboloïdes ayant de commun les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Ils se couperont suivant une seule et même génératrice qui sera l'axe du faisceau cherché (lemme) qui doit passer par les sept points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* et être homographique à celui des sept plans A, B, C, D, E, F, G.

SUR LES QUATRE SYSTÈMES DE COORDONNÉES ASTRONOMIQUES.

Extrait de l'*Astronomie sphérique* de Brünnow (*).

1er SYSTÈME. — HAUTEUR ET AZIMUT.

1°. *Deux coordonnées sphériques rectangulaires.*

Par l'astre et le zénith du lieu d'observation, on fait passer un grand cercle nommé *cercle vertical* de l'astre; la portion de cet arc (moindre que 180 degrés) comprise entre l'astre et le zénith se nomme distance *zénithale*, et la portion entre l'astre et l'horizon est la *hauteur* de l'astre : ces deux distances font toujours ensemble 90 degrés. Par le zénith et l'axe du monde, on fait passer un grand cercle qui coupe l'horizon en deux points *nord* et *sud*. L'arc de l'horizon compris entre le point sud et le cercle vertical de l'astre est l'*azimut* de l'astre. Cet azimut se compte de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre, de gauche à droite en regardant le nord.

Observation. On a des instruments pour mesurer à la fois la hauteur et l'azimut, d'autres pour les hauteurs seulement; ce sont des quarts de cercles, des sextants ou des cercles entiers; les instruments avec lesquels on ne mesure que les azimuts se nomment *théodolites*.

(*) Actuellement professeur à l'université du Michigan en Amérique. La traduction de son ouvrage est terminée.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'horizon est celui des x, y ; la partie *positive* de l'axe des x est dirigée vers l'origine des azimuts, et la partie *positive* de l'axe des y vers l'azimut de 90 degrés; la partie *positive* de l'axe des z vers le pôle nord. On a

$$x = \cos h \cos A, \quad y = \cos h \sin A, \quad z = \sin h,$$

où h est la hauteur de l'astre et A son azimut.

2ᵉ SYSTÈME. — ANGLE HORAIRE ET DÉCLINAISON.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Un grand cercle passant par l'astre et l'axe du monde se nomme *cercle horaire;* le grand cercle qui passe par l'axe du monde et le zénith se nomme *méridien;* l'angle formé par ces deux plans est l'*angle horaire* de l'étoile: il se compte à partir du méridien de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre. La partie du cercle horaire comprise entre l'astre et l'équateur est la *déclinaison* de l'astre, et la partie entre l'astre et le pôle nord est la *distance polaire* de l'astre. La déclinaison positive dans l'hémisphère boréal est négative dans l'hémisphère austral. Ces deux données, angle horaire et déclinaison, déterminent la position de l'astre.

2°. *Trois coordonnées rectangulaires.*

L'équateur est le plan des x, y; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'intersection de l'équateur et du méridien qui correspond à un angle horaire nul; la partie positive de l'axe des y est dirigée vers le point de l'équateur qui répond à un angle horaire de 90 degrés; l'axe des z est l'axe du monde dirigé vers le pôle

nord, et l'on a

$$x' = \cos\delta \cos t, \quad y' = \cos\delta \sin t, \quad z' = \sin\delta,$$

où δ est la déclinaison et t l'angle horaire.

3e SYSTÈME. — DÉCLINAISONS ET ASCENSIONS DROITES.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Dans le système précédent, la déclinaison est constante ; mais la seconde coordonnée, l'angle horaire, varie à chaque instant. Pour rendre cette coordonnée constante, on a pris un point fixe dans l'équateur ; c'est le point d'équinoxe vernal. La distance de ce point à celui où le cercle horaire de l'astre coupe l'équateur se nomme l'*ascension droite* de l'astre ; elle se compte de 0 à 360 degrés d'occident en orient, dans le sens du mouvement diurne de la Terre. Dans ce système, les deux coordonnées, déclinaison et ascension droite, sont constantes.

Observation. L'équatorial, ou instrument parallactique, et la pendule servent à trouver les coordonnées du deuxième et du troisième système.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'équateur est encore celui des x, y ; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'équinoxe vernal où l'ascension droite est nulle, et la partie positive de l'axe des y vers le point où l'ascension droite est de 90 degrés ; l'axe des z est l'axe du monde dirigé vers le pôle nord, et l'on a

$$x'' = \cos\delta \cos\alpha, \quad y'' = \cos\delta \sin\alpha, \quad z'' = \sin\delta,$$

où δ est la déclinaison et α l'ascension droite.

4e SYSTÈME. — LONGITUDE ET LATITUDE.

1°. *Deux coordonnées sphériques.*

Les grands cercles passant par les pôles de l'écliptique se nomment *cercles de latitudes*. L'arc d'un tel cercle passant par l'astre, compris entre l'astre et l'écliptique, est la latitude de l'astre; elle est positive lorsque l'étoile et le pôle nord sont dans le même hémisphère formé par l'écliptique et négative lorsque l'astre est dans le second hémisphère. C'est une première coordonnée. L'arc de l'écliptique compris entre le point d'équinoxe vernal et le cercle de latitude est la longitude de l'astre; c'est la seconde coordonnée et se compte de 0 à 360 degrés dans le sens du mouvement diurne de la Terre.

2°. *Trois coordonnées rectilignes rectangulaires.*

Le plan de l'écliptique est le plan des xy; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le point d'équinoxe vernal; la partie positive de l'axe des y vers le point qui a 90 degrés de longitude; la partie positive de l'axe des z perpendiculaire à l'écliptique dirigé vers l'hémisphère où est le pôle nord.

$$x''' = \cos\beta\cos\lambda, \quad y''' = \cos\beta\sin\lambda, \quad z''' = \sin\beta,$$

où β est la latitude et λ la longitude de l'étoile.

CONVERSION DES COORDONNÉES D'UN SYSTÈME DANS LES COORDONNÉES D'UN AUTRE SYSTÈME.

A. *Conversion du premier système dans le second.*

Considérons le triangle formé par le pôle P, le zénith Z et l'étoile E; on a

$$PZ = 90° - \varphi,$$

où φ est la hauteur du pôle,

$$PE = 90^\circ - \delta, \quad EZ = 90^\circ - h,$$
$$P = t, \quad Z = 180^\circ - A.$$

E = angle à l'astre, *angle parallactique*. On a, d'après les formules connues,

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A,$$
$$\sin\delta \cos t = \cos h \sin A,$$
$$\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A.$$

Faisant

$$\sin h = m \cos M,$$
$$\cos h \cos A = m \sin M,$$

les formules adaptées au calcul par logarithmes deviennent

$$\sin\delta = M \sin(\varphi - M),$$
$$\sin\delta \cos t = \cos h \sin A,$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos(\varphi - M).$$

A'. Deuxième système dans le premier.

Le même triangle donne

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t,$$
$$\cos h \cos A = - \cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t.$$

Faisons

$$\cos\delta \cos t = m \cos M,$$
$$\sin\delta = m \sin M,$$

on a

$$\sin h = m \cos(\varphi - M),$$
$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t,$$
$$\cos h \cos A = m \sin(\varphi - M).$$

B. *Conversion du troisième dans le quatrième système*

Considérons le triangle formé par le pôle P′ de l'écliptique, le pôle P de l'équateur et l'astre E, on a

$$PP' = \varepsilon = \text{obliquité de l'écliptique},$$
$$PE = 90° - \delta,$$
$$P'E = 90° - \beta,$$
$$P = 90° + \alpha,$$
$$P' = 90° - \alpha,$$
$$E = \text{angle à l'astre};$$

d'où

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha,$$
$$\cos\beta\sin\lambda = \cos\delta\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon,$$
$$\sin\beta = -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon.$$

Faisant

$$M\sin N = \sin\delta,$$
$$M\cos N = \cos\delta\sin\alpha,$$

on obtient

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha,$$
$$\cos\beta\sin\lambda = M\cos(N - \varepsilon),$$
$$\sin\beta = M\sin(N - \varepsilon).$$

B′. *Conversion du quatrième dans le troisième système.*

Même triangle que ci-dessus.

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda,$$
$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon,$$
$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon.$$

Faisant

$$\text{tang}\, N = \frac{\text{tang}\,\beta}{\sin\lambda},$$

on obtient

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\cos(N + \varepsilon)}{\cos N}\,\text{tang}\,\lambda,$$
$$\text{tang}\,\delta = \text{tang}(N + \varepsilon)\sin\alpha.$$

Observation. La conversion du premier système dans le quatrième et *vice versâ* n'est pas usitée.

Relations entre les diverses coordonnées rectangulaires (*voir* ci-dessus).

$$x = \cos A \cos h,$$
$$y = \sin A \cos h,$$
$$z = \sin h,$$
$$x' = z \sin \varphi + z \cos \varphi,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z \sin \varphi - x \cos \varphi,$$
$$x'' = x' \cos \Theta + y' \sin \Theta,$$
$$y'' = y' \cos \Theta - x' \sin \Theta,$$
$$z'' = z',$$

où

$$\Theta = \alpha + t = \text{temps sidéral}.$$

$$x''' = x'',$$
$$y''' = y'' \cos \varepsilon + z'' \sin \varepsilon,$$
$$z''' = - y'' \sin \varepsilon + z'' \cos \varepsilon,$$
$$x''' = \cos \beta \cos \lambda,$$
$$y''' = \cos \beta \sin \lambda,$$
$$z'' = \sin \beta.$$

Exemple (B) :

$\alpha = 6° 33' 29'',30$, $\delta = - 16° 22' 35'',45$, $\varepsilon = 22° 27' 31'',72$.

On trouve

$$\log \cos \beta \sin \lambda = 8.0689241_n$$
$$\log \cos \delta \sin \alpha = \underline{9.0397224}$$
$$9.0292017_n$$

Exemple (A) :

$\varphi = 52° 30' 16'',0$, $h = 16° 11' 4'',0$, $A = 202° 4' 15'',5$.

On trouve

$\delta = + 49° 43' 46'',0$, $t = 223° 56' 2'',22$.

OBSERVATION SUR UN PASSAGE DE L'ALGÈBRE DE M. BERTRAND (2e édition).

C'est à la page 9. § 7. Voici l'énoncé.

« La forme des résultats précédents peut se simplifier » à l'aide d'une *convention* très-utile en algèbre, qui » consiste à regarder tous les termes d'un polynôme » comme *ajoutés* les uns aux autres, en nommant nom- » bres *négatifs* ceux qui sont précédés du signe —. Par » exemple, on regardera la différence $a - b$ comme ré- » sultant de l'addition de a avec $-b$.

$$[1] \qquad a - b = a + (-b);$$

» l'expression isolée $(-b)$ n'acquiert pour cela aucune » signification ; seulement on dit ajouter $-b$, au lieu de » dire retrancher b. On convient de même que retran- » cher $-b$ signifie ajouter b.

$$[2] \qquad a - (-b) = a + b.$$

» Il serait absurde de chercher à démontrer les formu- » les (1) et (2) : les définitions ne se démontrent pas. »

Certes on a le droit d'établir des conventions dès qu'elles n'influent pas sur le résultat ; dès que cette influence existe, ce droit cesse. C'est précisément ce qui a lieu ici ; $+(-b)$ égale $-b$, $-(-b)$ égale $+b$ sont des résultats. Si vous en faites des conventions, on pourrait en établir d'autres et d'un sens entièrement opposé. Que devient alors la certitude mathématique? Sans doute les définitions ne se démontrent pas, mais il serait par

trop commode, pour se dispenser de démontrer une proposition, de la convertir en définition.

Ces *conventions* sont un échafaudage superflu, d'aucune nécessité pour construire la science. On évite cet embarras en se rappelant sans cesse que l'algèbre est une *arithmétique universelle*, indépendante de tout système de numération, et que l'arithmétique a pour but *unique* d'apprendre à compter soit en avant, soit en arrière, et de parvenir au résultat final par la voie la plus courte.

Pour donner du corps à cette pensée, imaginons une droite indéfinie; plaçons sur cette droite une infinité de boules égales; désignons une quelconque d'entre elles par la lettre Z, et chacune de celles qui sont à la droite de Z par D et à la gauche de Z par G. Lorsqu'en comptant on s'éloigne de Z dans la direction de D, l'opération se désigne par ce signe $+$; si c'est dans la direction de G, par le signe $-$.

Ainsi $+a-b$ désigne une double opération; on compte a boules dans la direction D, et, arrivé à la fin, on rétrograde de b boules dans la direction G.

$$+(+a-b)+(+c-d)$$

signifie : 1° la double opération $+a-b$, premier résultat; 2° la double opération $+c-d$, deuxième résultat; 3° l'opération $+$ sur le premier résultat et l'opération $+$ sur le second résultat. Ces quatre opérations se réduisent aussi à celle-ci

$$+a-b+c-d;$$

de même

$$+(+a-b)-(+c-d)$$

se réduit à

$$+a-b-c+d.$$

Cette représentation figurée suffit pour tout expliquer

Il faut d'ailleurs remarquer qu'on n'opère réellement jamais que sur des nombres entiers. $\frac{7}{3}$ est la même chose que le nombre 7, excepté que l'unité de ce nombre, au lieu d'être représentée par 1, est représentée par $\frac{1}{3}$.

A la page 19, à propos de la multiplication, on trouve encore une *convention*. Que dirait Leibnitz d'une mathématique conventionnelle ?

Si l'on obligeait les géomètres à expliquer ce qu'ils veulent faire, il n'y aurait jamais de difficulté sur le sens des opérations. Je veux multiplier $-a$ par $-b$, qu'entendez-vous par là ?

A quel propos applique-t-on ci-dessus l'épithète de *négatifs* aux nombres précédés du signe —; en quoi sont-ils moins *affirmatifs* que les nombres précédés du signe + ? C'est qu'on veut obvier, à la page 9, à une difficulté qui ne se présente qu'à la page 10. En bonne logique, dans les ouvrages élémentaires, il ne faut jamais définir un objet, expliquer une difficulté avant que l'objet, la difficulté aient pris naissance. Et c'est pourtant ce qu'on fait toujours; *inde labes*.

Pour les imaginaires, l'auteur a encore recours à une *convention*. Il ne s'agit pourtant que d'un signe *mnémonique*. $\sqrt{-1}$ rappelle que dans l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

il faut remplacer x^2 par -1, ce qui est évident. Le grand Euler lui-même s'est trompé en cet endroit. Au numéro 148 de ses *Éléments*, il met

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{6},$$

et déjà Bombelli, le créateur du calcul des imaginaires,

donne l'équation vraie

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = - \sqrt{ab},$$

et avant lui Cardan se sert de l'expression *moins sophistiqués* pour désigner les racines imaginaires, et, appelant les quantités négatives simples des *moins purs*, il déclare que les *sophistiqués* sont d'*inutiles subtilités*. Nouvel exemple de la réserve qu'il faut mettre dans ces déclarations d'utilité et d'inutilité dont sont si prodigues les hommes qui croient *εἶναί τι*. Aujourd'hui les imaginaires, avec les déterminants et les infiniment petits, forment la partie la plus importante, la plus féconde de toutes les branches de l'analyse et de la géométrie. Notre plus éminent analyste, notre plus éminent géomètre, MM. Cauchy et Chasles, font constamment emploi des imaginaires et en déduisent les plus beaux théorèmes.

L'*Algèbre* de M. Bertrand, comme tout ce qui sort de cette plume, a un mérite tellement supérieur, qu'on ne saurait trop insister sur des défauts, inhérents à toute œuvre humaine.

Sous forme d'exercices ; l'ouvrage contient les principaux résultats de transformation fonctionnelle déduits de la théorie des déterminants, mais qu'on a soin de ne pas désigner, cette théorie n'étant pas admise dans le Programme ; de même pour d'autres théories. Les exemples empruntés à Gauss, Jacobi, Eisenstein, Cayley, Sylvester, sont d'un choix exquis ; les solutions ne tarderont pas sans doute à paraître. Le célèbre auteur, fidèle à son système, ne cite personne ; en ne citant personne, personne n'a à se plaindre.

ALVÉOLES DES ABEILLES, EXERCICE DE CALCUL ET DE STÉRÉOTOMIE.

Admiranda tibi levium spectacula rerum
Et munire favos, et dædala fingere tecta.
(VIRG., *Georg.* lib. IV.)

---

1. Soit ABCDEF un hexagone régulier, tracé sur un plan que nous supposerons horizontal; aux trois sommets A, C, E de rang impair, élevons trois verticales Aa, Ce, Ee de longueurs quelconques, mais égales; aux trois sommets B, D, F, de rang pair, élevons aussi trois verticales Bb, Dd, Ff, égales entre elles, mais non aux trois premières verticales; qu'on fasse

$$Bb = Aa + \frac{AB}{2\sqrt{2}};$$

en menant les droites ab, bc, cd, de, ef, fa, on formera six trapèzes verticaux et égaux et un hexagone équilatéral $abcdef$. Chaque trapèze, tel que $ABab$, a deux angles droits en A et B, un angle obtus en a et un angle aigu en b; la tangente de l'angle obtus est égale à $-2\sqrt{2}$, la tangente de la moitié de cet angle est $\sqrt{2}$, et la tangente de l'angle aigu est $2\sqrt{2}$; de sorte que l'angle obtus est égal à $109^{\circ}\,28'\,16''$ environ, et, par conséquent, l'angle aigu est égal à $70^{\circ}\,30'\,44''$ environ. Au sommet a existe donc un angle solide trièdre, formé par les deux angles obtus des trapèzes et par un troisième angle fab aussi obtus et égal à l'angle obtus des trapèzes; propriété à démontrer. De même aux points c et e. Les droites fa, ab étant éga-

les, achevons le rhombe *fabi*; de sorte qu'on a en *a* un angle solide trièdre formé par deux trapèzes et un rhombe. Faisons la même construction en *c*; les deux rhombes *fabi*, *bcdi* ont le côté *bi* en commun, et en *b* il se forme un angle solide tétraèdre formé par deux trapèzes et deux rhombes présentant quatre angles plans, aigus et égaux. Les deux côtés *ia*, *ie* forment avec les côtés *af*, *ef* un troisième rhombe plan, égal aux précédents, ce qui est facile à prouver; de sorte qu'on aura en *i* un angle solide trièdre formé par trois rhombes et égal à chacun des angles solides en *a*, *c*, *e*; le point *i* est le *sommet* de l'alvéole. Le solide formé des six trapèzes et des trois rhombes représente les parois de l'alvéole en cire que construisent les abeilles. L'hexagone ABCDEF est l'entrée. Les trois rhombes sont la base de l'alvéole, le fond où est déposé le miel, nourriture du ver, première forme de l'insecte. Un système d'alvéoles compose un ensemble qu'on nomme *rayon*.

La liaison du système consiste dans la disposition suivante; les angles *dièdres* en *a* sont évidemment égaux chacun à 120 degrés.

Supposons qu'on remplisse un espace horizontal par des hexagones; qu'on construise sur chaque hexagone un alvéole. Les sommets seront dans un même plan horizontal, et trois faces rhomboïdales prises dans trois alvéoles contigus formeront une nouvelle base hexagonale, et le sommet de l'alvéole correspondant est au-dessous du plan des autres sommets, et achevant les alvéoles par ces nouvelles bases, les ouvertures hexagonales sont à l'opposé des ouvertures des premiers alvéoles. C'est ainsi que sont disposés les alvéoles dans chaque rayon, et par suite de cette construction toutes les faces rhomboïdales sont toutes dans trois plans, ce qui donne à tout l'édifice une extrême régularité. Les abeilles commencent par faire le rhombe et ensuite les faces trapèzes.

Il y a entre deux rayons consécutifs assez d'intervalle pour laisser passer deux mouches. L'ensemble de ces rayons forme la ruche.

2. Concevons les six sommets de l'ouverture hexagonale ainsi que le point *a*, et faisant mouvoir le point *b* le long de l'arête B*b*, construisons les rhombes comme précédemment. A chaque position du point *b* correspond un autre solide alvéolaire.

Il faut démontrer que ces solides sont équivalents et que l'aire varie. Cette aire est un minimum, lorsque les trois angles plans en *a* sont égaux, ce qui entraine la relation que nous avons donnée ci-dessus (*voir* la solution de feu le capitaine Jacob, t. Ier, p. 160).

3. *Note historique.* Le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont les seuls polygones réguliers qui, pris isolément, puissent remplir un espace sans laisser de vide, et de ces trois polygones l'hexagone pour la même aire a le moindre contour. C'est le polygone que les abeilles ont choisi pour l'ouverture de leurs cellules. Pappus, géomètre du IVe siècle avant Jésus-Christ, en a déjà fait l'observation; mais les premières observations précises que nous ayons sur l'anatomie de l'insecte et la construction géométrique de l'alvéole sont dues à Maraldi (Jacques-Philippe), astronome de l'Observatoire royal, que son oncle, l'illustre Cassini, avait fait venir en 1687 de Perinaldo, près de Nice. Ces célèbres et curieuses observations ont été faites sur des ruches appartenant à Cassini placées dans le jardin attenant au bâtiment (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1712, p. 297) (*). Ayant trouvé que les trois angles plans en *a* étaient égaux, il

(*) L'Observatoire était alors près de Paris, mais dehors. Un tel emplacement est aujourd'hui impérieusement exigé par les besoins de la science. Un édifice, modèle Pulkowa, serait un monument digne d'un règne dont les débuts sont si glorieux.

en conclut que cet angle devait être égal à 109° 28′; l'ayant mesuré, il trouva 110 degrés, différence qu'il attribue aux erreurs inévitables dans de telles opérations. Il compta soixante cellules environ dans chaque rayon; A *a* avait 5 lignes et AB 2 lignes de longueur. Le célèbre Réaumur poussa ces recherches plus loin dans son *Histoire des Insectes*, d'une lecture si attachante (t. V) (*). Il proposa au géomètre Kœnig (Samuel), correspondant de l'Académie des Sciences, connu par ses démêlés avec Maupertuis, de chercher le rhombe qui satisfasse au minimum d'aire. Appliquant la méthode du *calcul* infinitésimal, Kœnig trouve que l'angle obtus devait avoir 109° 26′. Réaumur manda ce résultat à Maclaurin. L'éminent géomètre résolut le problème par la méthode de sa *Géométrie infinitésimale*, et trouva pour l'angle du rhombe 109° 28′ 16″. Ce beau travail est inséré dans le tome XLII, année 1742, des *Transactions philosophiques*. Le Mémoire est intitulé : *Of the bases of the cells wherein the Bees deposite their honey* (Sur les bases des cellules où les abeilles déposent leur miel). Il fait partie d'une Lettre du 30 juin 1743, adressée à Martin Folkes, président de la Société royale. Ainsi les abeilles que Virgile a si admirablement chantées construisaient déjà de son temps, un problème dont la solution théorique était réservée au siècle des Newton et des Leibnitz. Donner un tel instinct à quelques molécules organisées! La toute-puissance divine se révèle dans l'infiniment grand, se révèle dans l'infiniment petit. *Mens agitat molem*, disait l'antiquité; mais le monde des infiniment petits en his-

(*) Pourquoi ne fait-on pas une nouvelle édition rectifiée et complétée de cette délicieuse production? J'en dis autant du *Spectacle de la nature*, de Pluche, que de Blainville aimait beaucoup. Ouvrages très-instructifs, d'une haute moralité et très-amusants : qualités dont la réunion est extrêmement rare.

toire naturelle et dans la science des nombres est une conquête des temps modernes. La théorie des quantités naissantes est similaire à celle de l'embryogénie. Les deux sciences doivent et devront leurs principaux progrès aux études infinitésimales. Leibnitz a mis entre les mains des géomètres un microscope qui nous découvre les propriétés d'une série indéfinie d'êtres numériques infiniment petits, se produisant les uns les autres suivant des lois de génération déterminées et certaines. Le microscope optique tend au même but pour les êtres organisés, ainsi que le polarimètre pour les corps inorganiques (*). Curieux de savoir si l'on rencontre dans la nature une forme analogue à celle que construisent les abeilles, je dois au savant professeur M. Cabart les renseignements suivants:

L'oxydule de cuivre cristallise sous forme de dodécaèdres rhomboïdaux, ayant huit angles trièdres, formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Les cristaux du grenat, de la pyrite de fer sont du même genre. L'eau glacée, d'après les observations de M. Clarke, physicien anglais, cristallisant dans le système rhomboédrique, présente deux trièdres formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Cette sorte de cristallisation est très-rare. Il est probable, d'après les calculs de M. Bravais sur les halos et les parhélies, que cette cristallisation existe dans les cristaux de neige. Les cristaux rhomboédriques de la chaux carbonatée ne présentent pas ces angles de 120 degrés.

(*) Leibnitz, dans une Lettre à Huyghens, dit : « J'aime mieux un Leuvenhoek qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartésien qui me dit ce qu'il pense. » Excellente leçon donnée aux métaphysiciens par un métaphysicien, mais géomètre.

SOLUTION DE LA QUESTION 311;

PAR M. E. COMBESCURE.

Déterminer l'aire d'un hyperboloïde de révolution à une nappe limitée par deux parallèles, connaissant la distance de ces deux parallèles, leurs rayons et la portion de génératrice rectiligne qu'ils interceptent.

En désignant par r le rayon d'un parallèle quelconque placé à la distance z du cercle de gorge, l'équation de l'hyperboloïde de révolution est

$$r^2 = a^2 + m^2 z^2,$$

et l'élément de surface de l'hyperboloïde compris entre deux parallèles distants de dz a pour expression

$$d\lambda = 2\pi r d\sigma,$$

où $d\sigma$ représente l'élément de l'hyperbole génératrice, en sorte que

$$d\sigma = \sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{dz\sqrt{a^2 + n^2 z^2}}{r},$$

$$[n^2 = m^2(1 + m^2)].$$

On a donc

$$d\lambda = 2\pi dz \sqrt{a^2 + n^2 z^2},$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{\pi}{n}\left\{\begin{array}{c} nz_2\sqrt{a^2 + n^2 z_2^2} - nz_1\sqrt{a^2 + n^2 z_1^2} \\ + a^2 \log \dfrac{nz_2 + \sqrt{a^2 + n^2 z_2^2}}{nz_1 + \sqrt{a^2 + n^2 z_1^2}} \end{array}\right\},$$

z_2, z_1 étant les z des parallèles qui limitent la portion de surface considérée.

Si r_2, r_1 désignent les rayons de ces mêmes parallèles, en sorte que

$$r_2^2 = a^2 + m^2 z_2^2,$$
$$r_1^2 = a^2 + m^2 z_1^2,$$

l'élimination de m^2 entre ces deux équations donne, en supposant z_2 et z_1 positifs,

$$(1) \qquad \frac{z_2}{z_1} = \sqrt{\frac{r_2^2 - a^2}{r_1^2 - a^2}}.$$

Soient g la portion de génératrice rectiligne interceptée; $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ les coordonnées de ses extrémités, de façon que

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = g^2;$$

d'où, en posant

$$g^2 - (h^2 + r_1^2 + r_2^2) = 2p, \quad (z_2 - z_1 = h),$$
$$(2) \qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 = p.$$

Les extrémités de g se projetant sur une même tangente au cercle de gorge, on a

$$x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi = a,$$
$$x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi = a,$$

φ étant un angle arbitraire dont l'élimination donne

$$(3) \qquad x_1 y_2 - y_1 x_2 = \pm a\sqrt{g^2 - h^2}.$$

En ajoutant les équations (2) et (3) après les avoir élevées au carré, il vient

$$r_1^2 r_2^2 = a^2(g^2 - h^2) + p^2;$$

d'où

$$a^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 - p^2}{g^2 - h^2}.$$

Substituant dans l'équation (1) cette valeur de a^2 et faisant, pour abréger,

$$p + r_1^2 = p_1, \quad p + r_2^2 = p_2,$$

il vient

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p_2}{p_1};$$

d'où et de

$$z_2 - z_1 = h$$

on déduit

$$z_2 = \frac{hp_2}{p_2 - p_1}, \quad z_1 = \frac{hp_1}{p_2 - p_1}.$$

On a ensuite

$$m^2 = \frac{r_1^2 - a^2}{z_1^2},$$

c'est-à-dire, à cause de $a^2 = \frac{p_1 p_2 - p(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2}$,

$$m^2 = \frac{(p_2 - p_1)^2}{h^2(p_2 + p_1)}.$$

z_2, z_1, a^2 et m^2 étant connus en p, p_1, p_2, h, ou si l'on veut en r_1, r_2, g et h, on n'aura plus qu'à substituer leurs expressions précédentes dans celle de λ pour répondre complétement à la question. La substitution en elle-même ne présente aucune particularité digne d'être signalée.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. RUBBINI (DE NAPLES).

Presque en même temps je viens de recevoir le numéro d'août de vos *Annales* et celui du 2 juillet des *Comptes*

rendus de votre Académie des Sciences. Dans le premier je trouve à la page 305 la question :

« Construire la surface

$$(1) \qquad e^{r} = \frac{\cos x}{\cos y} \; (e = \text{base népérienne}). »$$

(E. CATALAN.)

Dans le second, à la page 35, je trouve résolue la même question par l'auteur lui-même.

Or, Monsieur, tout en respectant le talent supérieur de votre savant, je ne puis m'abstenir de réclamer, en faveur de mon professeur M. Padula, une priorité qui lui est due au sujet de l'équation ci-dessus.

Ce savant napolitain s'était déjà occupé depuis 1852 (voir *Rendiconto della reale Accademia delle Scienze di Napoli*, n° 3, 1852) de la même question qui avait conduit M. Catalan à l'équation (1), à savoir de trouver sous forme finie les équations de deux surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et opposés et qui jouissent en même temps de la propriété qu'une partie quelconque de la surface est un minimum entre toutes les surfaces qui ont même contour.

M. Padula commence sa *Note* par un renseignement des quatre surfaces jouissant des propriétés énoncées, et découvertes, la première par M. Catalan (l'hélicoïde gauche); la seconde (surface de rotation dont la méridienne est la chaînette homogène) par M. de Morgan, et les deux autres par M. Roberts (Michel). Ensuite il se propose la question : Chercher si parmi les surfaces dont la génératrice se meut parallèlement à elle-même, il s'en trouve quelqu'une dont les rayons de courbure soient égaux et opposés. Une autre question plus générale (celle sur les surfaces produites par le mouvement d'une courbe plane) avait conduit notre auteur à la question spéciale ci-dessus énoncée.

Or M. Padula trouve pour solution de son problème

$$(2) \qquad \frac{z}{m} = l\cos\frac{y\sqrt{1+a^2}}{m} - l\cos\left(\frac{x}{m} - \frac{ay}{m}\right),$$

a étant une constante arbitraire et m une autre constante qui satisfait à la condition

$$(3) \qquad -\frac{1+f'^2}{f''} = m,$$

[$y = 0$, $z = f(x)$ étant les équations de la génératrice supposée plane sans détruire la généralité de la question].

De cette dernière équation (3) il déduit la propriété que *la projection sur l'axe des* x *du rayon de courbure en un point quelconque de la génératrice est constante.*

L'équation (1) de M. Catalan se déduit de l'équation (2) de M. Padula, posant en celle-ci $a = 0$.

Ce dernier savant, en outre, trouve une autre surface qui dépend de transcendantes jusqu'à présent inconnues et dont l'équation est de la forme suivante :

$$z = f(x - \varphi) + \psi,$$

$$\varphi = \frac{\gamma + ay}{1+n^2} - \frac{m}{1+n^2}\, l\cos\frac{(y+\beta)\sqrt{1+a^2+n^2}}{m},$$

$$\psi = \frac{\gamma' - any}{1+n^2} - \frac{m}{1+n^2}\, l\cos\frac{(y+\beta)\sqrt{1+a^2+n^2}}{m}$$

(la fonction f étant déterminée par l'équation

$$mnl\frac{nf-1}{\sqrt{1+f'^2}} - m \text{ arc tang} f' = (1+n^2)u + h,$$

et u représente la variable à laquelle se rapporte la fonction f).

Enfin l'analyse de M. Padula est tout à fait directe et sans tâtonnements.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN BICARRÉS.

Waring a énoncé la conjecture que tout nombre est la somme de 19 bicarrés, en admettant le zéro comme bicarré. Jacobi a exprimé le désir de voir contrôler cette conjecture. M. C.-A. Bretschneider, professeur à Gotha, a entrepris ce contrôle pour les nombres de 1 à 4100. Ses Tables sont insérées dans le *Journal* de Crelle (t. XLVI, p. 1, 1853).

En résumé, il a trouvé que dans les nombres de 1 à 4100 il y en a :

28	décomposables en	2	bicarrés.
75	—	3	
158	—	4	
271	—	5	
375	—	6	
416	—	7	
393	—	8	
353	—	9	
322	—	10	
306	—	11	
290	—	12	
286	—	13	
284	—	14	
282	—	15	
166	—	16	
56	—	17	
24	—	18	
7	—	19	

Les sept en 19 bicarrés sont 79, 159, 239, 319, 399, 479 (*), 559.

Ainsi

$79 = 4.2^4 + 15.1^4$,

$159 = 4.2^4 + 1.3^4 + 14.1^4$,

$239 = 4.2^4 + 2.3^4 + 13.1^4$,

$319 = 15.1^4 + 3.2^4 + 1.3^4 = 4.2^4 + 3.3^4 + 12.1^4$,

$399 = 14.1^4 + 3.2^4 + 1.3^4 + 1.4^4 = 11.1^4 + 4.2^4 + 4.3^4$,

$479 = 13.1^4 + 3.2^4 + 2.3^4 + 1.4^4 = 10.1^4 + 4.2^4 + 5.3^4$,

$559 = 15.1^4 + 2.2^4 + 2.4^4 = 12.1^4 + 3.2^4 + 3.3^4 + 1.4^4$
$= 9.1^4 + 4.2^4 + 6.3^4$.

Ces sept nombres ne peuvent se décomposer en moins de 19 bicarrés.

Cette identité

$$3^4 - 5.2^4 = 1$$

a facilité le calcul.

LETTRE SUR LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE.

« Mon cher monsieur Terquem,

» Lorsque je reçus, il y a une quinzaine de jours, la nouvelle livraison des *Nouvelles Annales,* je vous écrivis immédiatement pour protester au nom des géomètres contre les objections absolument dénuées de fondement que l'on élevait sur la théorie de la rotation donnée par M. Poinsot. N'ayant pas alors sous les yeux le Mémoire de l'illustre géomètre, je me bornais à deviner d'après mes souvenirs, par quel malentendu l'auteur de la Note avait pu se méprendre sur le sens des expressions em-

(*) Par erreur on a mis 379.

ployées et trouver une erreur où chacun n'avait aperçu jusqu'ici qu'un modèle de rigueur et d'élégance. Je viens de relire les premières pages de ce beau travail, et j'avoue qu'il me semble suffisant de conseiller à vos lecteurs d'en faire autant; c'est seulement pour ceux qui n'auraient pas le moyen de recourir au texte que je vous demande place pour quelques explications.

» J'ouvre le *Journal* de M. Liouville, t. XVI, p. 43, et je trouve un paragraphe intitulé : *Des forces centrifuges qui naissent de la rotation*. C'est celui-là qu'il faut lire pour apprécier la valeur des objections dont je parle.

On y trouvera d'abord la démonstration géométrique d'un théorème bien connu dont l'énoncé se lit page 44 (lignes 14 à 16) :

« La force centripète nécessaire pour qu'un point
» puisse tourner en cercle avec une vitesse u est expri-
» mée par le carré de cette vitesse divisé par le rayon du
» cercle. »

» M. Poinsot ajoute, il est vrai : « La même expres-
» sion convient à un mouvement curviligne quelcon-
» que... en prenant pour r le rayon du cercle osculateur à
» la courbe décrite au point que l'on considère. »

» Cette remarque, inutile pour ce qui va suivre, est placée là pour l'instruction du lecteur, mais vous connaissez l'adage : *Quod abundat, non vitiat*. Elle est donc parfaitement légitime, et cependant, s'il fallait absolument conjecturer, je me hasarderais à dire que c'est à cause d'elle que M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris par tout le monde.

» Je lis plus loin, page 45 :

« Dans la question qui nous occupe... il n'y a pas de
» force centripète qui intervienne pour faire tourner li-
» brement chaque molécule autour de l'axe (instantané)
» OZ, mais je considère que si cette force n'y est point,

» RIEN N'EMPÊCHE de la supposer, pourvu qu'on en sup-
» pose une égale et contraire. »

» Cette force centripète que rien n'empêche de supposer, est, on le voit, celle qui ferait décrire à la molécule *un cercle rigoureux*. Rien n'empêche évidemment de la supposer, pourvu qu'on introduise une force égale et contraire qui est la force centrifuge.

» Maintenant l'objection de M. S.-G. se réduit à ceci :

» Pourquoi introduisez-vous la force nécessaire pour faire tourner la molécule en rigueur autour de l'axe instantané? Je préférerais vous voir calculer la force centripète réelle, et, pour cela, déterminer le rayon de courbure de la trajectoire, très-différent de celui du cercle dont vous parlez.

» A ceci on peut répondre : M. Poinsot introduit cette force parce que c'est celle-là qui est commode pour son raisonnement tel qu'il veut le faire, et que rien n'empêche d'introduire dans un système deux forces égales et contraires quelles qu'elles soient. Ceci est si vrai, que l'on pourrait, si on le désirait, introduire la force que M. S.-G. nomme la véritable force centripète, pourvu que l'on adjoignît la véritable force centrifuge ; mais je n'aperçois pas à quoi cette introduction pourrait servir, et il semble que la chaîne des raisonnements, rompue alors dès le début, ne pourrait plus se renouer.

» J. BERTRAND. »

Note du Rédacteur. M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris de *tout le monde*. L'explication n'est donc pas superflue, vu que ce *tout le monde* comprend des esprits distingués. La force centripète que M. Poinsot évalue est une force *artificielle* pour ainsi dire, très-commode pour l'objet que l'illustre géomètre avait en vue, mais ce n'est pas la force centripète *réelle*

ou telle qu'elle existe réellement. M. Poinsot fait bien allusion à cette distinction. La discussion actuelle montre bien que cette allusion n'est pas suffisante. L'axe instantané de rotation instantanée ne serait-il pas plus convenablement désigné sous le nom de *droite de repos instantané?* car, à vrai dire, il n'y a pas de rotation. Chaque point tourne autour d'une droite élevée au centre de courbure perpendiculairement au plan osculateur relatif à la trajection décrite par ce point. L'ensemble de ces perpendiculaires est la surface gauche de rotation instantanée pour ce point. Chacun a la sienne. Dans un corps solide en mouvement, trois de ces surfaces déterminent toutes les autres.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DES THÉORÈMES DE M. STEINER

Énoncés sous les nos 5, 6 et 7

(voir t. XIV, p. 141 et 142);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. Pour démontrer ces théorèmes, il faut commencer par rappeler quelques propositions préliminaires qui sont une conséquence très-simple de la théorie des *polaires* et du principe de *correspondance anharmonique* récemment exposé par M. Chasles dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences.

2. Soient données sur un plan deux coniques Σ, Σ' et une droite arbitraire L. p et p' étant les pôles de cette droite dans les deux coniques, la droite pp', qui les joint, est unique et déterminée. J'appellerai cette droite la *réciproque* de L.

Par un point quelconque O de L, soient menées des droites OL', OL'', etc.; leurs pôles respectifs q, q', r, r', etc., seront distribués sur les deux polaires du point O.

et ils se *correspondront anharmoniquement;* donc (*Géométrie supérieure*, n° 555), les droites pp', qq', rr', etc., enveloppent une conique Ω *relative* au point O.

A un second point quelconque O′ correspondra pareillement une seconde conique Ω' *relative* à ce point.

3. Donc la droite OO′ a pour *réciproque* une des quatre tangentes communes aux deux coniques Ω, Ω', et cette tangente est déterminée, ainsi que cela résulte d'ailleurs de la première construction des droites réciproques (n° 2), parce que les trois autres tangentes communes E, F, G, dont une au moins est toujours réelle, sont des droites fixes et indépendantes de la position variable de la droite OO′. C'est ce que je vais faire voir dans le paragraphe suivant.

4. En effet, soit E l'une de ces trois tangentes. Si on la regarde comme enveloppant la conique Ω, il résulte du numéro 2 qu'elle joint les deux pôles o ω d'une certaine droite OM, laquelle passe par le point O dont Ω est la conique relative, ces pôles étant pris par rapport aux deux coniques fixes Σ, Σ'. Donc, réciproquement, les pôles e, e' de E se trouvent sur cette droite OM.

Par une raison semblable, si l'on regarde E comme enveloppant la conique Ω', ses pôles e, e' doivent se trouver sur une autre droite OM′, distincte de la droite OM, et passant par le point O′ dont Ω' est la conique *relative.*

Cette double condition exige évidemment que les points e, e' coïncident en un seul et même point.

5. Il résulte de là que chacune des trois tangentes E, F, G a même pôle dans les deux coniques proposées Σ, Σ'. Or, on sait que dans le plan de deux coniques données, il n'existe que trois droites fixes qui jouissent de cette propriété remarquable (*voir* la *Géométrie supérieure* et le *Traité des propriétés projectives*). On sait en outre que

ce pôle commun est précisément le point d'intersection des deux autres droites ; que ce point est, en même temps, le point de concours de deux cordes communes conjuguées ou *axes de symptose* des deux coniques ; que chacune de ces droites contient deux *centres d'homologie* conjugués, centres que l'on obtient aisément en cherchant les deux points (réels ou imaginaires) qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments interceptés par les deux coniques sur celle des trois droites que l'on considère (*Géométrie supérieure*, n° 210). Etc.

6. D'après ce qui précède, les coniques *relatives* à tous les points du plan touchent trois droites fixes de ce plan ; ce sont précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler.

Réciproquement, toute conique tangente à ces trois droites est relative à un point du plan. Car deux autres tangentes quelconques de cette conique ont pour *réciproques* deux droites dont le point de rencontre aura pour conique relative une conique tangente à ces deux droites (n° 2) et aux trois tangentes fixes E, F, G et qui se confondra, par conséquent, avec la conique en question.

7. Actuellement, prenons pour conique le segment rectiligne terminé *em* qui joint un point quelconque *m* de E au point de concours *e* des deux droites F, G, segment qu'on peut regarder comme représentant une ellipse infiniment aplatie à laquelle les trois droites E, F, G sont évidemment tangentes (*). Cette conique particulière sera, comme dans le cas général (n° 6), *relative* à un point *m'*, et je vais prouver que ce point *m'* est situé sur E comme le point *m* lui-même.

En effet, pour que les droites *pp'*, *qq'*, *rr'*, etc. (n° 2),

(*) Voir, à ce sujet, le *nota* qui termine cet article, n° 8.

qui enveloppent et qui déterminent, dans ce cas, la conique relative *em*, passent toutes par le point *m*, extrémité du segment terminé *em*, il faut (comme on sait, et comme je le rappelle expressément dans le *nota* ci-après) que les droites fixes *pqr*, *p' q' r'*, polaires du point *m'*, sur lesquelles sont marquées les divisions homographiques *p*, *q*, *r*, etc., *p'*, *q'*, *r'*, etc., passent par le point *p*, et, de plus, il faut que ce point soit un point homologue de deux divisions. Donc, en premier lieu, il existe une droite *m'*I passant par le point *m'*, telle, que ses deux pôles, par rapport aux coniques données Σ, Σ', coïncident en un seul et même point au point *e*. Or j'ai fait voir (n° 5) que la droite E est la seule droite du plan des deux coniques qui jouisse de cette propriété. Donc *m'* I n'est autre chose que E, ce qui démontre que le point *m'* est sur E comme le point *m* lui-même.

Il est d'ailleurs évident que les points *m* et *m'* se correspondent anharmoniquement, et, de plus, qu'ils sont en involution. Car le point *m*, considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux divisions, a toujours pour correspondant le même point *m'*. Les points doubles de l'involution jouissent de la propriété que les deux pôles relatifs à chacune des droites qui passent par l'un d'eux se trouvent sur une droite qui passe aussi par ce point. Donc (*Geométrie supérieure* et *Traité des propriétés projectives*) ces points doubles sont les centres d'homologie des deux coniques, etc.

8. Je vais maintenant donner, dans le *nota* suivant, les détails auxquels j'ai fait allusion plus haut (n° 7) et qui auraient retardé la marche des raisonnements.

Nota. On sait que quand deux faisceaux homographiques ont leurs sommets en deux points distincts, leurs rayons homologues se coupent généralement sur une conique. Dans le cas particulier où deux de ces rayons coïn-

cident en direction avec la droite qui joint les deux sommets des faisceaux, le point de concours des rayons homologues décrit une droite indéfinie. Mais il est sous-entendu que la droite de jonction des deux sommets fait aussi partie de la conique qui est décrite dans ce cas particulier; chacun de ses points peut effectivement être regardé comme le point d'intersection des deux rayons homologues qui se confondent avec elle. Et il faut bien qu'il en soit ainsi; car la première droite *indéfinie* ne saurait représenter à elle seule une section conique. Et cette conique se réduit, dans ce cas, au système des deux droites dont je viens de parler, système qu'on peut regarder comme une hyperbole infiniment dilatée et réduite à ses asymptotes.

Pareillement, les droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques tracées sur deux droites distinctes, enveloppent généralement une section conique. Si le point de concours de ces deux droites fixes est un point de coïncidence de deux points homologues, la droite mobile passe par un point fixe ou enveloppe ce point. Mais ce point ne représente pas plus à lui seul la conique du cas général, pas plus, dis-je, qu'une conique n'était représentée par une seule droite dans la première partie du *nota*. En effet, une droite quelconque, menée par le point de concours des deux droites fixes, peut être regardée comme joignant les deux points homologues qui coïncident en ce point, et par conséquent comme une tangente à la conique enveloppe. Donc cette conique est représentée dans ce cas particulier par le segment terminé à ce point de concours et au second point fixe par lequel passent toutes les autres droites mobiles; et on peut la regarder comme une ellipse infiniment aplatie et réduite à son grand axe.

9. Ceci posé, la démonstration des théorèmes de

M. Steiner se fait sans difficulté, comme on va le voir.

10. Théorème V. *Quatre coniques étant inscrites dans un triangle, ces coniques prises deux à deux ont encore en commun, outre les côtés du triangle, une quatrième tangente* T; *il y a six de ces tangentes* T *et elles coupent chaque côté du triangle en six points en involution.*

On pourra toujours décrire, ou simplement supposer, sur le plan de la figure, un système de deux coniques Σ, Σ' dont les trois côtés du triangle soient précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler; ceci est évident. Soient C, C′, C″, C‴ les quatre coniques données, et c, c', c'', c''' leurs points *réciproques* par rapport aux deux courbes Σ, Σ'. Ces points forment un quadrilatère dont les quatre côtés et les deux diagonales sont les six droites *réciproques* des six tangentes menées aux quatre coniques. Soient a, a', b, b', c, c' les points où ces six tangentes rencontrent l'un E des côtés du triangle, et α, α', β, β', γ, γ' les six points d'intersection de E avec les côtés et les diagonales du quadrilatère. Ceux-ci sont en involution (*Géom. sup.* n° 339); donc les six autres a, a', etc., qui leur correspondent anharmoniquement, sont eux-mêmes en involution.

C. Q. F. D.

Cette démonstration indique en même temps de quelle manière on doit conjuguer les six points dans l'involution. Par exemple, si a répond à la tangente commune aux deux coniques C, C′, a' répondra à la tangente commune aux deux autres c'', c'''.

11. Théorème. *Si quatre coniques ont en commun un foyer et une tangente* A, *elles ont encore en commun prises deux à deux six tangentes* T *telles, qu'elles coupent la tangente* A *en six points en involution.*

Ce théorème est un simple corollaire du précédent. Car

(*Géom., sup.* n° 736, ou *Traité des propriétés projectives*) des coniques qui ont un foyer commun sont dans le même cas que des coniques qui ont deux tangentes communes.

12. Théorème VII. *Si quatre paraboles ont le même foyer, prises deux à deux, elles ont une tangente commune* T; *si par un point* p *on abaisse des perpendiculaires sur ces six tangentes, on a un faisceau en involution.*

Les paraboles ont une tangente commune à l'infini, et le foyer commun tient lieu de deux autres tangentes communes (imaginaires). Donc, en vertu du théorème V, les six points où les six tangentes rencontrent la droite à l'infini sont en involution. Les six perpendiculaires issues du point p faisant avec ces six tangentes des angles égaux, rencontrent la droite à l'infini en six points homographiques aux six premiers (*Géom sup.*, n° 652), et qui, par suite, seront comme eux en involution. Donc il en est de même des six perpendiculaires.

C. Q. F. D.

Je ferai remarquer, en terminant, que toutes les propositions qui font l'objet de cette Note ont leurs corrélatives qu'on démontrerait directement par des raisonnements analogues. Ces nouvelles propositions qui sont intéressantes, fournissent une interprétation et une démonstration géométriques très-simples des divers théorèmes déduits de l'analyse par M. Magnus, de Berlin, dans le tome VIII du *Journal* de Crelle, p. 51. Je me propose de revenir ailleurs sur ce sujet.

NOTE SUR LES OMBRES A LUMIÈRE PARALLÈLE
ou projections obliques des polyèdres, sur leurs projections orthogonales et sur les changements de plans de projections et rotations comme méthodes d'enseignement;

Par A. CHEVILLARD,
Professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive.

1. Depuis plusieurs années, on s'attache, dans les classes de mathématiques, à proposer des problèmes réellement utiles, applications des théories enseignées. Cet excellent usage n'est guère suivi pour la géométrie descriptive que dans les écoles professionnelles. C'est d'autant plus regrettable pour les élèves des Lycées, qu'ils ont des ressources qui manquent aux dessinateurs et aux mécaniciens. On peut s'en prendre avant tout à la plupart des Éléments de géométrie descriptive qui ne présentent pas de méthodes suffisamment pratiques. Ainsi le plan y est toujours indiqué par ses deux traces, quand la construction le donne ordinairement par trois points et sans traces possibles. Les solutions des problèmes sur le cylindre, le cône, y exigent les traces de ces surfaces, tandis que dans la pratique, ces surfaces étant le plus souvent de révolution, la connaissance de leurs traces pour les tangences, intersections, etc., devient tout à fait inutile. C'est en suivant depuis longtemps un système entièrement différent que j'ai reconnu, par l'expérience des résultats acquis, combien les idées de M. Olivier sont propres à vulgariser et à faire avancer la géométrie descriptive. On me permettra de revenir tout à l'heure sur

ce sujet qui semble acquérir une nouvelle opportunité.

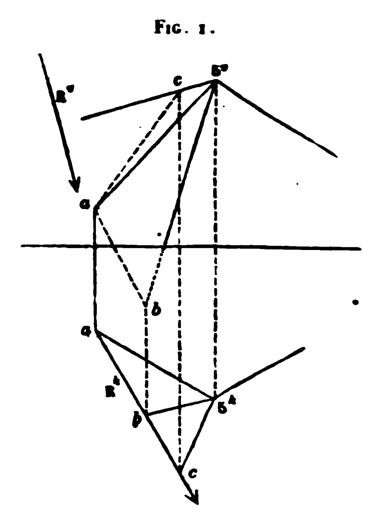
2. Le problème des ombres à lumière parallèle pour les polyèdres pouvant s'aborder dès l'ouverture d'un cours de géométrie descriptive, il sera intéressant pour les commençants d'en faire des applications à l'architecture. Étant donnés par les deux projections orthogonales les sommets 1, 2, 3, 4, 5, etc., d'un polyèdre *convexe* P et le rayon lumineux R, il s'agit d'en dessiner les faces obscures, éclairées et les ombres portées sur les plans de projection. On déterminera d'abord la brisée polygonale B par laquelle le prisme parallèle à R et circonscrit à P touche ce polyèdre, brisée qui est en même temps le contour apparent de P vu dans le sens de R, et aussi ligne séparative des ombres et de la lumière sur ce corps. Pour cela, on projettera parallèlement à R tous les sommets de P, soit sur les deux plans de projection, soit sur l'un d'eux, en ne conservant que la première trace que fournit le rayon lumineux. Cela dépendra de l'effet qu'on voudra rendre. Le polygone *convexe* $2^h\, 3^h\, 5^h\, 6^h$, etc., par exemple, dont les côtés sont projections obliques d'arêtes de P et qui renferme certaines traces 1^h, 4^h, etc., donne immédiatement la *séparative* 2356, etc., dont deux côtés présenteront peut-être un coude sur les deux plans de projection, et l'on pourra déjà ombrer toute la partie plane comprise dans l'intérieur de $2^h 3^h 5^h \ldots 7^v 8^v$, ombre portée et projection oblique de P. Reste à indiquer en projections les ombres propres, c'est-à-dire les faces obscures. Or la connaissance d'une face obscure F suffira pour trouver toutes les autres, car si F n'a aucune arête de la séparative, toutes les faces adjacentes à F par quelque arête seront obscures, et si F tient à la séparative par quelque arête, la face F′ qui tient à F par cette arête est éclairée, de sorte qu'on pourra, de proche en proche, re-

connaître toute la partie éclairée de P; et il sera bien d'indiquer dans l'ombre portée en plein ou par une couleur désignée toutes les arêtes des faces éclairées pour y présenter l'aspect de P vu en projection oblique parallèle à R.

3. Cherchons donc une seule face obscure ou éclairée. Il est rare qu'à vue d'œil on n'en aperçoive pas une, attendu que deux faces successives ont la même manière d'être par rapport à R toutes les fois que leur arête commune n'est pas sur la séparative. D'ailleurs, si une face est horizontale, elle est éclairée ou obscure selon qu'elle est la plus haute ou la plus basse de P, la lumière venant de haut en bas. Si une face est verticale, la projection R^h seule indique si R la rencontre. Remarque analogue sur l'emploi de R^v. Une observation très-commode est que parmi les projections obliques d'arêtes comprises dans l'intérieur de $2^h\,3^h\,5^h$..., on en trouve aisément deux qui se croisent en h, par exemple, mais jamais plus pour h, P étant convexe; menant par h un rayon en sens contraire de R, ou seulement une seule projection R^h, ce qui n'exige que la pose de l'équerre, sans rien tracer, on verra que R rencontre deux arêtes de P, ni plus, ni moins, dont la première sera entièrement obscure, c'est-à-dire séparera deux faces obscures. Enfin, si l'on ne trouvait pas un point h de cette espèce (cas très-rare), menez près d'un sommet 5 de la séparative et la rencontrant un plan vertical R^h; il coupera l'angle solide 5 selon un petit polygone très-facile à obtenir en projection verticale. Tout côté de cette projection qui n'est pas rencontré par la direction R^v indique une face obscure. Ainsi soit le sommet séparatif 5 (*fig.* 1), l'arête séparative $5a$; le plan R^h coupe les arêtes $5a$, $5b$, $5c$ aux points a, b, c, ce qui donne les droites ac et ab comprises dans les faces $5ac$ et $5ab$ adjacentes à la séparative. Comme R^v ne rencontre pas ab, la face $5ab$ est obscure, $5ac$ est éclairée. Ainsi, en résumé, pas ou très-

peu de constructions à faire pour déterminer les faces obscures de P.

Fig. 1.



4. Les faces obscures, c'est-à-dire invisibles dans la direction R, sont déjà indiquées dans l'ombre portée par leurs arêtes ponctuées ou d'une couleur peu tranchée: mais sur les projections il faut teinter ces faces obscures lorsqu'elles y sont visibles. Les faces visibles en projection horizontale étant les faces éclairées par une lumière verticale, on les reconnaît tout de suite par la méthode précédente (n° 3), puisque la projection P^h donne la séparative pour la lumière verticale et que le plan R^h devient ici un plan vertical de direction quelconque. D'ailleurs le croisement de deux projections horizontales d'arêtes résout tout de suite la question. Même observation pour les faces visibles en projection verticale. Ainsi l'on se procure aisément trois aspects du solide éclairés par la même direction de lumière.

5. Quand le polyèdre n'est pas convexe, qu'il présente

des angles solides ou des dièdres rentrants, comme dans un escalier droit, la séparative pourra être projetée obliquement en partie sur le plan horizontal, en partie sur des faces de ces dièdres, et, par suite, être discontinue dans l'espace, parce que R raserait à la fois deux arêtes appartenant à deux faces d'un dièdre ou même à deux dièdres séparés, et viendrait ensuite rencontrer le sol. Certaines arêtes peuvent alors être obscures dans une partie, éclairées dans l'autre. En étudiant séparément les portions convexes du polyèdre, on aura lieu d'appliquer les principes précédents. On peut proposer, dans ce genre, des sujets intéressants; mais je doute qu'un professeur qui ne fait jamais de croquis, voie tout de suite les fautes des dessins présentés, indique une direction meilleure du rayon lumineux, etc (*).

6. Enfin, on peut avoir des groupes de polyèdres qui se pénètrent ou non. Il faudra déterminer leurs intersections (*Géométrie descriptive* de M. Amiot), déterminer la séparative pour chacun d'eux. Les ombres pourront se porter les unes sur les autres *sans croître d'intensité*, de façon que les ombres des corps les plus près du plan horizontal par rapport à R sont plus noires et traversent en restant sensibles les ombres des corps moins rapprochés. Il me paraît difficile d'indiquer des moyens généraux ayant assez de précision pour s'appliquer tout de suite à tous les cas. On remarquera principalement qu'aussitôt qu'une séparative d'un corps porte ombre sur une face éclairée d'un autre corps, cette ombre reste dans cette face éclairée ou continue jusqu'à la rencontre d'une séparative de ce deuxième corps; en ce point le rayon lumineux rasant deux séparatives, il en résulte l'intersection de deux om-

(*) Dans le dessin des machines, les ombres *portées* embrouillent souvent plus qu'elles n'éclaircissent. Elles ne sont utiles que pour accuser la forme des surfaces courbes. Tm.

bres portées sur un troisième corps ou sur le plan horizontal, etc.

7. Je terminerai en faisant observer que les projets d'architecture et les dessins topographiques sont éclairés par de la lumière dite à 45 degrés, locution mal comprise de beaucoup de praticiens. Les projections du rayon sont, en effet, inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre, mais le rayon lumineux fait avec chaque plan de projection l'angle que fait la diagonale d'un cube avec la diagonale d'une de ses faces qui part du même sommet, angle très-facile à calculer.

8. Le problème des ombres d'un polyèdre pourrait se résoudre par deux changements de plans de projection qui rendraient R perpendiculaire au dernier. Ce moyen sera en général trop compliqué. On en accuserait à tort la transformation des projections. Cette méthode devra toujours être préférée *chaque fois qu'en particularisant les données par rapport aux deux plans de projection, sans rien changer à leur position relative dans l'espace, on trouvera une solution immédiate du problème,* ce qui n'est pas le cas actuel. Faute de bien entendre cette condition, la méthode des changements de plans d'Olivier, si simplement exposée dans l'ouvrage de M. Amiot, soulève encore maintenant de nombreuses critiques. Je vais prouver qu'elles sont toutes tirées de l'ignorance du sujet.

9. L'opposition aux transformations de projections et rotations se résume dans les quatre motifs suivants :

1°. *Ces méthodes sont inutiles, puisqu'on faisait de la Géométrie descriptive avant M. Olivier.*

C'est exactement comme si ayant su autrefois, je suppose, discuter analytiquement les propriétés géométriques des courbes, sans le problème de la transformation des coordonnées, on renonçait à refaire aujourd'hui cette

discussion par le secours de ce problème. Mais ici il y a plus encore. Si l'on voulait se donner la peine d'examiner avant de critiquer, on verrait que les anciennes explications données pour calculer par les projections la distance de deux points, les angles des droites, des plans, etc., deviennent inutiles par l'emploi des changements de plans et rotations, lequel fait d'abord retrouver les constructions usitées et disparaître en même temps tous ces cas particuliers dont plusieurs livres élémentaires sont remplis, parce que ces explications soi-disant générales y devenaient réellement insuffisantes. Dans notre système d'enseignement, le procédé d'exécution étant aussi uniforme que général, il suffit d'énoncer quelques-uns de ces cas pour que les élèves les résolvent immédiatement et de la manière la plus simple.

2°. *Les épures faites par ces méthodes sont compliquées et confuses. On voit un changement de plan, on se perd dans plusieurs.*

Il faut faire attention que la pratique des changements de plans et rotations doit être raisonnée avant toute application, que ses qualités principales sont, au contraire, de permettre de rejeter loin du résultat à obtenir les constructions auxiliaires pour donner à ce résultat toute l'expression désirable, qu'on n'emploie pas indifféremment un changement ou une rotation, qu'il y a des règles très-simples pour rendre visuelles toutes les constructions qui en résultent, qu'il n'y a aucune nécessité de voir l'ensemble des opérations fournies par trois changements (cas très-rare), qu'on n'a jamais besoin de regarder que la dernière ligne de terre, et qu'enfin une règle très-facile évite même la vision dans l'espace en la ramenant par cette vision même à la lecture sur le papier (t. XIII, p. 91).

3°. *Cette règle n'est qu'un mécanisme, et il faut rejeter toutes ces méthodes réduisant l'esprit au rôle de ma-*

chine, parce que, dit-on, leur application n'exige aucun raisonnement.

On oublie précisément de prouver que ces méthodes sont dans ce cas. Est-ce que toutes les règles d'arithmétique, les évaluations géométriques, les formules d'algèbre, des calculs différentiel et intégral, etc., ne sont pas des mécanismes ingénieux dont l'effet est démontré à priori satisfaire au but proposé? Mais d'abord si l'on interdit les changements de plans et les rotations en principe, il n'en faut pas faire d'applications sous un autre nom là où il est impossible de les éviter (surfaces de révolution, construction de pièces d'assemblage, etc.); mais si l'on ne croit en critiquer que l'abus, il est vraiment singulier qu'il existe des méthodes pour résoudre uniformément, de la façon la plus simple, la plus rapide et la plus expressive, tous les problèmes fondamentaux de la géométrie descriptive et que ces méthodes soient des mécanismes sans valeur et sans raison d'être.

4°. Enfin, d'autres personnes objectent que *ces méthodes sont trop analytiques, qu'elles s'éloignent de la géométrie pure, que trouver la position la plus convenable des données par rapport aux plans de projection est une question difficile, etc.*

Le procédé géométrique indépendant de tout moyen d'exécution une fois reconnu par la géométrie élémentaire ou supérieure de l'espace, selon la question, le moyen graphique s'ensuivra en conséquence. Je ne pense pas qu'il faille de grands efforts d'intelligence pour remarquer qu'une droite finie est projetée en vraie grandeur sur un plan auquel elle serait parallèle, qu'un angle dièdre est obtenu en vraie grandeur sur un plan perpendiculaire à son arête, etc., tous résultats qui doivent être prévus, au contraire, par la géométrie pure. Que si la rotation qui doit produire ces positions introduit quelque

confusion dans les données, il faut préférer un changement de plan; qu'on trouve bien les distances de divers points à un plan par un seul changement de plan, mais qu'une rotation ne conviendrait que dans le cas d'un seul point par lequel on fait passer l'axe, etc. Du reste, ces méthodes ont un caractère mathématique si prononcé, qu'elles suppléent parfaitement, comme je l'ai vérifié bien souvent, des études incomplètes sur divers points de la géométrie pure, en les rendant pour ainsi dire évidents sans démonstration. Aussi sont-elles enseignées de préférence à toutes autres dans les écoles professionnelles de Châlons, d'Angers, de Lyon et pour l'école des Beaux-Arts de Paris. S'agit-il, par exemple, de chercher l'intersection d'une droite et d'un cône de révolution donné de sommet, d'angle et d'axe? Il faudra, dans le système d'enseignement généralement suivi, faire passer un plan par la droite et le sommet du cône, chercher l'intersection de ce plan avec une trace du cône, laquelle est une courbe du deuxième degré, pour en conclure ensuite la génératrice qui coupera la droite au point cherché. Si l'on ne veut pas construire la courbe par points, il faudra déterminer un foyer et un ou deux sommets; trouver avec ces seules données la rencontre de la courbe et d'une trace du plan, ce qui, pour le dire en passant, n'est plus de la géométrie élémentaire selon les Programmes.

Du reste, on ne s'inquiète pas si la trace du plan est hors du cadre et la courbe aussi; si, quand elles y sont, le point auxiliaire est lui-même dans le cadre, parce qu'en définitive ces circonstances étant les plus fréquentes, il faudrait en conclure que la méthode est en général impraticable. Ce que je dis de ce problème, il faut le répéter, sans exception, de tous les problèmes relatifs au cône, au cylindre et aux surfaces de révolution et de tous les problèmes dépendant de la recherche d'un point auxiliaire.

De bonne foi, peut-on comparer cette méthode avec celle qui consiste à projeter la droite et le cône sur un plan parallèle à l'axe du cône pour obtenir tout de suite le point cherché à l'aide d'une section circulaire? c'est-à-dire en résumé à faire deux changements de plans successifs dont le dernier rende le cône vertical. Ces procédés, si bien appliqués par les praticiens qui ont peu de connaissances scientifiques, sont donc ceux qui conviennent aussi le mieux à de plus instruits, et si l'objection 4° était fondée, cela reviendrait à n'admettre aucun discernement ni appréciation mathématique chez ceux qui doivent le plus en avoir.

Note du Rédacteur. Quand faut-il changer de plans de projections, faire des rabattements, des rotations? Réponse: quand vous le jugerez commode. Quand cela est-il commode? Il n'y a pas de réponse à faire à telle question. Toutes les épures de charpente ne roulant que sur des polyèdres, on y fait continuellement des changements de plans de projections (*), et de tout temps on a fait des épures de charpente. Où est donc la nouveauté de ce système de changements dont on fait tant de bruit? La clarté et la simplicité d'une épure dépendent du discernement de l'opérateur, et il n'y a pas de règle pour donner ce discernement. Au propre comme au figuré, il faut éviter, autant que possible, les changements de plan, user de ce moyen avec économie, et ne s'en servir, style de prospectus, que lorsque le besoin s'en fait sentir.

(*) *Exemple :* L'épure des pannes et tasseaux de l'empanon déversé et délardé

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. II, 1814-15, pages 42.

1. Soit proposée la fraction continue

$$\varphi = \cfrac{v}{\varpi + \cfrac{v'}{\varpi' + \cfrac{v''}{\varpi'' + \cfrac{v'''}{\varpi''' + \ldots}}}}$$

Formons ces deux séries V, V', V'', V''', etc., W, W', W'', W'''; d'après ces relations

$$\begin{array}{ll}
V = 0, & W = 1, \\
V' = v, & W' = \varpi W, \\
V'' = \varpi' V' + v' V, & W'' = \varpi' W' + v' W, \\
V''' = \varpi'' V'' + v'' V', & W''' = \varpi'' W'' + v'' W', \\
V^{\text{IV}} = \varpi''' V''' + v''' V'', & W^{\text{IV}} = \varpi''' W''' + v''' W'', \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

on aura

$$\frac{V}{W} = 0,$$

$$\frac{V'}{W'} = \frac{v}{\varpi},$$

$$\frac{V''}{W''} = \cfrac{v}{\varpi + \cfrac{v'}{\varpi'}},$$

$$\frac{V'''}{W'''} = \cfrac{v}{\varpi + \cfrac{v'}{\varpi' + \cfrac{v''}{\varpi''}}},$$

et ainsi de suite.

On en déduit

$$\begin{aligned}
VW' - V'W &= -\varpi,\\
V'W'' - V''W' &= +\varpi\varpi',\\
V''W''' - V'''W'' &= -\varpi\varpi'\varpi'',\\
V'''W^{\text{iv}} - V^{\text{iv}}W''' &= +\varpi\varpi'\varpi''\varpi''',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ainsi dans la série

$$\frac{\varpi}{WW'} - \frac{\varpi\varpi'}{W'W''} + \frac{\varpi\varpi'\varpi''}{W''W'''} - \frac{\varpi\varpi'\varpi''\varpi'''}{W'''W^{\text{iv}}} + \ldots,$$

Le premier terme est $\frac{V'}{W'}$;

La somme des deux premiers termes égale $\frac{V''}{W''}$;

La somme des trois premiers termes égale $\frac{V'''}{W'''}$;

La somme des quatre premiers termes égale $\frac{V^{\text{iv}}}{W^{\text{iv}}}$;

Et ainsi de suite.

Cette série, soit qu'elle se termine ou qu'elle se prolonge à l'infini, exprime la valeur de φ et aussi la différence de φ et des fractions approchées

$$\frac{V'}{W'},\quad \frac{V''}{W''},\quad \frac{V'''}{W'''},\ldots.$$

Il est facile de voir qu'on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi W'' - V'' &= \omega'(\varphi W' - V') + \varpi'(\varphi W - V),\\
\varphi W''' - V''' &= \omega''(\varphi W'' - V'') + \varpi''(\varphi W' - V'),\\
\varphi W^{\text{iv}} - V^{\text{iv}} &= \omega'''(\varphi W''' - V''') + \varpi'''(\varphi W'' - V''),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Application.

Soit

$$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}} = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots$$

Réduite en fraction continue, on a

$$\varphi = \cfrac{1}{u - \cfrac{\frac{1}{3}}{u - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{u - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{u - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{u - \ldots}}}}}$$

ainsi

$$v = 1, \quad v' = \frac{1}{3}, \quad v'' = -\frac{4}{15}, \quad v''' = \frac{9}{35}, \quad v^{\text{iv}} = -\frac{16}{63}, \ldots,$$

$$w = w' = w'' = w''' = w^{\text{iv}} = \ldots = u;$$

$$\text{V} = 0,$$

$$\text{V}' = 1,$$

$$\text{V}'' = u,$$

$$\text{V}''' = u^2 - \frac{4}{15},$$

$$\text{V}^{\text{iv}} = u^3 - \frac{11}{21} u,$$

$$\text{V}^{\text{v}} = u^4 - \frac{7}{9} u^2 + \frac{64}{945},$$

$$\text{V}^{\text{v}} = u^5 - \frac{34}{33} u^3 + \frac{1}{5} u,$$

$$\text{V}^{\text{vii}} = u^6 - \frac{50}{39} u^4 + \frac{283}{715} u^2 - \frac{256}{15015},$$

. . . .

$$W = 1,$$
$$W' = u,$$
$$W'' = u^2 - \frac{1}{3},$$
$$W''' = u^3 - \frac{3}{5}u,$$
$$W^{\text{IV}} = u^4 - \frac{6}{7}u^2 + \frac{3}{35},$$
$$W^{\text{V}} = u^5 - \frac{10}{9}u^3 + \frac{5}{21}u,$$
$$W^{\text{VI}} = u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}u^2 - \frac{5}{231},$$
$$W^{\text{VII}} = u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u,$$
....

Il est facile de voir que les V et les W sont tous des fonctions entières de u; que $V^{(m)}$ est de degré $m-1$, et que les puissances $m-2$, $m-4$, $m-6$ manquent; que $W^{(m)}$ est de degré m, et les puissances $m-1$, $m-3$, $m-5$, etc., manquent; et l'on a

$$\varphi = \frac{1}{WW'} + \frac{1}{3W'W''} + \frac{2.2}{3.3.5W''W'''} + \frac{2.2.3.3}{3.3.5.5.7W'''W^{\text{IV}}} + \frac{2.2.3.3.4.4}{3.3.5.5.7.7.9W^{\text{IV}}W^{\text{V}}} + \ldots,$$

et aussi généralement

$$\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} = \frac{2.2.3.3\ldots m.m}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)W^{(m)}W^{(m+1)}} + \frac{2.2.3.3\ldots(m+1)(m+1)}{3.3.5.5\ldots(2m+1)(2m+3)W^{(m+1)}W^{(m+2)}} + \text{etc.}$$

Si l'on développe $\frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ en une série descendante, son

premier terme sera

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(2m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)},$$

car le premier terme de $W^{(m)}$ est u^m et celui de $W^{(m+1)}$ est $u^{(m+1)}$.

Ainsi $\varphi W^{(m)}$ est égal à une fonction entière $V^{(m)}$, plus à une série infinie dont le premier terme est égal à

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)}.$$

Cette propriété de la fonction $W^{(m)}$ est importante dans la recherche des intégrales par approximation.

GNOMONIQUE.

Construction d'un cadran solaire à style quelconque, en s'assujettissant à la condition de n'employer que des droites pour les lignes horaires et les lignes de déclinaison;

Par M. PEAUCELLIER.

A, B, C, a, b, c représentant les angles et les côtés opposés d'un triangle sphérique quelconque, les analogies de Neper conduisent aisément à la formule

$$\cot A \sin C = \sin b \cot a - \cos b \cos C.$$

Appliquons cette formule au triangle formé par les arcs de grands cercles passant par le pôle, le zénith et la position actuelle du Soleil. Soient D et Az la déclinaison et l'azimut du Soleil, P l'angle horaire et enfin L la latitude

du lieu. On pourra poser

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - Az, \\ C &= P, \\ a &= 90^\circ - D, \\ b &= 90^\circ - L, \end{aligned}$$

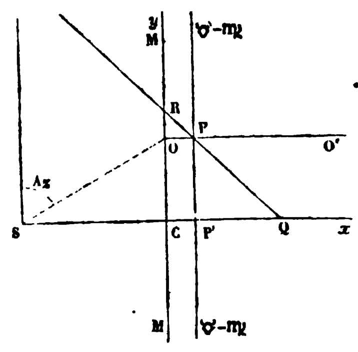
ce qui donne l'expression

$$-\cot Az \sin P = \cos L \operatorname{tang} D - \sin L \cos P,$$

ou bien

$$\cot Az = -\frac{\cos L}{\sin P} \operatorname{tang} D + \frac{\sin L}{\operatorname{tang} P}.$$

Cela posé, nous allons résoudre le problème pour le cas particulier où le style est vertical et le plan du cadran parallèle au méridien. Il sera facile ensuite de généraliser la solution.



Soient S la projection du style, MM la trace sur l'horizon du plan du cadran, que nous supposons rabattu autour de cette droite. L'ombre portée par le style sur le plan du cadran sera une droite OO′ perpendiculaire à MM. Le point C étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur la même droite, il est clair que l'on pourra poser $CO = \cot Az$, pourvu que l'on conserve

dans la suite la distance SC pour unité linéaire. Cela étant, si l'on prend sur OO′ une longueur OP = tang D, la formule précédente devient

$$CO = -\frac{\cos L}{\sin P} OP + \frac{\sin L}{\tang P}$$

ou

$$y = -\frac{\cos L}{\sin P} x + \frac{\sin L}{\tang P},$$

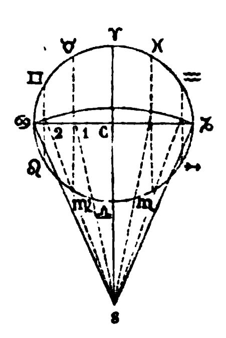
en considérant OP et CO comme les coordonnées du point P. Il en résulte que le lieu des points P obtenus à la même heure pendant le cours d'une année est une droite QR.

Le point P peut être considéré comme résultant de l'intersection de trois droites : l'ombre OO′ du style, la droite PP′ parallèle à MM et distante de cette droite d'une longueur égale à tang D, enfin la ligne horaire QR. D'où il résulte qu'en traçant une série de droites telles que PP′ et correspondant aux diverses valeurs de tang D, de même que les lignes horaires QR correspondant aux différentes heures de la journée, on obtiendra un réseau qui permettra de lire l'heure à un instant quelconque. Il suffira de voir sur quelle ligne horaire se trouve le point P, intersection de la ligne de déclinaison actuelle PP′ avec l'ombre OO′ du style.

Tracé des lignes de déclinaison. On a vu qu'elles sont parallèles à la droite MM et a une distance égale à la tangente de la déclinaison variable du Soleil. L'*Annuaire* fournit ces valeurs pour chaque jour de l'année; mais on peut se contenter des déclinaisons relatives à l'entrée du Soleil dans les différents signes du zodiaque. Voici comment on peut les construire géométriquement.

De part et d'autre de la droite SC, prise pour unité linéaire, on fait au point S un angle égal à la déclinaison

maximum 23° 28′. On élève en C une perpendiculaire sur SC et on la limite aux droites précédentes. Sur ♋♑



comme diamètre, on décrit un cercle que l'on divise en douze parties égales correspondant aux douze signes. On joint les points de division deux à deux et parallèlement à SC. Ces droites rencontrent l'arc de cercle décrit de S comme centre avec S♋ pour rayon en différents points qu'il suffit de joindre à S pour avoir les déclinaisons correspondantes. Les tangentes seront donc C1, C2, etc., qu'il faudra reporter, dans la figure précédente, sur CQ à partir de C à droite pour les valeurs positives de tang D, à gauche pour les valeurs négatives.

Tracé des lignes horaires. On a vu que leur équation était

$$y = -\frac{\cos L}{\sin P}x + \frac{\sin L}{\tang P}.$$

Pour avoir les points où elles coupent la ligne MM, il suffit de faire $x = 0$, ce qui donne l'expression $\frac{\sin L}{\tang P}$ ou $\sin L \cot P$ que l'on construit immédiatement, en prenant pour P les diverses valeurs 15, 30, 45 degrés, etc., si l'on veut les lignes horaires, espacées d'heure en heure. Pour avoir les points où elles coupent la droite Cx, on

fera $y = 0$, ce qui donne l'expression $\tang L \cos P$, dont la construction est tout aussi facile.

Nous n'insisterons pas davantage sur le tracé de ces droites, non plus que sur quelques-unes de leurs propriétés que l'on trouve aisément. Remarquons toutefois que l'enveloppe des lignes horaires est une hyperbole dont l'équation est

$$y^2 - x^2 \cos^2 L + \sin^2 L = 0.$$

Cas général où le style et le plan du cadran sont quelconques.

Quelle que soit la direction du style, il existe toujours un point de la Terre pour lequel elle est verticale. Concevons à côté du style un plan parallèle au méridien de ce point et portant le tracé dont on vient d'exposer les détails ; ce cadran fictif donnerait l'heure du lieu pour lequel la direction du style est verticale. Il donnerait l'heure même du lieu où il se trouve, si, au lieu de tracer les lignes horaires correspondant à 15, 30, 45 degrés, etc., on trace celles qui correspondent à $15° + \lambda$, $30° + \lambda$, $45° + \lambda$, etc., λ étant la différence de longitude des deux lieux. Ces lignes seraient marquées I, II, III, etc., et donneraient les heures entières.

Enfin, ce plan fictif peut être remplacé par un plan tout à fait arbitraire en prenant pour réseau de droites sur ce plan la perspective du réseau précédent, l'œil étant supposé en un point quelconque du style. Cette propriété se démontre aisément.

Les lignes de déclinaison étant parallèles, dans le premier cas que nous avons considéré, leur perspective sur un plan devient un faisceau de droites passant par un point déterminé. Les lignes horaires deviennent les tan-

gentes à une courbe du second degré qui, dans des cas particuliers, devient un cercle.

Le point d'où on fait la projection conique pouvant être choisi arbitrairement sur le style, on voit qu'il existe une infinité de solutions du problème pour un plan et un style donnés.

Si l'on voulait n'employer que des cercles, il suffirait de prendre les réciproques des droites, le pôle étant à l'intersection du plan et du style. Tous les cercles passeraient par ce point.

On voit que la construction de ce cadran à style quelconque conduit à des opérations de géométrie descriptive qui, au premier abord, semblent assez compliquées. Cependant une étude un peu plus approfondie du problème fait ressortir de nombreuses simplifications; on peut même, à la rigueur, se dispenser complétement du plan auxiliaire dont on a parlé plus haut. La première application mettrait ces faits en évidence.

Enfin, il resterait à considérer bien des cas particuliers présentant tous plus ou moins d'intérêt; entre autres on peut citer le gnomon ordinaire, le comparer avec le cadran horizontal dit astrolabe, etc. Le lecteur remplira sans difficulté les lacunes de ce petit travail.

Note du Rédacteur. Notre expédition en Tauride a fait voir combien il est nécessaire en campagne de savoir tracer des cadrans solaires. La méthode aussi simple qu'ingénieuse qu'on vient de lire est bien propre à propager ce genre de connaissances et se recommande comme telle aux professeurs de cosmographie et de géométrie descriptive. Nous rappelons à cette occasion l'ouvrage si complet de M. Born, mort général d'artillerie le 21 mars 1854. (Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 483; 1846.)

———

PROBLÈME SUR LES COTÉS D'UN TRIANGLE ÉLEVÉS A DES PUISSANCES DONNÉES;

PAR M. POUDRA.

(Les signes au-dessus ou au-dessous des lettres α, 6, γ, δ et o sont des accents.
Les signes au-dessus des lettres a, b, c seulement sont des exposants.)

1°. Partager chaque côté d'un triangle ABC en parties proportionnelles aux puissances successives des côtés adjacents.

2°. Déterminer, dans l'intérieur de ce triangle, la suite des points qui sont tels, que les perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les côtés soient entre elles comme les puissances successives de ces côtés, de sorte que si on les joint aux sommets du triangle par des droites, sa surface sera partagée en trois autres triangles dont les surfaces seront entre elles comme les puissances successives des côtés respectifs du triangle donné.

3°. Trois nombres a, b, c étant représentés par les trois côtés d'un triangle ABC, on demande de trouver géométriquement la puissance m à laquelle il faut les élever également pour qu'il existe entre eux la relation

$$a^m + b^m = c^m,$$

ou, généralement,

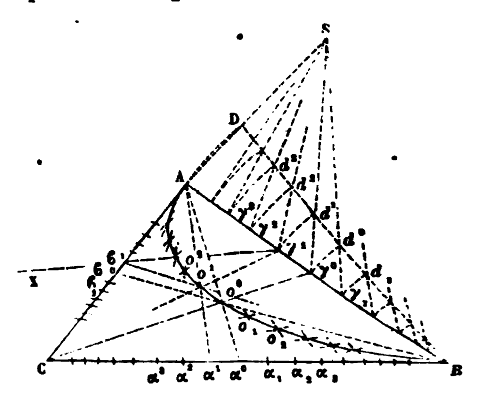
$$Aa^m + Bb^m = Cc^m.$$

Solutions.

1°. Soit ABC le triangle dont les côtés respectifs opposés sont a, b, c. Considérons d'abord le côté $AB = c$ et soient γ^0 son milieu et γ^1 son intersection avec la bissectrice de l'angle C opposé. On aura déjà

$$\frac{\gamma^0 A}{\gamma^0 B} = \frac{b^0}{a^0} = 1, \quad \frac{\gamma^1 A}{\gamma^1 B} = \frac{b^1}{a^1}.$$

Par le sommet B menons une droite quelconque BD sur laquelle nous portons BD = BA, $Bd^0 = B\gamma^0$,



$Bd^1 = B\gamma^1$. Les deux droites AD et $\gamma^0 d^1$ prolongées déterminent le point S. Traçons la droite $S\gamma^1$ qui coupe BD en d^2. Sur AB, on rapporte $B\gamma^2 = bd^2$, on tire la droite $S\gamma^2$ qui coupe BD en d^3. La droite Sd^3 donne $B\gamma^3$. La droite $S\gamma^3$ déterminera d^4 et, sur AB on rapporte $B\gamma^4 = Bd^4$, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour avoir des divisions analogues sur AB entre γ^0 et B, on porte sur BD la longueur $Bd^0 = B\gamma^0$, on tire Sd^0 ce qui donne sur AB le point γ_1. On prend $Bd_1 = B\gamma_1$. La droite Sd_1 détermine sur AB le point γ_2, et ainsi de suite indéfiniment.

Les deux divisions sur BA et BD sont perspectives réciproques pour le point de vue S. Donc on a entre quatre points de l'une et les homologues de l'autre le rapport anharmonique

$$\frac{Dd^1}{Bd^1} : \frac{Dd^2}{Bd^2} = \frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} : \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^0}{a^0} : \frac{b^1}{a^1} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

or

$$Dd^1 = A\gamma^1,\ Bd^1 = B\gamma^1,\ Dd^2 = A\gamma^2 = \frac{Bd^2}{B\gamma^2}.$$

Donc

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} : \frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

et comme

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

il en résulte

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

En prenant les points γ^1, γ^2 et les homologues d^2, d^3 on trouverait de même

$$\frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

et ainsi de suite

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \quad \frac{A\gamma^5}{B\gamma^5} = \frac{b^5}{a^5}, \ldots;$$

donc on aura

$$\frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} = \frac{b^0}{a^0}, \quad \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{b^2}, \quad \frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \ldots.$$

On trouverait de même

$$\frac{A\gamma_1}{B\gamma_1} = \frac{b^{-1}}{a^{-1}} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{A\gamma_2}{B\gamma_2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{A\gamma_3}{B\gamma_2} = \frac{a^3}{b^3}, \ldots.$$

On diviserait de même les côtés a et b.

2°. Chacun des côtés du triangle ABC étant ainsi di-

Il y a entre deux rayons consécutifs assez d'intervalle pour laisser passer deux mouches. L'ensemble de ces rayons forme la ruche.

2. Concevons les six sommets de l'ouverture hexagonale ainsi que le point a, et faisant mouvoir le point b le long de l'arête Bb, construisons les rhombes comme précédemment. A chaque position du point b correspond un autre solide alvéolaire.

Il faut démontrer que ces solides sont équivalents et que l'aire varie. Cette aire est un minimum, lorsque les trois angles plans en a sont égaux, ce qui entraîne la relation que nous avons donnée ci-dessus (*voir* la solution de feu le capitaine Jacob, t. I[er], p. 160).

3. *Note historique*. Le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont les seuls polygones réguliers qui, pris isolément, puissent remplir un espace sans laisser de vide, et de ces trois polygones l'hexagone pour la même aire a le moindre contour. C'est le polygone que les abeilles ont choisi pour l'ouverture de leurs cellules. Pappus, géomètre du IV[e] siècle avant Jésus-Christ, en a déjà fait l'observation ; mais les premières observations précises que nous ayons sur l'anatomie de l'insecte et la construction géométrique de l'alvéole sont dues à Maraldi (Jacques-Philippe), astronome de l'Observatoire royal, que son oncle, l'illustre Cassini, avait fait venir en 1687 de Perinaldo, près de Nice. Ces célèbres et curieuses observations ont été faites sur des ruches appartenant à Cassini placées dans le jardin attenant au bâtiment (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1712, p. 297) (*). Ayant trouvé que les trois angles plans en a étaient égaux, il

(*) L'Observatoire était alors près de Paris, mais dehors. Un tel emplacement est aujourd'hui impérieusement exigé par les besoins de la science. Un édifice, modèle Pulkowa, serait un monument digne d'un règne dont les débuts sont si glorieux.

en conclut que cet angle devait être égal à 109° 28′; l'ayant mesuré, il trouva 110 degrés, différence qu'il attribue aux erreurs inévitables dans de telles opérations. Il compta soixante cellules environ dans chaque rayon; A*a* avait 5 lignes et AB 2 lignes de longueur. Le célèbre Réaumur poussa ces recherches plus loin dans son *Histoire des Insectes*, d'une lecture si attachante (t. V) (*). Il proposa au géomètre Kœnig (Samuel), correspondant de l'Académie des Sciences, connu par ses démêlés avec Maupertuis, de chercher le rhombe qui satisfasse au minimum d'aire. Appliquant la méthode du *calcul* infinitésimal, Kœnig trouve que l'angle obtus devait avoir 109° 26′. Réaumur manda ce résultat à Maclaurin. L'éminent géomètre résolut le problème par la méthode de sa *Géométrie infinitésimale*, et trouva pour l'angle du rhombe 109° 28′ 16″. Ce beau travail est inséré dans le tome XLII, année 1742, des *Transactions philosophiques*. Le Mémoire est intitulé : *Of the bases of the cells wherein the Bees deposite their honey* (Sur les bases des cellules où les abeilles déposent leur miel). Il fait partie d'une Lettre du 30 juin 1743, adressée à Martin Folkes, président de la Société royale. Ainsi les abeilles que Virgile a si admirablement chantées construisaient déjà de son temps, un problème dont la solution théorique était réservée au siècle des Newton et des Leibnitz. Donner un tel instinct à quelques molécules organisées! La toute-puissance divine se révèle dans l'infiniment grand, se révèle dans l'infiniment petit. *Mens agitat molem,* disait l'antiquité; mais le monde des infiniment petits en his-

---

(*) Pourquoi ne fait-on pas une nouvelle édition rectifiée et complétée de cette délicieuse production? J'en dis autant du *Spectacle de la nature*, de Pluche, que de Blainville aimait beaucoup. Ouvrages très-instructifs, d'une haute moralité et très-amusants : qualités dont la réunion est extrêmement rare.

toire naturelle et dans la science des nombres est une conquête des temps modernes. La théorie des quantités naissantes est similaire à celle de l'embryogénie. Les deux sciences doivent et devront leurs principaux progrès aux études infinitésimales. Leibnitz a mis entre les mains des géomètres un microscope qui nous découvre les propriétés d'une série indéfinie d'êtres numériques infiniment petits, se produisant les uns les autres suivant des lois de génération déterminées et certaines. Le microscope optique tend au même but pour les êtres organisés, ainsi que le polarimètre pour les corps inorganiques (*). Curieux de savoir si l'on rencontre dans la nature une forme analogue à celle que construisent les abeilles, je dois au savant professeur M. Cabart les renseignements suivants:

L'oxydule de cuivre cristallise sous forme de dodécaèdres rhomboïdaux, ayant huit angles trièdres, formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Les cristaux du grenat, de la pyrite de fer sont du même genre. L'eau glacée, d'après les observations de M. Clarke, physicien anglais, cristallisant dans le système rhomboédrique, présente deux trièdres formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Cette sorte de cristallisation est très-rare. Il est probable, d'après les calculs de M. Bravais sur les halos et les parhélies, que cette cristallisation existe dans les cristaux de neige. Les cristaux rhomboédriques de la chaux carbonatée ne présentent pas ces angles de 120 degrés.

(*) Leibnitz, dans une Lettre à Huyghens, dit: « J'aime mieux un Leuvenhoek qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartésien qui me dit ce qu'il pense. » Excellente leçon donnée aux métaphysiciens par un métaphysicien, mais géomètre.

SOLUTION DE LA QUESTION 311;

PAR M. E. COMBESCURE.

Déterminer l'aire d'un hyperboloïde de révolution à une nappe limitée par deux parallèles, connaissant la distance de ces deux parallèles, leurs rayons et la portion de génératrice rectiligne qu'ils interceptent.

En désignant par r le rayon d'un parallèle quelconque placé à la distance z du cercle de gorge, l'équation de l'hyperboloïde de révolution est

$$r^2 = a^2 + m^2 z^2,$$

et l'élément de surface de l'hyperboloïde compris entre deux parallèles distants de dz a pour expression

$$d\lambda = 2\pi r d\sigma,$$

où $d\sigma$ représente l'élément de l'hyperbole génératrice, en sorte que

$$d\sigma = \sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{dz\sqrt{a^2 + n^2 z^2}}{r},$$

$$[n^2 = m^2(1 + m^2)].$$

On a donc

$$d\lambda = 2\pi\, dz\sqrt{a^2 + n^2 z^2},$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{\pi}{n}\left\{\begin{array}{l} nz_2\sqrt{a^2 + n^2 z_2^2} - nz_1\sqrt{a^2 + n^2 z_1^2} \\ + a^2 \log \dfrac{nz_2 + \sqrt{a^2 + n^2 z_2^2}}{nz_1 + \sqrt{a^2 + n^2 z_1^2}} \end{array}\right\},$$

z_2, z_1 étant les z des parallèles qui limitent la portion de surface considérée.

Si r_2, r_1 désignent les rayons de ces mêmes parallèles, en sorte que

$$r_2^2 = a^2 + m^2 z_2^2,$$
$$r_1^2 = a^2 + m^2 z_1^2,$$

l'élimination de m^2 entre ces deux équations donne, en supposant z_2 et z_1 positifs,

$$(1) \qquad \frac{z_2}{z_1} = \sqrt{\frac{r_2^2 - a^2}{r_1^2 - a^2}}.$$

Soient g la portion de génératrice rectiligne interceptée; $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ les coordonnées de ses extrémités, de façon que

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = g^2;$$

d'où, en posant

$$g^2 - (h^2 + r_1^2 + r_2^2) = 2p, \quad (z_2 - z_1 = h),$$

$$(2) \qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 = p.$$

Les extrémités de g se projetant sur une même tangente au cercle de gorge, on a

$$x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi = a,$$
$$x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi = a,$$

φ étant un angle arbitraire dont l'élimination donne

$$(3) \qquad x_1 y_2 - y_1 x_2 = \pm a\sqrt{g^2 - h^2}.$$

En ajoutant les équations (2) et (3) après les avoir élevées au carré, il vient

$$r_1^2 r_2^2 = a^2 (g^2 - h^2) + p^2;$$

d'où

$$a^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 - p^2}{g^2 - h^2}.$$

Substituant dans l'équation (1) cette valeur de a^2 et faisant, pour abréger,

$$p + r_1^2 = p_1, \quad p + r_2^2 = p_2,$$

il vient

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p_2}{p_1};$$

d'où et de

$$z_2 - z_1 = h$$

on déduit

$$z_2 = \frac{hp_2}{p_2 - p_1}, \quad z_1 = \frac{hp_1}{p_2 - p_1}.$$

On a ensuite

$$m^2 = \frac{r_1^2 - a^2}{z_1^2},$$

c'est-à-dire, à cause de $a^2 = \frac{p_1 p_2 - p(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2}$,

$$m^2 = \frac{(p_2 - p_1)^2}{h^2(p_2 + p_1)}.$$

z_2, z_1, a^2 et m^2 étant connus en p, p_1, p_2, h, ou si l'on veut en r_1, r_2, g et h, on n'aura plus qu'à substituer leurs expressions précédentes dans celle de λ pour répondre complétement à la question. La substitution en elle-même ne présente aucune particularité digne d'être signalée.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. RUBBINI (DE NAPLES).

Presque en même temps je viens de recevoir le numéro d'août de vos *Annales* et celui du 2 juillet des *Comptes*

rendus de votre Académie des Sciences. Dans le premier je trouve à la page 305 la question :

« Construire la surface

(1) $$e^{r} = \frac{\cos x}{\cos y} \quad (e = \text{base népérienne}).$$ »

(E. CATALAN.)

Dans le second, à la page 35, je trouve résolue la même question par l'auteur lui-même.

Or, Monsieur, tout en respectant le talent supérieur de votre savant, je ne puis m'abstenir de réclamer, en faveur de mon professeur M. Padula, une priorité qui lui est due au sujet de l'équation ci-dessus.

Ce savant napolitain s'était déjà occupé depuis 1852 (voir *Rendiconto della reale Accademia delle Scienze di Napoli*, n° 3, 1852) de la même question qui avait conduit M. Catalan à l'équation (1), à savoir de trouver sous forme finie les équations de deux surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et opposés et qui jouissent en même temps de la propriété qu'une partie quelconque de la surface est un minimum entre toutes les surfaces qui ont même contour.

M. Padula commence sa *Note* par un renseignement des quatre surfaces jouissant des propriétés énoncées, et découvertes, la première par M. Catalan (l'hélicoïde gauche); la seconde (surface de rotation dont la méridienne est la chaînette homogène) par M. de Morgan, et les deux autres par M. Roberts (Michel). Ensuite il se propose la question : Chercher si parmi les surfaces dont la génératrice se meut parallèlement à elle-même, il s'en trouve quelqu'une dont les rayons de courbure soient égaux et opposés. Une autre question plus générale (celle sur les surfaces produites par le mouvement d'une courbe plane) avait conduit notre auteur à la question spéciale ci-dessus énoncée.

Or M. Padula trouve pour solution de son problème

$$(2) \qquad \frac{z}{m} = l \cos \frac{y\sqrt{1+a^2}}{m} - l \cos \left(\frac{x}{m} - \frac{ay}{m}\right),$$

a étant une constante arbitraire et *m* une autre constante qui satisfait à la condition

$$(3) \qquad -\frac{1+f'^2}{f''} = m,$$

[$y = 0$, $z = f(x)$ étant les équations de la génératrice supposée plane sans détruire la généralité de la question].

De cette dernière équation (3) il déduit la propriété que *la projection sur l'axe des* x *du rayon de courbure en un point quelconque de la génératrice est constante.*

L'équation (1) de M. Catalan se déduit de l'équation (2) de M. Padula, posant en celle-ci $a = 0$.

Ce dernier savant, en outre, trouve une autre surface qui dépend de transcendantes jusqu'à présent inconnues et dont l'équation est de la forme suivante :

$$z = f(x - \varphi) + \psi,$$

$$\varphi = \frac{\gamma + ay}{1+n^2} - \frac{m}{1+n^2} l \cos \frac{(y+\beta)\sqrt{1+a^2+n^2}}{m},$$

$$\psi = \frac{\gamma' - any}{1+n^2} - \frac{m}{1+n^2} l \cos \frac{(y+\beta)\sqrt{1+a^2+n^2}}{m}$$

(la fonction f étant déterminée par l'équation

$$mnl \frac{nf-1}{\sqrt{1+f'^2}} - m \text{ arc tang} f' = (1+n^2)u + h,$$

et u représente la variable à laquelle se rapporte la fonction f).

Enfin l'analyse de M. Padula est tout à fait directe et sans tâtonnements.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN BICARRÉS.

Waring a énoncé la conjecture que tout nombre est la somme de 19 bicarrés, en admettant le zéro comme bicarré. Jacobi a exprimé le désir de voir contrôler cette conjecture. M. C.-A. Bretschneider, professeur à Gotha, a entrepris ce contrôle pour les nombres de 1 à 4100. Ses Tables sont insérées dans le *Journal* de Crelle (t. XLVI, p. 1, 1853).

En résumé, il a trouvé que dans les nombres de 1 à 4100 il y en a :

28	décomposables en	2 bicarrés.
75	—	3
158	—	4
271	—	5
375	—	6
416	—	7
393	—	8
353	—	9
322	—	10
306	—	11
290	—	12
286	—	13
284	—	14
282	—	15
166	—	16
56	—	17
24	—	18
7	—	19

Les sept en 19 bicarrés sont 79, 159, 239, 319, 399, 479 (*), 559.

Ainsi

$$79 = 4.2^4 + 15.1^4,$$
$$159 = 4.2^4 + 1.3^4 + 14.1^4,$$
$$239 = 4.2^4 + 2.3^4 + 13.1^4,$$
$$319 = 15.1^4 + 3.2^4 + 1.3^4 = 4.2^4 + 3.3^4 + 12.1^4,$$
$$399 = 14.1^4 + 3.2^4 + 1.3^4 + 1.4^4 = 11.1^4 + 4.2^4 + 4.3^4,$$
$$479 = 13.1^4 + 3.2^4 + 2.3^4 + 1.4^4 = 10.1^4 + 4.2^4 + 5.3^4,$$
$$559 = 15.1^4 + 2.2^4 + 2.4^4 = 12.1^4 + 3.2^4 + 3.3^4 + 1.4^4$$
$$= 9.1^4 + 4.2^4 + 6.3^4.$$

Ces sept nombres ne peuvent se décomposer en moins de 19 bicarrés.

Cette identité

$$3^4 - 5.2^4 = 1$$

a facilité le calcul.

LETTRE SUR LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE.

« Mon cher monsieur Terquem,

» Lorsque je reçus, il y a une quinzaine de jours, la nouvelle livraison des *Nouvelles Annales,* je vous écrivis immédiatement pour protester au nom des géomètres contre les objections absolument dénuées de fondement que l'on élevait sur la théorie de la rotation donnée par M. Poinsot. N'ayant pas alors sous les yeux le Mémoire de l'illustre géomètre, je me bornais à deviner d'après mes souvenirs, par quel malentendu l'auteur de la Note avait pu se méprendre sur le sens des expressions em-

(*) Par erreur on a mis 379.

ployées et trouver une erreur où chacun n'avait aperçu jusqu'ici qu'un modèle de rigueur et d'élégance. Je viens de relire les premières pages de ce beau travail, et j'avoue qu'il me semble suffisant de conseiller à vos lecteurs d'en faire autant; c'est seulement pour ceux qui n'auraient pas le moyen de recourir au texte que je vous demande place pour quelques explications.

» J'ouvre le *Journal* de M. Liouville, t. XVI, p. 43, et je trouve un paragraphe intitulé : *Des forces centrifuges qui naissent de la rotation.* C'est celui-là qu'il faut lire pour apprécier la valeur des objections dont je parle.

On y trouvera d'abord la démonstration géométrique d'un théorème bien connu dont l'énoncé se lit page 44 (lignes 14 à 16) :

« La force centripète nécessaire pour qu'un point
» puisse tourner en cercle avec une vitesse u est expri-
» mée par le carré de cette vitesse divisé par le rayon du
» cercle. »

» M. Poinsot ajoute, il est vrai : « La même expres-
» sion convient à un mouvement curviligne quelcon-
» que... en prenant pour r le rayon du cercle osculateur à
» la courbe décrite au point que l'on considère. »

» Cette remarque, inutile pour ce qui va suivre, est placée là pour l'instruction du lecteur, mais vous connaissez l'adage : *Quod abundat, non vitiat.* Elle est donc parfaitement légitime, et cependant, s'il fallait absolument conjecturer, je me hasarderais à dire que c'est à cause d'elle que M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris par tout le monde.

» Je lis plus loin, page 45 :

« Dans la question qui nous occupe... il n'y a pas de
» force centripète qui intervienne pour faire tourner li-
» brement chaque molécule autour de l'axe (instantané)
» OZ, mais je considère que si cette force n'y est point,

» RIEN N'EMPÊCHE de la supposer, pourvu qu'on en sup-
» pose une égale et contraire. »

» Cette force centripète que rien n'empêche de supposer, est, on le voit, celle qui ferait décrire à la molécule *un cercle rigoureux*. Rien n'empêche évidemment de la supposer, pourvu qu'on introduise une force égale et contraire qui est la force centrifuge.

» Maintenant l'objection de M. S.-G. se réduit à ceci :

» Pourquoi introduisez-vous la force nécessaire pour faire tourner la molécule en rigueur autour de l'axe instantané? Je préférerais vous voir calculer la force centripète réelle, et, pour cela, déterminer le rayon de courbure de la trajectoire, très-différent de celui du cercle dont vous parlez.

» A ceci on peut répondre : M. Poinsot introduit cette force parce que c'est celle-là qui est commode pour son raisonnement tel qu'il veut le faire, et que rien n'empêche d'introduire dans un système deux forces égales et contraires quelles qu'elles soient. Ceci est si vrai, que l'on pourrait, si on le désirait, introduire la force que M. S.-G. nomme la véritable force centripète, pourvu que l'on adjoignît la véritable force centrifuge ; mais je n'aperçois pas à quoi cette introduction pourrait servir, et il semble que la chaine des raisonnements, rompue alors dès le début, ne pourrait plus se renouer.

» J. BERTRAND. »

Note du Rédacteur. M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris de *tout le monde*. L'explication n'est donc pas superflue, vu que ce *tout le monde* comprend des esprits distingués. La force centripète que M. Poinsot évalue est une force *artificielle* pour ainsi dire, très-commode pour l'objet que l'illustre géomètre avait en vue, mais ce n'est pas la force centripète *réelle*

ou telle qu'elle existe réellement. M. Poinsot fait bien allusion à cette distinction. La discussion actuelle montre bien que cette allusion n'est pas suffisante. L'axe instantané de rotation instantanée ne serait-il pas plus convenablement désigné sous le nom de *droite de repos instantané?* car, à vrai dire, il n'y a pas de rotation. Chaque point tourne autour d'une droite élevée au centre de courbure perpendiculairement au plan osculateur relatif à la trajection décrite par ce point. L'ensemble de ces perpendiculaires est la surface gauche de rotation instantanée pour ce point. Chacun a la sienne. Dans un corps solide en mouvement, trois de ces surfaces déterminent toutes les autres.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DES THÉORÈMES DE M. STEINER

Énoncés sous les nos 5, 6 et 7

(voir t. XIV, p. 141 et 142);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

---

1. Pour démontrer ces théorèmes, il faut commencer par rappeler quelques propositions préliminaires qui sont une conséquence très-simple de la théorie des *polaires* et du principe de *correspondance anharmonique* récemment exposé par M. Chasles dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences.

2. Soient données sur un plan deux coniques Σ, Σ' et une droite arbitraire L. p et p' étant les pôles de cette droite dans les deux coniques, la droite pp', qui les joint, est unique et déterminée. J'appellerai cette droite la *réciproque* de L.

Par un point quelconque O de L, soient menées des droites OL', OL'', etc.; leurs pôles respectifs q, q', r, r', etc., seront distribués sur les deux polaires du point O.

et ils se *correspondront anharmoniquement*; donc (*Géométrie supérieure*, n° 555), les droites pp', qq', rr', etc., enveloppent une conique Ω *relative* au point O.

A un second point quelconque O′ correspondra pareillement une seconde conique Ω' *relative* à ce point.

3. Donc la droite OO′ a pour *réciproque* une des quatre tangentes communes aux deux coniques Ω, Ω', et cette tangente est déterminée, ainsi que cela résulte d'ailleurs de la première construction des droites réciproques (n° 2), parce que les trois autres tangentes communes E, F, G, dont une au moins est toujours réelle, sont des droites fixes et indépendantes de la position variable de la droite OO′. C'est ce que je vais faire voir dans le paragraphe suivant.

4. En effet, soit E l'une de ces trois tangentes. Si on la regarde comme enveloppant la conique Ω, il résulte du numéro 2 qu'elle joint les deux pôles $o\,\omega$ d'une certaine droite OM, laquelle passe par le point O dont Ω est la conique relative, ces pôles étant pris par rapport aux deux coniques fixes Σ, Σ'. Donc, réciproquement, les pôles e, e' de E se trouvent sur cette droite OM.

Par une raison semblable, si l'on regarde E comme enveloppant la conique Ω', ses pôles e, e' doivent se trouver sur une autre droite OM′, distincte de la droite OM, et passant par le point O′ dont Ω' est la conique *relative*.

Cette double condition exige évidemment que les points e, e' coïncident en un seul et même point.

5. Il résulte de là que chacune des trois tangentes E, F, G a même pôle dans les deux coniques proposées Σ, Σ'. Or, on sait que dans le plan de deux coniques données, il n'existe que trois droites fixes qui jouissent de cette propriété remarquable (*voir* la *Géométrie supérieure* et le *Traité des propriétés projectives*). On sait en outre que

ce pôle commun est précisément le point d'intersection des deux autres droites ; que ce point est, en même temps, le point de concours de deux cordes communes conjuguées ou *axes de symptose* des deux coniques ; que chacune de ces droites contient deux *centres d'homologie* conjugués, centres que l'on obtient aisément en cherchant les deux points (réels ou imaginaires) qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments interceptés par les deux coniques sur celle des trois droites que l'on considère (*Géométrie supérieure*, n° 210). Etc.

6. D'après ce qui précède, les coniques *relatives* à tous les points du plan touchent trois droites fixes de ce plan ; ce sont précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler.

Réciproquement, toute conique tangente à ces trois droites est relative à un point du plan. Car deux autres tangentes quelconques de cette conique ont pour *réciproques* deux droites dont le point de rencontre aura pour conique relative une conique tangente à ces deux droites (n° 2) et aux trois tangentes fixes E, F, G et qui se confondra, par conséquent, avec la conique en question.

7. Actuellement, prenons pour conique le segment rectiligne terminé *em* qui joint un point quelconque *m* de E au point de concours *e* des deux droites F, G, segment qu'on peut regarder comme représentant une ellipse infiniment aplatie à laquelle les trois droites E, F, G sont évidemment tangentes (*). Cette conique particulière sera, comme dans le cas général (n° 6), *relative* à un point *m'*, et je vais prouver que ce point *m'* est situé sur E comme le point *m* lui-même.

En effet, pour que les droites *pp'*, *qq'*, *rr'*, etc. (n° 2),

---

(*) Voir, à ce sujet, le *nota* qui termine cet article, n° 8.

qui enveloppent et qui déterminent, dans ce cas, la conique relative *em*, passent toutes par le point *m*, extrémité du segment terminé *em*, il faut (comme on sait, et comme je le rappelle expressément dans le *nota* ci-après) que les droites fixes *pqr*, *p' q' r'*, polaires du point *m'*, sur lesquelles sont marquées les divisions homographiques *p*, *q*, *r*, etc., *p'*, *q'*, *r'*, etc., passent par le point *p*, et, de plus, il faut que ce point soit un point homologue de deux divisions. Donc, en premier lieu, il existe une droite *m'*I passant par le point *m'*, telle, que ses deux pôles, par rapport aux coniques données Σ, Σ', coïncident en un seul et même point au point *e*. Or j'ai fait voir (n° 5) que la droite E est la seule droite du plan des deux coniques qui jouisse de cette propriété. Donc *m'* I n'est autre chose que E, ce qui démontre que le point *m'* est sur E comme le point *m* lui-même.

Il est d'ailleurs évident que les points *m* et *m'* se correspondent anharmoniquement, et, de plus, qu'ils sont en involution. Car le point *m*, considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux divisions, a toujours pour correspondant le même point *m'*. Les points doubles de l'involution jouissent de la propriété que les deux pôles relatifs à chacune des droites qui passent par l'un d'eux se trouvent sur une droite qui passe aussi par ce point. Donc (*Geométrie supérieure* et *Traité des propriétés projectives*) ces points doubles sont les centres d'homologie des deux coniques, etc.

8. Je vais maintenant donner, dans le *nota* suivant, les détails auxquels j'ai fait allusion plus haut (n° 7) et qui auraient retardé la marche des raisonnements.

Nota. On sait que quand deux faisceaux homographiques ont leurs sommets en deux points distincts, leurs rayons homologues se coupent généralement sur une conique. Dans le cas particulier où deux de ces rayons coïn-

cident en direction avec la droite qui joint les deux sommets des faisceaux, le point de concours des rayons homologues décrit une droite indéfinie. Mais il est sousentendu que la droite de jonction des deux sommets fait aussi partie de la conique qui est décrite dans ce cas particulier; chacun de ses points peut effectivement être regardé comme le point d'intersection des deux rayons homologues qui se confondent avec elle. Et il faut bien qu'il en soit ainsi; car la première droite *indéfinie* ne saurait représenter à elle seule une section conique. Et cette conique se réduit, dans ce cas, au système des deux droites dont je viens de parler, système qu'on peut regarder comme une hyperbole infiniment dilatée et réduite à ses asymptotes.

Pareillement, les droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques tracées sur deux droites distinctes, enveloppent généralement une section conique. Si le point de concours de ces deux droites fixes est un point de coïncidence de deux points homologues, la droite mobile passe par un point fixe ou enveloppe ce point. Mais ce point ne représente pas plus à lui seul la conique du cas général, pas plus, dis-je, qu'une conique n'était représentée par une seule droite dans la première partie du *nota*. En effet, une droite quelconque, menée par le point de concours des deux droites fixes, peut être regardée comme joignant les deux points homologues qui coïncident en ce point, et par conséquent comme une tangente à la conique enveloppe. Donc cette conique est représentée dans ce cas particulier par le segment terminé à ce point de concours et au second point fixe par lequel passent toutes les autres droites mobiles; et on peut la regarder comme une ellipse infiniment aplatie et réduite à son grand axe.

9. Ceci posé, la démonstration des théorèmes de

M. Steiner se fait sans difficulté, comme on va le voir.

10. Théorème V. *Quatre coniques étant inscrites dans un triangle, ces coniques prises deux à deux ont encore en commun, outre les côtés du triangle, une quatrième tangente* T; *il y a six de ces tangentes* T *et elles coupent chaque côté du triangle en six points en involution.*

On pourra toujours décrire, ou simplement supposer, sur le plan de la figure, un système de deux coniques Σ, Σ' dont les trois côtés du triangle soient précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler; ceci est évident. Soient C, C', C'', C''' les quatre coniques données, et c, c', c'', c''' leurs points *réciproques* par rapport aux deux courbes Σ, Σ'. Ces points forment un quadrilatère dont les quatre côtés et les deux diagonales sont les six droites *réciproques* des six tangentes menées aux quatre coniques. Soient a, a', b, b', c, c' les points où ces six tangentes rencontrent l'un E des côtés du triangle, et α, α', β, β', γ, γ' les six points d'intersection de E avec les côtés et les diagonales du quadrilatère. Ceux-ci sont en involution (*Géom. sup.* n° 339); donc les six autres a, a', etc., qui leur correspondent anharmoniquement, sont eux-mêmes en involution.

C. Q. F. D.

Cette démonstration indique en même temps de quelle manière on doit conjuguer les six points dans l'involution. Par exemple, si a répond à la tangente commune aux deux coniques C, C', a' répondra à la tangente commune aux deux autres c'', c'''.

11. Théorème. *Si quatre coniques ont en commun un foyer et une tangente* A, *elles ont encore en commun prises deux à deux six tangentes* T *telles, qu'elles coupent la tangente* A *en six points en involution.*

Ce théorème est un simple corollaire du précédent. Car

(*Géom., sup.* n° 736, ou *Traité des propriétés projectives*) des coniques qui ont un foyer commun sont dans le même cas que des coniques qui ont deux tangentes communes.

12. Théorème VII. *Si quatre paraboles ont le même foyer, prises deux à deux, elles ont une tangente commune* T; *si par un point* p *on abaisse des perpendiculaires sur ces six tangentes, on a un faisceau en involution.*

Les paraboles ont une tangente commune à l'infini, et le foyer commun tient lieu de deux autres tangentes communes (imaginaires). Donc, en vertu du théorème V, les six points où les six tangentes rencontrent la droite à l'infini sont en involution. Les six perpendiculaires issues du point p faisant avec ces six tangentes des angles égaux, rencontrent la droite à l'infini en six points homographiques aux six premiers (*Géom sup.*, n° 652), et qui, par suite, seront comme eux en involution. Donc il en est de même des six perpendiculaires.

C. Q. F. D.

Je ferai remarquer, en terminant, que toutes les propositions qui font l'objet de cette Note ont leurs corrélatives qu'on démontrerait directement par des raisonnements analogues. Ces nouvelles propositions qui sont intéressantes, fournissent une interprétation et une démonstration géométriques très-simples des divers théorèmes déduits de l'analyse par M. Magnus, de Berlin, dans le tome VIII du *Journal* de Crelle, p. 51. Je me propose de revenir ailleurs sur ce sujet.

NOTE SUR LES OMBRES A LUMIÈRE PARALLÈLE
ou projections obliques des polyèdres, sur leurs projections orthogonales et sur les changements de plans de projections et rotations comme méthodes d'enseignement;

PAR A. CHEVILLARD,
Professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive.

1. Depuis plusieurs années, on s'attache, dans les classes de mathématiques, à proposer des problèmes réellement utiles, applications des théories enseignées. Cet excellent usage n'est guère suivi pour la géométrie descriptive que dans les écoles professionnelles. C'est d'autant plus regrettable pour les élèves des Lycées, qu'ils ont des ressources qui manquent aux dessinateurs et aux mécaniciens. On peut s'en prendre avant tout à la plupart des Éléments de géométrie descriptive qui ne présentent pas de méthodes suffisamment pratiques. Ainsi le plan y est toujours indiqué par ses deux traces, quand la construction le donne ordinairement par trois points et sans traces possibles. Les solutions des problèmes sur le cylindre, le cône, y exigent les traces de ces surfaces, tandis que dans la pratique, ces surfaces étant le plus souvent de révolution, la connaissance de leurs traces pour les tangences, intersections, etc., devient tout à fait inutile. C'est en suivant depuis longtemps un système entièrement différent que j'ai reconnu, par l'expérience des résultats acquis, combien les idées de M. Olivier sont propres à vulgariser et à faire avancer la géométrie descriptive. On me permettra de revenir tout à l'heure sur

ce sujet qui semble acquérir une nouvelle opportunité.

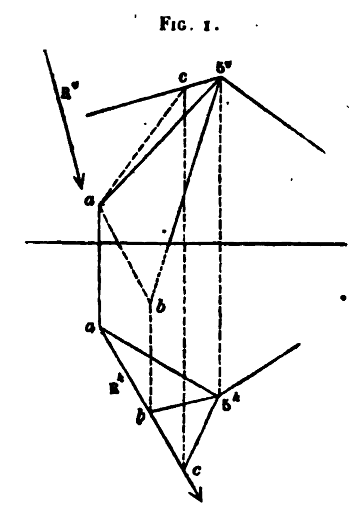
2. Le problème des ombres à lumière parallèle pour les polyèdres pouvant s'aborder dès l'ouverture d'un cours de géométrie descriptive, il sera intéressant pour les commençants d'en faire des applications à l'architecture. Étant donnés par les deux projections orthogonales les sommets 1, 2, 3, 4, 5, etc., d'un polyèdre *convexe* P et le rayon lumineux R, il s'agit d'en dessiner les faces obscures, éclairées et les ombres portées sur les plans de projection. On déterminera d'abord la brisée polygonale B par laquelle le prisme parallèle à R et circonscrit à P touche ce polyèdre, brisée qui est en même temps le contour apparent de P vu dans le sens de R, et aussi ligne séparative des ombres et de la lumière sur ce corps. Pour cela, on projettera parallèlement à R tous les sommets de P, soit sur les deux plans de projection, soit sur l'un d'eux, en ne conservant que la première trace que fournit le rayon lumineux. Cela dépendra de l'effet qu'on voudra rendre. Le polygone *convexe* $2^h\,3^h\,5^h\,6^h$, etc., par exemple, dont les côtés sont projections obliques d'arêtes de P et qui renferme certaines traces 1^h, 4^h, etc., donne immédiatement la *séparative* 2356, etc., dont deux côtés présenteront peut-être un coude sur les deux plans de projection, et l'on pourra déjà ombrer toute la partie plane comprise dans l'intérieur de $2^h 3^h 5^h \ldots 7^v 8^v$, ombre portée et projection oblique de P. Reste à indiquer en projections les ombres propres, c'est-à-dire les faces obscures. Or la connaissance d'une face obscure F suffira pour trouver toutes les autres, car si F n'a aucune arête de la séparative, toutes les faces adjacentes à F par quelque arête seront obscures, et si F tient à la séparative par quelque arête, la face F′ qui tient à F par cette arête est éclairée, de sorte qu'on pourra, de proche en proche, re-

connaître toute la partie éclairée de P; et il sera bien d'indiquer dans l'ombre portée en plein ou par une couleur désignée toutes les arêtes des faces éclairées pour y présenter l'aspect de P vu en projection oblique parallèle à R.

3. Cherchons donc une seule face obscure ou éclairée. Il est rare qu'à vue d'œil on n'en aperçoive pas une, attendu que deux faces successives ont la même manière d'être par rapport à R toutes les fois que leur arête commune n'est pas sur la séparative. D'ailleurs, si une face est horizontale, elle est éclairée ou obscure selon qu'elle est la plus haute ou la plus basse de P, la lumière venant de haut en bas. Si une face est verticale, la projection R^h seule indique si R la rencontre. Remarque analogue sur l'emploi de R^v. Une observation très-commode est que parmi les projections obliques d'arêtes comprises dans l'intérieur de $2^h\,3^h\,5^h$..., on en trouve aisément deux qui se croisent en h, par exemple, mais jamais plus pour h, P étant convexe; menant par h un rayon en sens contraire de R, ou seulement une seule projection R^h, ce qui n'exige que la pose de l'équerre, sans rien tracer, on verra que R rencontre deux arêtes de P, ni plus, ni moins, dont la première sera entièrement obscure, c'est-à-dire séparera deux faces obscures. Enfin, si l'on ne trouvait pas un point h de cette espèce (cas très-rare), menez près d'un sommet 5 de la séparative et la rencontrant un plan vertical R^h; il coupera l'angle solide 5 selon un petit polygone très-facile à obtenir en projection verticale. Tout côté de cette projection qui n'est pas rencontré par la direction R^v indique une face obscure. Ainsi soit le sommet séparatif 5 (*fig.* 1), l'arête séparative $5a$; le plan R^h coupe les arêtes $5a$, $5b$, $5c$ aux points a, b, c, ce qui donne les droites ac et ab comprises dans les faces $5ac$ et $5ab$ adjacentes à la séparative. Comme R^v ne rencontre pas ab, la face $5ab$ est obscure, $5ac$ est éclairée. Ainsi, en résumé, pas ou très-

peu de constructions à faire pour déterminer les faces obscures de P.

Fig. 1.



4. Les faces obscures, c'est-à-dire invisibles dans la direction R, sont déjà indiquées dans l'ombre portée par leurs arêtes ponctuées ou d'une couleur peu tranchée; mais sur les projections il faut teinter ces faces obscures lorsqu'elles y sont visibles. Les faces visibles en projection horizontale étant les faces éclairées par une lumière verticale, on les reconnaît tout de suite par la méthode précédente (n° 3), puisque la projection P^h donne la séparative pour la lumière verticale et que le plan R^h devient ici un plan vertical de direction quelconque. D'ailleurs le croisement de deux projections horizontales d'arêtes résout tout de suite la question. Même observation pour les faces visibles en projection verticale. Ainsi l'on se procure aisément trois aspects du solide éclairés par la même direction de lumière.

5. Quand le polyèdre n'est pas convexe, qu'il présente

des angles solides ou des dièdres rentrants, comme dans un escalier droit, la séparative pourra être projetée obliquement en partie sur le plan horizontal, en partie sur des faces de ces dièdres, et, par suite, être discontinue dans l'espace, parce que R raserait à la fois deux arêtes appartenant à deux faces d'un dièdre ou même à deux dièdres séparés, et viendrait ensuite rencontrer le sol. Certaines arêtes peuvent alors être obscures dans une partie, éclairées dans l'autre. En étudiant séparément les portions convexes du polyèdre, on aura lieu d'appliquer les principes précédents. On peut proposer, dans ce genre, des sujets intéressants; mais je doute qu'un professeur qui ne fait jamais de croquis, voie tout de suite les fautes des dessins présentés, indique une direction meilleure du rayon lumineux, etc (*).

6. Enfin, on peut avoir des groupes de polyèdres qui se pénètrent ou non. Il faudra déterminer leurs intersections (*Géométrie descriptive* de M. Amiot), déterminer la séparative pour chacun d'eux. Les ombres pourront se porter les unes sur les autres *sans croître d'intensité*, de façon que les ombres des corps les plus près du plan horizontal par rapport à R sont plus noires et traversent en restant sensibles les ombres des corps moins rapprochés. Il me paraît difficile d'indiquer des moyens généraux ayant assez de précision pour s'appliquer tout de suite à tous les cas. On remarquera principalement qu'aussitôt qu'une séparative d'un corps porte ombre sur une face éclairée d'un autre corps, cette ombre reste dans cette face éclairée ou continue jusqu'à la rencontre d'une séparative de ce deuxième corps; en ce point le rayon lumineux rasant deux séparatives, il en résulte l'intersection de deux om-

(*) Dans le dessin des machines, les ombres *portées* embrouillent souvent plus qu'elles n'éclaircissent. Elles ne sont utiles que pour accuser la forme des surfaces courbes. Tm.

bres portées sur un troisième corps ou sur le plan horizontal, etc.

7. Je terminerai en faisant observer que les projets d'architecture et les dessins topographiques sont éclairés par de la lumière dite à 45 degrés, locution mal comprise de beaucoup de praticiens. Les projections du rayon sont, en effet, inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre, mais le rayon lumineux fait avec chaque plan de projection l'angle que fait la diagonale d'un cube avec la diagonale d'une de ses faces qui part du même sommet, angle très-facile à calculer.

8. Le problème des ombres d'un polyèdre pourrait se résoudre par deux changements de plans de projection qui rendraient R perpendiculaire au dernier. Ce moyen sera en général trop compliqué. On en accuserait à tort la transformation des projections. Cette méthode devra toujours être préférée *chaque fois qu'en particularisant les données par rapport aux deux plans de projection, sans rien changer à leur position relative dans l'espace, on trouvera une solution immédiate du problème,* ce qui n'est pas le cas actuel. Faute de bien entendre cette condition, la méthode des changements de plans d'Olivier, si simplement exposée dans l'ouvrage de M. Amiot, soulève encore maintenant de nombreuses critiques. Je vais prouver qu'elles sont toutes tirées de l'ignorance du sujet.

9. L'opposition aux transformations de projections et rotations se résume dans les quatre motifs suivants :

1°. *Ces méthodes sont inutiles, puisqu'on faisait de la Géométrie descriptive avant M. Olivier.*

C'est exactement comme si ayant su autrefois, je suppose, discuter analytiquement les propriétés géométriques des courbes, sans le problème de la transformation des coordonnées, on renonçait à refaire aujourd'hui cette

discussion par le secours de ce problème. Mais ici il y a plus encore. Si l'on voulait se donner la peine d'examiner avant de critiquer, on verrait que les anciennes explications données pour calculer par les projections la distance de deux points, les angles des droites, des plans, etc., deviennent inutiles par l'emploi des changements de plans et rotations, lequel fait d'abord retrouver les constructions usitées et disparaître en même temps tous ces cas particuliers dont plusieurs livres élémentaires sont remplis, parce que ces explications soi-disant générales y devenaient réellement insuffisantes. Dans notre système d'enseignement, le procédé d'exécution étant aussi uniforme que général, il suffit d'énoncer quelques-uns de ces cas pour que les élèves les résolvent immédiatement et de la manière la plus simple.

2°. *Les épures faites par ces méthodes sont compliquées et confuses. On voit un changement de plan, on se perd dans plusieurs.*

Il faut faire attention que la pratique des changements de plans et rotations doit être raisonnée avant toute application, que ses qualités principales sont, au contraire, de permettre de rejeter loin du résultat à obtenir les constructions auxiliaires pour donner à ce résultat toute l'expression désirable, qu'on n'emploie pas indifféremment un changement ou une rotation, qu'il y a des règles très-simples pour rendre visuelles toutes les constructions qui en résultent, qu'il n'y a aucune nécessité de voir l'ensemble des opérations fournies par trois changements (cas très-rare), qu'on n'a jamais besoin de regarder que la dernière ligne de terre, et qu'enfin une règle très-facile évite même la vision dans l'espace en la ramenant par cette vision même à la lecture sur le papier (t. XIII, p. 91).

3°. *Cette règle n'est qu'un mécanisme, et il faut rejeter toutes ces méthodes réduisant l'esprit au rôle de ma-*

chine, parce que, dit-on, leur application n'exige aucun raisonnement.

On oublie précisément de prouver que ces méthodes sont dans ce cas. Est-ce que toutes les règles d'arithmétique, les évaluations géométriques, les formules d'algèbre, des calculs différentiel et intégral, etc., ne sont pas des mécanismes ingénieux dont l'effet est démontré à priori satisfaire au but proposé? Mais d'abord si l'on interdit les changements de plans et les rotations en principe, il n'en faut pas faire d'applications sous un autre nom là où il est impossible de les éviter (surfaces de révolution, construction de pièces d'assemblage, etc.); mais si l'on ne croit en critiquer que l'abus, il est vraiment singulier qu'il existe des méthodes pour résoudre uniformément, de la façon la plus simple, la plus rapide et la plus expressive, tous les problèmes fondamentaux de la géométrie descriptive et que ces méthodes soient des mécanismes sans valeur et sans raison d'être.

4°. Enfin, d'autres personnes objectent que *ces méthodes sont trop analytiques, qu'elles s'éloignent de la géométrie pure, que trouver la position la plus convenable des données par rapport aux plans de projection est une question difficile, etc.*

Le procédé géométrique indépendant de tout moyen d'exécution une fois reconnu par la géométrie élémentaire ou supérieure de l'espace, selon la question, le moyen graphique s'ensuivra en conséquence. Je ne pense pas qu'il faille de grands efforts d'intelligence pour remarquer qu'une droite finie est projetée en vraie grandeur sur un plan auquel elle serait parallèle, qu'un angle dièdre est obtenu en vraie grandeur sur un plan perpendiculaire à son arête, etc., tous résultats qui doivent être prévus, au contraire, par la géométrie pure. Que si la rotation qui doit produire ces positions introduit quelque

confusion dans les données, il faut préférer un changement de plan; qu'on trouve bien les distances de divers points à un plan par un seul changement de plan, mais qu'une rotation ne conviendrait que dans le cas d'un seul point par lequel on fait passer l'axe, etc. Du reste, ces méthodes ont un caractère mathématique si prononcé, qu'elles suppléent parfaitement, comme je l'ai vérifié bien souvent, des études incomplètes sur divers points de la géométrie pure, en les rendant pour ainsi dire évidents sans démonstration. Aussi sont-elles enseignées de préférence à toutes autres dans les écoles professionnelles de Châlons, d'Angers, de Lyon et pour l'école des Beaux-Arts de Paris. S'agit-il, par exemple, de chercher l'intersection d'une droite et d'un cône de révolution donné de sommet, d'angle et d'axe? Il faudra, dans le système d'enseignement généralement suivi, faire passer un plan par la droite et le sommet du cône, chercher l'intersection de ce plan avec une trace du cône, laquelle est une courbe du deuxième degré, pour en conclure ensuite la génératrice qui coupera la droite au point cherché. Si l'on ne veut pas construire la courbe par points, il faudra déterminer un foyer et un ou deux sommets; trouver avec ces seules données la rencontre de la courbe et d'une trace du plan, ce qui, pour le dire en passant, n'est plus de la géométrie élémentaire selon les Programmes.

Du reste, on ne s'inquiète pas si la trace du plan est hors du cadre et la courbe aussi; si, quand elles y sont, le point auxiliaire est lui-même dans le cadre, parce qu'en définitive ces circonstances étant les plus fréquentes, il faudrait en conclure que la méthode est en général impraticable. Ce que je dis de ce problème, il faut le répéter, sans exception, de tous les problèmes relatifs au cône, au cylindre et aux surfaces de révolution et de tous les problèmes dépendant de la recherche d'un point auxiliaire.

De bonne foi, peut-on comparer cette méthode avec celle qui consiste à projeter la droite et le cône sur un plan parallèle à l'axe du cône pour obtenir tout de suite le point cherché à l'aide d'une section circulaire? c'est-à-dire en résumé à faire deux changements de plans successifs dont le dernier rende le cône vertical. Ces procédés, si bien appliqués par les praticiens qui ont peu de connaissances scientifiques, sont donc ceux qui conviennent aussi le mieux à de plus instruits, et si l'objection 4° était fondée, cela reviendrait à n'admettre aucun discernement ni appréciation mathématique chez ceux qui doivent le plus en avoir.

Note du Rédacteur. Quand faut-il changer de plans de projections, faire des rabattements, des rotations? Réponse: quand vous le jugerez commode. Quand cela est-il commode? Il n'y a pas de réponse à faire à telle question. Toutes les épures de charpente ne roulant que sur des polyèdres, on y fait continuellement des changements de plans de projections (*), et de tout temps on a fait des épures de charpente. Où est donc la nouveauté de ce système de changements dont on fait tant de bruit? La clarté et la simplicité d'une épure dépendent du discernement de l'opérateur, et il n'y a pas de règle pour donner ce discernement. Au propre comme au figuré, il faut éviter, autant que possible, les changements de plan, user de ce moyen avec économie, et ne s'en servir, style de prospectus, que lorsque le besoin s'en fait sentir.

(*) *Exemple :* L'épure des pannes et tasseaux de l'empanon déversé et délardé

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES ;

D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. II, 1814-15, pages 12.

1. Soit proposée la fraction continue

$$\varphi = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w'' + \cfrac{v'''}{w''' + \ldots}}}}$$

Formons ces deux séries V, V′, V″, V‴, etc., W, W′, W″, W‴; d'après ces relations

$$\begin{array}{ll}
V = 0, & W = 1, \\
V' = v, & W' = wW, \\
V'' = w'V' + v'V, & W'' = w'W' + v'W, \\
V''' = w''V'' + v''V', & W''' = w''W'' + v''W', \\
V^{IV} = w'''V''' + v'''V'', & W^{IV} = w'''W''' + v'''W'', \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

on aura

$$\frac{V}{W} = 0,$$

$$\frac{V'}{W'} = \frac{v}{w},$$

$$\frac{V''}{W''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w'}},$$

$$\frac{V'''}{W'''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w''}}},$$

et ainsi de suite.

On en déduit

$$VW' - V'W = -v,$$
$$V'W'' - V''W' = +vv',$$
$$V''W''' - V'''W'' = -vv'v'',$$
$$V'''W^{iv} - V^{iv}W''' = +vv'v''v''',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi dans la série

$$\frac{v}{WW'} - \frac{vv'}{W'W''} + \frac{vv'v''}{W''W'''} - \frac{vv'v''v'''}{W'''W^{iv}} + \ldots,$$

Le premier terme est $\frac{V'}{W'}$;

La somme des deux premiers termes égale $\frac{V''}{W''}$;

La somme des trois premiers termes égale $\frac{V'''}{W'''}$;

La somme des quatre premiers termes égale $\frac{V^{iv}}{W^{iv}}$;

Et ainsi de suite.

Cette série, soit qu'elle se termine ou qu'elle se prolonge à l'infini, exprime la valeur de φ et aussi la différence de φ et des fractions approchées

$$\frac{V'}{W'}, \quad \frac{V''}{W''}, \quad \frac{V'''}{W'''}, \ldots.$$

Il est facile de voir qu'on a aussi les relations suivantes :

$$\varphi W'' - V'' = \omega'(\varphi W' - V') + v'(\varphi W - V),$$
$$\varphi W''' - V''' = \omega''(\varphi W'' - V'') + v''(\varphi W' - V'),$$
$$\varphi W^{iv} - V^{iv} = \omega'''(\varphi W''' - V''') + v'''(\varphi W'' - V''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Application.

Soit

$$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}} = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots$$

Réduite en fraction continue, on a

$$\varphi = \cfrac{1}{u - \cfrac{\frac{1}{3}}{u - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{u - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{u - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{u - \ldots}}}}}$$

ainsi

$$v = 1, \quad v' = \frac{1}{3}, \quad v'' = -\frac{4}{15}, \quad v''' = \frac{9}{35}, \quad v^{\text{IV}} = -\frac{16}{63}, \ldots,$$

$$w = w' = w'' = w''' = w^{\text{IV}} = \ldots = u;$$

$$V = 0,$$

$$V' = 1,$$

$$V'' = u,$$

$$V''' = u^2 - \frac{4}{15},$$

$$V^{\text{IV}} = u^3 - \frac{11}{21}u,$$

$$V^{\text{V}} = u^4 - \frac{7}{9}u^2 + \frac{64}{945},$$

$$V^{\text{VI}} = u^5 - \frac{34}{33}u^3 + \frac{1}{5}u,$$

$$V^{\text{VII}} = u^6 - \frac{50}{39}u^4 + \frac{283}{715}u^2 - \frac{256}{15015},$$

. . . .

$$W = 1,$$
$$W' = u,$$
$$W'' = u^2 - \frac{1}{3},$$
$$W''' = u^3 - \frac{3}{5}u,$$
$$W^{\text{iv}} = u^4 - \frac{6}{7}u^2 + \frac{3}{35},$$
$$W^{\text{v}} = u^5 - \frac{10}{9}u^3 + \frac{5}{21}u,$$
$$W^{\text{vi}} = u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}u^2 - \frac{5}{231},$$
$$W^{\text{vii}} = u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u,$$
....

Il est facile de voir que les V et les W sont tous des fonctions entières de u; que $V^{(m)}$ est de degré $m - 1$, et que les puissances $m-2$, $m-4$, $m-6$ manquent; que $W^{(m)}$ est de degré m, et les puissances $m-1$, $m-3$, $m-5$, etc., manquent; et l'on a

$$\varphi = \frac{1}{WW'} + \frac{1}{3W'W''} + \frac{2.2}{3.3.5W''W'''} + \frac{2.2.3.3}{3.3.5.5.7W'''W^{\text{iv}}} + \frac{2.2.3.3.4.4}{3.3.5.5.7.7.9W^{\text{iv}}W^{\text{v}}} + \ldots,$$

et aussi généralement

$$\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} = \frac{2.2.3.3\ldots m.m}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)W^{(m)}W^{(m+1)}} + \frac{2.2.3.3\ldots(m+1)(m+1)}{3.3.5.5\ldots(2m+1)(2m+3)W^{(m+1)}W^{(m+2)}} + \text{etc.}$$

Si l'on développe $\frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ en une série descendante, son

premier terme sera

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(2m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)};$$

car le premier terme de $W^{(m)}$ est u^m et celui de $W^{(m+1)}$ est $u^{(m+1)}$.

Ainsi $\varphi W^{(m)}$ est égal à une fonction entière $V^{(m)}$, plus à une série infinie dont le premier terme est égal à

$$\frac{2.2.3.3\ldots m.m.u^{-(m+1)}}{3.3.5.5\ldots(2m-1)(2m+1)}.$$

Cette propriété de la fonction $W^{(m)}$ est importante dans la recherche des intégrales par approximation.

GNOMONIQUE.

Construction d'un cadran solaire à style quelconque, en s'assujettissant à la condition de n'employer que des droites pour les lignes horaires et les lignes de déclinaison;

Par M. PEAUCELLIER.

A, B, C, a, b, c représentant les angles et les côtés opposés d'un triangle sphérique quelconque, les analogies de Neper conduisent aisément à la formule

$$\cot A \sin C = \sin b \cot a - \cos b \cos C.$$

Appliquons cette formule au triangle formé par les arcs de grands cercles passant par le pôle, le zénith et la position actuelle du Soleil. Soient D et Az la déclinaison et l'azimut du Soleil, P l'angle horaire et enfin L la latitude

du lieu. On pourra poser

$$A = 180^\circ - Az,$$
$$C = P,$$
$$a = 90^\circ - D,$$
$$b = 90^\circ - L,$$

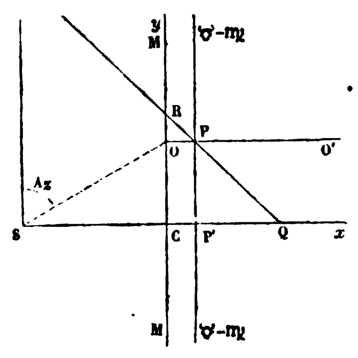
ce qui donne l'expression

$$- \cot Az \sin P = \cos L \tang D - \sin L \cos P,$$

ou bien

$$\cot Az = -\frac{\cos L}{\sin P} \tang D + \frac{\sin L}{\tang P}.$$

Cela posé, nous allons résoudre le problème pour le cas particulier où le style est vertical et le plan du cadran parallèle au méridien. Il sera facile ensuite de généraliser la solution.



Soient S la projection du style, MM la trace sur l'horizon du plan du cadran, que nous supposons rabattu autour de cette droite. L'ombre portée par le style sur le plan du cadran sera une droite OO' perpendiculaire à MM. Le point C étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur la même droite, il est clair que l'on pourra poser CO = cot Az, pourvu que l'on conserve

dans la suite la distance SC pour unité linéaire. Cela étant, si l'on prend sur OO′ une longueur OP = tang D, la formule précédente devient

$$CO = -\frac{\cos L}{\sin P} OP + \frac{\sin L}{\tang P}$$

ou

$$y = -\frac{\cos L}{\sin P} x + \frac{\sin L}{\tang P},$$

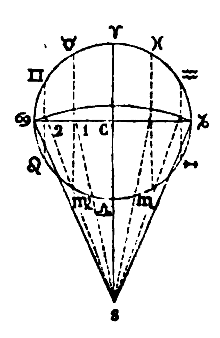
en considérant OP et CO comme les coordonnées du point P. Il en résulte que le lieu des points P obtenus à la même heure pendant le cours d'une année est une droite QR.

Le point P peut être considéré comme résultant de l'intersection de trois droites : l'ombre OO′ du style, la droite PP′ parallèle à MM et distante de cette droite d'une longueur égale à tang D, enfin la ligne horaire QR. D'où il résulte qu'en traçant une série de droites telles que PP′ et correspondant aux diverses valeurs de tang D, de même que les lignes horaires QR correspondant aux différentes heures de la journée, on obtiendra un réseau qui permettra de lire l'heure à un instant quelconque. Il suffira de voir sur quelle ligne horaire se trouve le point P, intersection de la ligne de déclinaison actuelle PP′ avec l'ombre OO′ du style.

Tracé des lignes de déclinaison. On a vu qu'elles sont parallèles à la droite MM et a une distance égale à la tangente de la déclinaison variable du Soleil. L'*Annuaire* fournit ces valeurs pour chaque jour de l'année; mais on peut se contenter des déclinaisons relatives à l'entrée du Soleil dans les différents signes du zodiaque. Voici comment on peut les construire géométriquement.

De part et d'autre de la droite SC, prise pour unité linéaire, on fait au point S un angle égal à la déclinaison

maximum 23° 28′. On élève en C une perpendiculaire sur SC et on la limite aux droites précédentes. Sur ♋♑



comme diamètre, on décrit un cercle que l'on divise en douze parties égales correspondant aux douze signes. On joint les points de division deux à deux et parallèlement à SC. Ces droites rencontrent l'arc de cercle décrit de S comme centre avec S♋ pour rayon en différents points qu'il suffit de joindre à S pour avoir les déclinaisons correspondantes. Les tangentes seront donc C1, C2, etc., qu'il faudra reporter, dans la figure précédente, sur CQ à partir de C à droite pour les valeurs positives de tang D, à gauche pour les valeurs négatives.

Tracé des lignes horaires. On a vu que leur équation était

$$y = -\frac{\cos L}{\sin P}x + \frac{\sin L}{\operatorname{tang} P}.$$

Pour avoir les points où elles coupent la ligne MM, il suffit de faire $x = 0$, ce qui donne l'expression $\frac{\sin L}{\operatorname{tang} P}$ ou $\sin L \cot P$ que l'on construit immédiatement, en prenant pour P les diverses valeurs 15, 30, 45 degrés, etc., si l'on veut les lignes horaires, espacées d'heure en heure. Pour avoir les points où elles coupent la droite Cx, on

fera $y = o$, ce qui donne l'expression tang L cos P, dont la construction est tout aussi facile.

Nous n'insisterons pas davantage sur le tracé de ces droites, non plus que sur quelques-unes de leurs propriétés que l'on trouve aisément. Remarquons toutefois que l'enveloppe des lignes horaires est une hyperbole dont l'équation est

$$y^2 - x^2 \cos^2 L + \sin^2 L = o.$$

Cas général où le style et le plan du cadran sont quelconques.

Quelle que soit la direction du style, il existe toujours un point de la Terre pour lequel elle est verticale. Concevons à côté du style un plan parallèle au méridien de ce point et portant le tracé dont on vient d'exposer les détails ; ce cadran fictif donnerait l'heure du lieu pour lequel la direction du style est verticale. Il donnerait l'heure même du lieu où il se trouve, si, au lieu de tracer les lignes horaires correspondant à 15, 30, 45 degrés, etc., on trace celles qui correspondent à $15^o + \lambda$, $30^o + \lambda$, $45^o + \lambda$, etc., λ étant la différence de longitude des deux lieux. Ces lignes seraient marquées I, II, III, etc., et donneraient les heures entières.

Enfin, ce plan fictif peut être remplacé par un plan tout à fait arbitraire en prenant pour réseau de droites sur ce plan la perspective du réseau précédent, l'œil étant supposé en un point quelconque du style. Cette propriété se démontre aisément.

Les lignes de déclinaison étant parallèles, dans le premier cas que nous avons considéré, leur perspective sur un plan devient un faisceau de droites passant par un point déterminé. Les lignes horaires deviennent les tan-

gentes à une courbe du second degré qui, dans des cas particuliers, devient un cercle.

Le point d'où on fait la projection conique pouvant être choisi arbitrairement sur le style, on voit qu'il existe une infinité de solutions du problème pour un plan et un style donnés.

Si l'on voulait n'employer que des cercles, il suffirait de prendre les réciproques des droites, le pôle étant à l'intersection du plan et du style. Tous les cercles passeraient par ce point.

On voit que la construction de ce cadran à style quelconque conduit à des opérations de géométrie descriptive qui, au premier abord, semblent assez compliquées. Cependant une étude un peu plus approfondie du problème fait ressortir de nombreuses simplifications; on peut même, à la rigueur, se dispenser complétement du plan auxiliaire dont on a parlé plus haut. La première application mettrait ces faits en évidence.

Enfin, il resterait à considérer bien des cas particuliers présentant tous plus ou moins d'intérêt; entre autres on peut citer le gnomon ordinaire, le comparer avec le cadran horizontal dit astrolabe, etc. Le lecteur remplira sans difficulté les lacunes de ce petit travail.

Note du Rédacteur. Notre expédition en Tauride a fait voir combien il est nécessaire en campagne de savoir tracer des cadrans solaires. La méthode aussi simple qu'ingénieuse qu'on vient de lire est bien propre à propager ce genre de connaissances et se recommande comme telle aux professeurs de cosmographie et de géométrie descriptive. Nous rappelons à cette occasion l'ouvrage si complet de M. Born, mort général d'artillerie le 21 mars 1854. (Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 483; 1846.)

PROBLÈME SUR LES COTÉS D'UN TRIANGLE ÉLEVÉS A DES PUISSANCES DONNÉES;

PAR M. POUDRA.

(Les signes au-dessus ou au-dessous des lettres α, 6, γ, d et o sont des accents.
Les signes au-dessus des lettres a, b, c seulement sont des exposants.)

1°. Partager chaque côté d'un triangle ABC en parties proportionnelles aux puissances successives des côtés adjacents.

2°. Déterminer, dans l'intérieur de ce triangle, la suite des points qui sont tels, que les perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les côtés soient entre elles comme les puissances successives de ces côtés, de sorte que si on les joint aux sommets du triangle par des droites, sa surface sera partagée en trois autres triangles dont les surfaces seront entre elles comme les puissances successives des côtés respectifs du triangle donné.

3°. Trois nombres a, b, c étant représentés par les trois côtés d'un triangle ABC, on demande de trouver géométriquement la puissance m à laquelle il faut les élever également pour qu'il existe entre eux la relation

$$a^m + b^m = c^m,$$

ou, généralement,

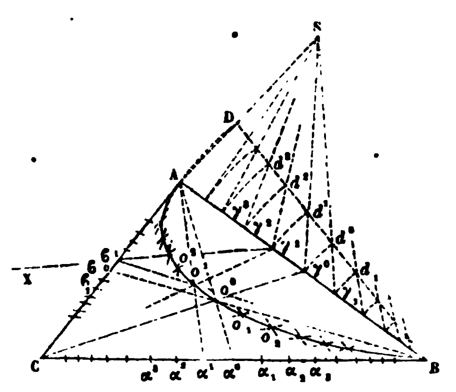
$$\mathrm{A}a^m + \mathrm{B}b^m = \mathrm{C}c^m.$$

Solutions.

1°. Soit ABC le triangle dont les côtés respectifs opposés sont a, b, c. Considérons d'abord le côté $\mathrm{AB} = c$ et soient γ^0 son milieu et γ^1 son intersection avec la bissectrice de l'angle C opposé. On aura déjà

$$\frac{\gamma^0 \mathrm{A}}{\gamma^0 \mathrm{B}} = \frac{b^0}{a^0} = 1, \quad \frac{\gamma^1 \mathrm{A}}{\gamma^1 \mathrm{B}} = \frac{b^1}{a^1}.$$

Par le sommet B menons une droite quelconque BD sur laquelle nous portons $BD = BA$, $Bd^0 = B\gamma^0$,



$Bd^1 = B\gamma^1$. Les deux droites AD et $\gamma^0 d^1$ prolongées déterminent le point S. Traçons la droite $S\gamma^1$ qui coupe BD en d^2. Sur AB, on rapporte $B\gamma^2 = bd^2$, on tire la droite $S\gamma^2$ qui coupe BD en d^3. La droite Sd^3 donne $B\gamma^3$. La droite $S\gamma^3$ déterminera d^4 et, sur AB on rapporte $B\gamma^4 = Bd^4$, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour avoir des divisions analogues sur AB entre γ^0 et B, on porte sur BD la longueur $Bd^0 = B\gamma^0$, on tire Sd^0 ce qui donne sur AB le point γ_1. On prend $Bd_1 = B\gamma_1$. La droite Sd_1 détermine sur AB le point γ_2, et ainsi de suite indéfiniment.

Les deux divisions sur BA et BD sont perspectives réciproques pour le point de vue S. Donc on a entre quatre points de l'une et les homologues de l'autre le rapport anharmonique

$$\frac{Dd^1}{Bd^1} : \frac{Dd^2}{Bd^2} = \frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} : \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^0}{a^0} : \frac{b^1}{a^1} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

or

$$Dd^1 = A\gamma^1,\ Bd^1 = B\gamma^1,\ Dd^2 = A\gamma^2 = \frac{Bd^2}{B\gamma^2}.$$

Donc

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} : \frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

et comme

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

il en résulte

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

En prenant les points γ^1, γ^2 et les homologues d^2, d^3 on trouverait de même

$$\frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

et ainsi de suite

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \quad \frac{A\gamma^5}{B\gamma^5} = \frac{b^5}{a^5}, \ldots;$$

donc on aura

$$\frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} = \frac{b^0}{a^0}, \quad \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{b^2}, \quad \frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \ldots.$$

On trouverait de même

$$\frac{A\gamma_1}{B\gamma_1} = \frac{b^{-1}}{a^{-1}} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{A\gamma_2}{B\gamma_2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{A\gamma_3}{B\gamma_3} = \frac{a^3}{b^3}, \ldots.$$

On diviserait de même les côtés a et b.

2°. Chacun des côtés du triangle ABC étant ainsi di-

visé suivant les puissances successives des côtés adjacents, on joint ces divisions avec le sommet opposé. On démontrera facilement que chaque groupe de trois droites respectives correspondant à une même puissance des côtés adjacents se rencontre en un même point. Soient o, o^1, o^2, o^3, etc., ces points d'intersection.

Appelons p^0, p^1, p^2, etc., les longueurs des perpendiculaires abaissées des points α^0, α^1, α^2, etc., sur le côté AC, et q^0, q^1, q^2, etc., celles abaissées des mêmes points sur AB. On aura

$$p^0 = \alpha^0 C . \sin C, \quad p^1 = \alpha^1 C . \sin C, \quad p^2 = \alpha^2 C . \sin C,$$
$$q^0 = \alpha^0 B . \sin B, \quad q^1 = \alpha^1 B . \sin B, \quad q^2 = \alpha^2 B . \sin B,$$

d'où

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{\alpha^0 C}{\alpha^0 B} . \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\alpha^0 C}{\alpha^0 B} . \frac{c}{b},$$
$$\frac{p^1}{q^1} = \frac{\alpha^1 C}{\alpha^1 B} . \frac{c}{b}, \ldots,$$

et

$$\frac{\alpha^0 C}{\alpha^0 B} = \frac{b^0}{a^0} = 1,$$
$$\frac{\alpha^1 C}{\alpha^1 B} = \frac{b^1}{a^1}, \quad \frac{\alpha^2 C}{\alpha^2 B} = \frac{b^2}{a^2}, \ldots;$$

donc

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{c}{b}, \quad \frac{p^1}{q^1} = \frac{b^0}{c^0} = 1,$$
$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{b^1}{c^1}, \quad \frac{p^3}{q^3} = \frac{b^2}{c^2}, \ldots,$$

c'est-à-dire : le rapport des perpendiculaires est égal à celui des côtés sur lesquels elles tombent, élevés à une puissance moindre d'une unité que celle de la division α correspondante.

Il en serait de même pour les rapports des perpendiculaires abaissées des points de division de AB et AC sur les côtés adjacents.

Remarquons que le rapport des perpendiculaires abaissées d'un des points tels que α sur les côtés adjacents est le même que celui des deux perpendiculaires abaissées de tout autre point de la droite $A\alpha$, par conséquent du point o. On en conclut donc : Les perpendiculaires abaissées des divers points o^0, o^1, o^2, etc., sur les trois côtés du triangle, sont entre elles comme les puissances 0, 1, 2, 3, etc., des côtés, mais une unité de moins que celle de la division qui a servi à déterminer ce point o. Ainsi du point o^0 elles sont proportionnelles aux puissances zéro des côtés ; elles sont donc égales. Du point o_1, elles sont proportionnelles aux côtés, de o^2 au carré, de o^3 au cube, et ainsi de suite. (C'est pourquoi on a inscrit o accentué zéro pour le point correspondant à l'intersection des droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$, et o^1 pour celles $A\alpha^2$, $B\beta^2$, $C\gamma^2$.)

Si on joint les points o aux sommets du triangle ABC on partagera sa surface en trois autres triangles ayant chacun pour base un des côtés et dont les surfaces seront proportionnelles aux puissances successives de ces côtés, puissance qui sera indiquée par le nombre d'unités de l'indice de o. Ainsi o^m sera le sommet commun de trois triangles dont les surfaces seront proportionnelles aux puissances m des côtés.

3°. En réunissant tous les points o, on obtiendra une courbe transcendante ayant les deux points A et B pour points asymptotiques.

En prenant CA et CB pour les axes des coordonnées, on trouve facilement que l'équation de cette courbe résulterait de l'élimination de m entre deux des trois équations

$$yb^m = x.c^m,$$
$$a^{m+1}.y = c^{m+1}.b - c^m.b.x,$$
$$a^m.x = c.b^{m+1} - cb^m y - b^{m+1}.x,$$

qui sont les équations des trois droites $A\alpha^{m-1}$, $B6^{m-1}$, $C\gamma^{m-1}$.

La bissectrice de l'angle C détermine sur le côté AB le point γ'. De même celle de l'angle B détermine sur AC le point $6'$. La droite $\gamma^1 6^1$ qui joint ces deux points jouit alors de cette propriété, que la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette droite, compris entre AC et CB, sur le côté CB, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres. (Ce serait la différence si le point était extérieur au triangle ABC.) Donc le point o^m où elle coupe la courbe des points o, jouit de cette propriété, mais pour o^m les perpendiculaires sont proportionnelles aux puissances m des côtés; donc pour cette puissance m on aura

$$a^m + b^m = c^m.$$

Ainsi dans le cas représenté dans la figure, on a

$$a = 5, \quad b = 2, \quad c = 3,$$

et on trouve que la droite $\gamma^1 6^1$ passe par le point o^2 et qu'ainsi on a

$$5^2 = 2^2 + 3^2 = 25.$$

En général, on voit que si l'on construisait la courbe représentant le lieu des points qui jouissent d'une relation donnée entre les simples perpendiculaires abaissées sur les trois côtés du triangle, cette courbe rencontrerait celle des points o en un ou plusieurs points qui donneraient la puissance m à laquelle il faudrait élever les côtés pour avoir, entre les résultats, la relation donnée.

SUR LA CLASSIFICATION DES COURBES PLANES.

Un abonné demande si l'on possède une méthode générale pour classer les courbes.

On n'a étudié jusqu'aujourdhui que les courbes du deuxième, troisième et quatrième degré, et on les a classées. On connaît les travaux de Newton, d'Euler, et dans notre temps ceux de M. Plucker. M. Chasles m'a montré une belle classification, non encore éditée, des courbes du troisième degré. Du reste, toute classification a quelque chose d'arbitraire, dépend du point de vue, des propriétés que l'on veut considérer comme fondamentales. Les propriétés asymptotiques semblent devoir être dominantes, selon que les branches sont elliptiques, hyperboliques ou paraboliques ; viennent ensuite en sous-ordre les divers points singuliers qui font établir des classes, des genres et des espèces, et des sous-espèces. Le nombre des espèces doit aller indéfiniment en augmentant, et atteint probablement déjà le nombre mille pour le cinquième degré. Les rayons de courbure fournissent peut-être de bons moyens de classement, d'autant mieux que ce moyen est applicable aux courbes à double courbure et aux surfaces. Les points singuliers dérivent de certaines valeurs des rayons de courbure.

Exemple. Les courbes du second degré ont deux rayons de courbure infinis, quatre ou aucun, ce qui donne trois genres.

Prochainement quelques mots sur ce qu'on doit entendre par *degré* d'une courbe à double courbure.

CONSTRUCTION APPROXIMATIVE POUR LA QUADRATURE DU CERCLE;

D'APRÈS M. WILLICH.

Soient AB une corde égale au rayon, E le milieu de cette corde, C le milieu de l'arc AB; à partir de C, portez encore deux fois le rayon sur la circonférence jusqu'en D, de sorte que l'arc CAD est 120 degrés et AD est 90 degrés; joignez DE qui rencontre la circonférence en F; DF sera presque égal au côté du carré équivalent au cercle.

On trouve DF = 1,77198 au lieu de 1,77245.

SOLUTION DES QUESTIONS 321 ET 322

(voir p. 154);

PAR M. GROLOUS,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouché).

321. Dans un hexagone *gauche* ABC*abc* ayant les côtés *opposés* AB et *ab*, BC et *bc*, C*a* et *c*A égaux et parallèles, les milieux D, E, F, *d*, *e*, *f* des côtés sont dans un même plan.

Il suffit évidemment de prouver que le plan qui passe par trois milieux consécutifs quelconques D, E, F contient le point milieu suivant *d*. Or le plan des côtés opposés AB, *ab* coupe les plans parallèles A*cb*, *a*CB suivant deux droites A*b*, *a*B dont le parallélisme entraîne celui des droites A*b*, EF; d'ailleurs DE est parallèle à AC; les plans DEF, CA*b* sont donc parallèles.

Le parallélisme des plans EFd, CbA résulte pareillement de celui des droites Ab, EF et Cb, Fd; par suite, les deux plans DEF, EFd, qui ont une droite commune EF et qui sont parallèles à un même plan CAb, coïncident.

On peut remarquer que l'hexagone plan DEFdef, dont les sommets sont les milieux des côtés de l'hexagone gauche, a aussi ses côtés opposés égaux et parallèles.

Note du Rédacteur. Cette question a été résolue à peu près de la même manière par M. L.-P. Deparis, élève (*).

---

322. Dans un polygone *gauche* ABCD ... $abcd$...., d'un nombre *pair* de côtés, ayant les côtés opposés AB et ab, BC et bc, CD et cd, etc., égaux et parallèles, les droites Aa, Bb, Cc, etc., qui joignent les sommets opposés, et celles qui joignent les milieux L, M, N, etc., l, m, n, etc., des côtés opposés, passent par un seul et même point.

En effet, les quadrilatères ABab, BCbc, CDcd, etc., sont des parallélogrammes puisqu'ils ont chacun deux côtés égaux et parallèles; chacune des lignes Aa, Bb, Cc, etc., est donc à la fois diagonale de deux parallélogrammes successifs, en sorte que le milieu O de la première est aussi le milieu de la seconde, il est donc le milieu de la troisième, et ainsi de suite de proche en proche. D'ailleurs les droites Ll, Mm, Nn, etc., qui joignent les milieux des côtés opposés, passent toutes par le centre commun O de ces divers parallélogrammes.

(*) Les questions 321 et 323, proposées par M. Amiot dans sa classe au lycée Saint-Louis, m'ont été communiquées. Tm.

SOLUTION DE LA QUESTION 323

(voir page 184);

PAR M. DEVAUX,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouché).

Soient C et c les centres, R et r les rayons des deux cercles; T et t les points où la tangente extérieure Nn rencontre les deux côtés de l'angle droit TOt formé par les deux tangentes intérieures; N et n sont les points de contact. L'aire du triangle TOt a pour mesure le produit de l'hypoténuse Tt par la moitié de la perpendiculaire OH abaissée du sommet de l'angle droit. Or le trapèze rectangle NCcn donne pour cette hauteur

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{O}c.\mathrm{CN} + \mathrm{OC}.cn}{\mathrm{OC} + \mathrm{O}c} = \frac{r}{\mathrm{R}+r}\mathrm{R} + \frac{r}{\mathrm{R}+r}r = \frac{2\mathrm{R}r}{\mathrm{R}+r}.$$

D'ailleurs, en ajoutant les relations

$$\mathrm{T}t + tn = \mathrm{R} + r + \mathrm{TN},\quad \mathrm{T}t + \mathrm{TN} = \mathrm{R} + r + tn \ (*)$$

on obtient, pour la base,

$$\mathrm{T}t = \mathrm{R} + r.$$

L'aire du triangle $\frac{1}{2}$ OH.Tt est donc équivalente au rectangle Rr des rayons.

Dans le cas où les tangentes intérieures, au lieu d'être rectangulaires, se coupent dans l'angle 2α, la même méthode donne

$$\mathrm{R}\,r \cot\alpha$$

(*) Soit I le point où la tangente OT touche le cercle c; on a

$$\mathrm{T}n = \mathrm{TI} = \mathrm{TN} + \mathrm{R} + r;$$

les tangentes OT, Ot sont inclinées de 45 degrés sur la droite des centres.

pour la mesure de l'aire du triangle correspondant TOt.

La surface du triangle formé par une tangente intérieure et deux tangentes extérieures est donnée par une formule semblable. Soient T' le point symétrique de T par rapport à la ligne des centres, O' le point de concours et $2\alpha'$ l'angle des deux tangentes extérieures. La surface du triangle $T'tO'$ est égale au produit du demi-périmètre par le rayon r du cercle inscrit. Or, en ajoutant les relations

$$O't = O'N - tN, \quad tT' = tN + TN, \quad T'O' = O'N - TN,$$

on trouve pour le demi-périmètre

$$O'N \quad \text{ou} \quad R\cot\alpha'.$$

L'aire cherchée a donc pour expression

$$Rr\cot\alpha',$$

qui se réduit à Rr lorsque les tangentes extérieures se coupent à angle droit.

L'aire du quadrilatère formé par les quatre tangentes est donc

$$Rr(\cot\alpha' - \cot\alpha) = Rr\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'}.$$

Lorsque les deux cercles se touchent extérieurement il faut faire $2\alpha = 180^\circ$.

Note du Rédacteur. M. Richard-P. Oxamendi, de Cuba, démontre que l'aire du triangle TOt est égale au rectangle des perpendiculaires abaissées de T et de t sur la ligne des centres, et ensuite que ce rectangle est égal à celui des rayons par des considérations polaires.

SOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 323

(voir page 184);

PAR M. L'ABBÉ L. SERVIER,
Professeur à Saint-Étienne.

Deux cercles étant dans un même plan, et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.

Soient O et O′ les centres des deux cercles de rayon R et R′; A le point d'intersection des deux tangentes intérieures; C et C′ les points de contact de ces deux tangentes, d'un même côté de la ligne des centres; D et D′ ceux de la tangente extérieure commune aux deux cercles; soient enfin B et B′ les points respectifs d'intersection des droites AC et AC′ avec la droite BB′. C'est le triangle ABB′ dont l'aire est équivalente au rectangle des rayons.

En effet, dans le triangle ABO, on a (le triangle ACO étant isocèle)

$$(1)\qquad AB = AO\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = R\sqrt{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)};$$

le triangle AB′O donne semblablement

$$AB' = R'\sqrt{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha'}{2}\right)}.$$

α et α' désignent les angles analogues COD, C′O′D′; ces angles étant complémentaires, l'équation précédente peut s'écrire de la manière suivante :

$$(2) \qquad AB' = R' \sqrt{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Si nous multiplions membre à membre les équations (1) et (2), il vient, toute réduction faite, et après avoir divisé par 2

$$\frac{1}{2} AB \times AB' = R \times R'.$$

C. Q. F D.

QUESTIONS.

324. Quelles sont les phases de la Terre et les éclipses de Terre pour un spectateur placé dans la Lune ?

325. Soit une équation algébrique $\varphi(x) = q$; tous les coefficients sont supposés entiers positifs, q est entier positif; t étant un nombre entier positif, si l'on a

$$\varphi(t) < q, \quad \varphi(t+1) > q,$$

faisant

$$h = \frac{q - (\varphi)(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)},$$

$t + h$ sera une valeur approchée de x comprise entre t et $t + 1$; discuter cette méthode d'approximation donnée par Cardan.

326. Si les racines d'une équation du troisième degré sont de la forme p^2, q^2, $2pq$, les racines de la dérivée sont rationnelles. (Prouhet.)

327. Si les racines d'une équation du quatrième degré sont de la forme p^2, q^2, p^2+2pq, q^2+2pq, les racines de la dérivée sont rationnelles. (PROUHET.)

328. Connaissant la somme de deux nombres et le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, trouver ces nombres. (CARDAN.)

329. Dans une progression géométrique de quatre termes on donne la somme des antécédents et la somme des conséquents, trouver ces termes sans opérer d'élimination. (CARDAN.)

330. i étant la racine réelle de l'équation cubique

$$x^3+qx+r=0,$$

les deux autres racines sont

$$-\frac{i}{2}\pm\frac{1}{2}\left[\frac{4q^2-9ri+6qi^2}{\sqrt{-(4q^3+27r^2)}}\right].$$

(LEBESGUE.)

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS;

PAR E. CATALAN

La plupart des traités d'algèbre donnent la relation générale

$$(n+1)[(n+1)^p-1]$$
$$=\frac{p+1}{1}S_p+\frac{p+1}{1}\frac{p}{2}S_{p-1}+\ldots+\frac{p+1}{1}S_1,$$

dans laquelle S_p représente la somme des puissances p des n premiers nombres entiers. Cette relation permet de calculer assez rapidement les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4;

mais elle devient presque illusoire dès que l'indice p surpasse 4. Il y a dix ans, M. Puiseux, probablement frappé de cet inconvénient, donna, dans le *Journal* de M. Liouville, la valeur de S_p en fonction explicite de n et de p. Malheureusement, la méthode employée par ce savant géomètre est assez compliquée (*); en outre, les valeurs qu'il trouve pour les coefficients de S_p, très-satisfaisantes en théorie, le seraient fort peu s'il s'agissait de passer aux applications numériques (**).

La méthode suivante, dont le germe se trouve dans le grand ouvrage de Lacroix, sera peut-être, à cause de sa simplicité, capable d'intéresser les élèves.

I. On a identiquement

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

En multipliant les deux membres par

$$n = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on trouve

$$n^3 = n(n-1)(n-2 + \left.\begin{matrix}2\\ +1\end{matrix}\right| n(n-1) + n,$$

ou

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Multipliant les deux membres de cette nouvelle égalité

(*) Cette observation, qui n'est pas une critique, s'applique également à un Mémoire de M. Pépin inséré dans les *Nouvelles Annales* (janvier 1856). Du reste, l'auteur, dont je n'ai connu le travail qu'après avoir terminé le mien, dit expressément, en parlant de la formule trouvée par M. Puiseux : « L'expression générale de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul. »

(**) Par exemple, le coefficient 350 serait donné par ce calcul :

$$\frac{4^6 - 3.3^6 + 3.2^6 - 1}{1.2.3} = \frac{4096 - 2187 + 192 - 1}{6} = \frac{2100}{6} = 350.$$

par

$$n = (n-3) + 3 = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on aura encore

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + \left.\begin{matrix} 3 \\ +3 \end{matrix}\right| n(n-1)(n-2) + \left.\begin{matrix} 6 \\ +1 \end{matrix}\right| n(n-1) + n,$$

ou

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n.$$

La loi des résultats est actuellement évidente; de sorte qu'en désignant par $A_{n,p}$ le nombre des arrangements de n lettres, prises p à p, et par B_p, C_p,..., L_p, $(p-2)$ coefficients, indépendants de n, on peut écrire :

$$(A)\quad n^p = A_{n,p} + B_p A_{n,p-1} + C_p A_{n,p-2} + \ldots + L_p A_{n,2} + n.$$

II. Pour démontrer, par le raisonnement connu, la généralité de cette relation et pour trouver la loi des coefficients, supposons

$$n^{p-1} = A_{n,p-1} + B_{p-1} A_{n,p-2} + C_{p-1} A_{n,p-3} + \ldots + K_{p-1} A_{n,2} + n,$$

et multiplions les deux membres de cette égalité par

$$n = (n-p+1) + (p-1) = (n-p+2) + (p-2) = \ldots = (n-1) + 1,$$

nous aurons

$$n^p = A_{n,p} + \left.\begin{matrix} (p-1) \\ +B_{p-1} \end{matrix}\right| A_{n,p-1} + \left.\begin{matrix} (p-2)B_{p-1} \\ +C_{p-1} \end{matrix}\right| A_{n,p-2} + \ldots + \left.\begin{matrix} 2K_{p-1} \\ +1 \end{matrix}\right| A_{n,2} + n,$$

et, par conséquent,

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &B_p = B_{p-1} + (p-1), \\ &C_p = C_{p-1} + (p-2)B_{p-1}, \\ &D_p = D_{p-1} + (p-3)C_{p-1}, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &L_p = 1 + 2K_{p-1} \end{aligned}\right.$$

III. Ainsi que l'a fait remarquer Lacroix (*), le calcul des coefficients B_p, C_p,..., L_p est fort simple. En effet, si l'on suppose successivement

$$p = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

on trouve, par les formules (B),

p	A_p	B_p	C_p	D_p	E_p	F_p	G_p	H_p	K_p	L_p
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	7	1						
5	1	10	25	15	1					
6	1	15	65	90	31	1				
7	1	21	140	350	301	63	1			
8	1	28	266	1050	1701	966	127	1		
9	1	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1	
10	1	45	750	19980	22827	42525	34105	9330	511	1

Il résulte, de la formation de ce tableau, que *le* $l^{\text{ième}}$ *terme d'une colonne verticale quelconque est égal au terme écrit au-dessus augmenté de* l *fois le terme placé à la gauche de celui-ci* (**). Par exemple

$$1701 = 301 + 4.350.$$

IV. Si l'on écrit ainsi les nombres contenus dans le

(*) Et aussi M. Pépin.

(**) Pour plus de régularité, on a représenté par A_p le coefficient de $A_{n,p}$ coefficient égal à l'unité. Le Mémoire de M. Pépin contient également le tableau ci-dessus.

tableau précédent :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	7	15	31	63	127	255	511	
1	6	25	90	301	966	3025	9330		
1	10	65	350	1701	7770	34105			
1	15	140	1050	6951	42525				
1	21	266	2646	22827					
1	28	462	19980						
1	36	750							
1	45								
1									

on voit que les termes de la première ligne horizontale sont tous égaux à l'unité, et que ceux de la deuxième ligne sont égaux aux puissances successives de 2, diminuées de l'unité. En outre, *un terme quelconque* $N_{r,l}$ *occupant le rang* r *dans la* $l^{\text{ième}}$ *ligne horizontale, est égal à* l *fois le terme écrit à sa gauche, augmenté du terme écrit au-dessus*. Il n'est pas bien difficile de conclure de là :

$$(C)\quad N_{r,l}=\frac{1}{1.2.3\ldots(l-1)}\left[\begin{array}{c} l^{r+l-2}-\frac{l-1}{1}(l-1)^{r+l-2} \\ +\frac{l-1}{1}\frac{l-2}{1}(l-2)^{r+l-2}-\ldots\pm 1\end{array}\right].$$

Cette formule générale, beaucoup moins commode que la règle précédente, a été trouvée par M. Puiseux.

V. Revenant à l'équation (A), nous aurons, en chan-

geant n en $n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$, et ajoutant,

$$(D)\left\{\begin{aligned} S_p = \frac{1}{p+1} A_{n+1,p+1} + \frac{B_p}{p} A_{n+1,p} + \frac{C_p}{p-1} A_{n+1,p-1} + \ldots \\ + \frac{L_p}{3} A_{n+1,3} + \frac{1}{2} A_{n+1,2} \end{aligned}\right.$$

ou

$$(E)\left\{\begin{aligned} S_p = & \frac{1}{p+1}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1) \\ & + \frac{B_p}{p}(n+1)n\ldots(n-p+2) \\ & + \frac{C_p}{p-1}(n+1)n\ldots(n-p+3) + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L_p}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n. \end{aligned}\right.$$

Par exemple, la somme des sixièmes puissances des nombres 1, 2, 3,..., 10 sera

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} 11.10.9.8.7.6.5 + \frac{15}{6} 11.10.9.8.7.6 + \frac{65}{5} 11.10.9.8.7 \\ & \quad + \frac{90}{4} 11.10.9.8 + \frac{31}{3} 11.10.9 + \frac{1}{2} 11.10 \\ & = 110(2160 + 7560 + 6552 + 1620 + 93) + 55 \\ & = 1\,978\,405. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} 1^6 + 2^6 + \ldots + 10^6 = & 1 + 64 + 729 + 4096 + 15625 \\ & + 46\,656 + 117\,649 + 262\,144 \\ & + 531\,441 + 1\,000\,000 = 1\,978\,405. \end{aligned}$$

REMARQUES DIVERSES SUR LES NOMBRES PREMIERS

(voir p. 180);

PAR M. V.-A. LEBESGUE (SUITE).

3. THÉORÈME. *Chacune des formules*

$$8x+1, \quad 8x+3, \quad 8x+5, \quad 8x+7,$$

où x *est un entier, renferme une infinité de nombres premiers.*

Cette proposition dépend des trois propositions suivantes faciles à établir :

1°. La formule $x^2 - 2$ n'a aucun diviseur premier de forme $8k+3$, $8k+5$.

2°. La formule $x^2 + 2$ n'a aucun diviseur premier de forme $8k+5$, $8k+3$.

La démonstration est toute semblable à celle du théorème II.

Soit, s'il est possible, $p = 8k+3$ un diviseur de $x^2 - 2$ plus petit qu'aucun diviseur des formes $8k+3$, $8k+5$; comme on peut toujours supposer x impair et plus petit que p, $x^2 - 2$ sera impair et de forme $8m+7$.

Dans l'équation

$$x^2 - 2 = p.y,$$

y sera de forme $8k+5$ et inférieur à p (*). Ainsi, d'après l'hypothèse, y ne saurait être premier. Si y est composé, on verra qu'un de ses facteurs est nécessairement de forme $8k+3$, $8k+5$; p ne serait donc pas un diviseur de $x^2 - 2$ plus petit qu'aucun diviseur des formes $8k+3$, $8k+5$.

On prouve de même la proposition relative aux diviseurs premiers de $x^2 + 2$.

3°. Les formules $x^2 - a$, $x^2 - am^2$ sont simultané-

(*) Car on a $py + 2 < p^2$.

ment divisibles ou non divisibles par p, nombre premier à m et à a.

Si $x^2 - a$ est divisible par p, $(mx)^2 - am^2$ l'est aussi. Si $x^2 - am^2$ est divisible par p, $(kx)^2 - a(mk)^2$ l'est aussi, et l'on posera

$$mk = ph \pm 1.$$

4°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k+1$.

$$x^4 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2x^2$$

n'a, d'après sa première forme, que des diviseurs $8k+1$ ou $8k+5$; d'après la seconde forme, il n'a pas de diviseurs $8k+5$. Le nombre x^4+1 n'a donc que des diviseurs premiers de forme $8k+1$. Si la suite finie de ces diviseurs était $p_1, p_2, \ldots, p_i$, en posant

$$x = p_1 p_2 \ldots p_i,$$

on serait conduit à admettre que

$$(p_1 p_2 \ldots p_i)^4 + 1$$

est premier ou divisible par un des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_i$, ce qui est impossible.

5°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k+5$.

Démonstration de même espèce en partant de x^2+1 où l'on posera

$$x = 4y^4 + 2,$$

d'où

$$x^2 + 1 = 16y^4(y^4+1) + 5,$$

quantité non divisible par 5. On posera ensuite

$$y = p_1 p_2 \ldots p_i.$$

Les nombres p_i sont de forme $8k+5$, 5 excepté.

6°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k+3$.

En partant de la formule

$$x^2 + 2 = 8k + 3.$$

pour x impair, on prouvera de même que la série des nombres premiers $8k + 3$ est illimitée.

7°. De même, pour prouver que les nombres premiers de forme $8k + 7$ sont en nombre illimité, on partira de la formule

$$x^2 - 2 = 8k + 7$$

pour x impair.

4. Théorème. *Sur la factorielle des nombres premiers.*

Le produit

$$1.2.3.4\ldots x = \Pi x$$

est ce qu'on nomme une *factorielle*.

Le produit

$$1.2.3.4.5.7.11\ldots p_x = \mathrm{P}x$$

est la factorielle des nombres premiers.

Par p_x, on indique le nombre premier qui approche le plus de x par défaut.

Le théorème suivant est dû à M. Tchebichef.

On a toujours

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} \Pi x = \mathrm{P}(x).\mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\frac{x}{3}\right)\cdots \\ \qquad \mathrm{P}(\sqrt{x}).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)\cdots \\ \qquad \mathrm{P}(\sqrt[3]{x}).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right)\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Si l'on convient de représenter par $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$ l'entier égal ou immédiatement inférieur à la quantité positive $\frac{x}{\theta}$, on voit tout de suite que si θ est un nombre premier inférieur

à x, l'exposant de θ dans le produit

$$P(x).P\left(\frac{x}{2}\right).P\left(\frac{x}{3}\right)\ldots$$

sera $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$.

L'exposant de θ dans le produit

$$P(\sqrt{x}).P\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\ldots$$

sera de même $e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)$.

Et ainsi de suite, de sorte que l'exposant de θ dans le second membre de l'équation (a) sera

$$e\left(\frac{x}{\theta}\right)+e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)+e\left(\frac{x}{\theta^3}\right)\ldots,$$

qui, comme on le sait, est l'exposant de θ dans le produit $1.2.3\ldots x$.

Ce théorème a été introduit, je crois, dans l'*Arithmétique* de M. Bertrand, dont les traités élémentaires sont très-substantiels.

SOLUTION DE LA QUESTION 315

(voir p. 82);

PAR M. PAINVIN,
Professeur.

L'énoncé de la question n'est pas exact (*).

Soient :

x_i, y_i, z_i les coordonnées du point M_i;

(*) On a omis le facteur $n-1$? TM.

x, y, z celles du point E;
X, Y, Z celles du point N;
A étant pris pour axe des coordonnées

$$X = \sum x_i, \quad Y = \sum y_i, \quad Z = \sum z_i,$$

je cherche le *minimum* de l'expression suivante :

$$F = \overline{M_1 E}^2 + \overline{M_2 E}^2 + \ldots + \overline{M_n E}^2 - p\,\overline{AE}^2,$$

$$F = \sum [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)]$$
$$- p\,(x^2 + y^2 + z^2);$$

cette expression devient, en développant et en posant

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = l_i^2,$$

$$F = \sum l_i^2 + (n-p)(x^2 + y^2 + z^2) - 2\,(xX + yY + zZ)$$

ou

$$F = \sum l_i^2 - \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{n-p}$$
$$+ (n-p)\left[\left(x - \frac{X}{n-p}\right)^2 + \left(y - \frac{Y}{n-p}\right)^2 + \left(z - \frac{Z}{n-p}\right)\right];$$

sous cette forme on voit immédiatement que le *minimum* de l'expression F s'obtiendra en posant

$$x = \frac{X}{n-p}, \quad y = \frac{Y}{n-p}, \quad z = \frac{Z}{n-p}.$$

Le point E ne coïncidera avec le point N que lorsqu'on fera $p = n - 1$.

Note du Rédacteur. M. Félix Lucas, élève de l'École Polytechnique, est parvenu au même résultat.

PREUVE ÉLÉMENTAIRE DE LA ROTATION DE LA TERRE PAR LES OSCILLATIONS DU PENDULE LIBRE;

PAR M. L'ABBÉ SOUFFLET,
Docteur ès Sciences mathématiques,
Professeur au collége Saint-Vincent, à Rennes.

1°. Si je développe un cône droit à base circulaire sur son plan tangent, j'obtiens un secteur dont l'arc est égal à la circonférence $2\pi R$ de la base et dont le rayon est le côté a du cône. L'angle x du secteur est donc

$$360^\circ \times \frac{R}{a},$$

d'après la proportion

$$x : 360^\circ :: 2\pi R : 2\pi a;$$

et comme le rapport $\frac{R}{a}$ est par définition le sinus de l'angle θ du cône, nous aurons

$$x = 360^\circ \sin\theta.$$

2°. Il s'ensuit que le côté a, en faisant une révolution autour du cône, décrit un angle égal à $360^\circ \sin\theta$; en effet, la somme des angles très-petits qu'il décrit à chaque instant de son mouvement est égale à l'angle du secteur : le mouvement de a qui décrit le secteur est donc le même que celui qui décrit le cône et peut le remplacer.

3°. Le côté a décrivant le cône et emportant avec lui une normale au cône la fait tourner sur elle-même d'un angle $360^\circ \sin\theta$ égal à celui qu'il décrit; en effet, cette normale et la tangente déterminent un plan qui tourne à chaque instant sur la normale d'un angle égal à celui que

décrit a dans le secteur : ainsi un cône faisant une révolution sur son axe, une perpendiculaire à sa surface tourne sur elle-même d'un angle égal au développement du cône ou de $360° \sin\theta$.

4°. Si la rotation du cône sur son axe (*) est uniforme et dure vingt-quatre heures, la durée t de la rotation complète d'une normale sera donnée par la proportion

$$t : 24^h :: 360° : 360° \sin\theta,$$

et l'on aura

$$t = \frac{24^h}{\sin\theta} = 32^h,2362$$

pour

$$\theta = 48° \, 7'.$$

Cette durée varie de vingt-quatre heures à l'infini pendant que θ passe de 0 à 90 degrés.

5°. Concevons maintenant un cône circonscrit à la terre suivant un parallèle, pendant que ce cône avec la terre fera une révolution sur son axe. Le fil à plomb tournera sur lui-même de $360° \sin\theta$; θ étant l'angle du cône ou la latitude du parallèle. Ainsi la latitude de Rennes étant 48° 7', la révolution complète du fil à plomb sur lui-même y dure $32^h,2362$ (heures sidérales) ou $32^h\ 9^m$ (heures communes). Au pôle, cette durée est de vingt-quatre heures sidérales, et à l'équateur le mouvement est nul : tels sont les corollaires des paragraphes précédents.

6°. Mais l'inertie du mouvement oscillatoire du pendule libre ne permet pas à son plan d'oscillation de tourner sur sa verticale ; ce plan paraîtra donc tourner au-

---

(*) La normale change à chaque instant de direction, et, par conséquent, l'angle qu'elle fait avec la direction primitive varie, et la normale mobile tourne autour de la normale considérée comme fixe.

dessus de l'horizon et accusera, par conséquent, la rotation de la terre sur son axe. C'est ce que constate l'expérience de M. Foucault.

QUESTIONS.

331. Soient les jours relatifs au soleil vrai, au soleil fictif dans l'écliptique, au soleil fictif dans l'équateur. Quand ces jours considérés deux à deux sont-ils égaux? Quand les trois jours sont-ils égaux?

332. Soit

$$X = MN^k;$$

M et N sont des fonctions algébriques entières de x n'ayant pas de facteurs communs; k est un nombre entier positif. Désignons par P le plus grand commun diviseur de X et de $\frac{dX}{dx}$; faisons

$$Q = \frac{X}{P}, \quad R = \frac{dX}{P\,dx};$$

alors N est le plus grand commun diviseur de Q et de $R - k\frac{dQ}{dx}$.

(OSTROGRADSKY.)

333. Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n, quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

334. Étant donnés un triangle ABC et un point quelconque C dans l'intérieur du triangle, on mène les transversales AOa, BOb, COc; on a l'identité

$$\frac{1}{AOb} + \frac{1}{BOc} + \frac{1}{COa} = \frac{1}{AOc} + \frac{1}{BOa} + \frac{1}{COb}.$$

(MANNHEIM.)

MÉTHODE DE M. CAUCHY

Pour modifier la méthode de Newton dans la résolution des équations numériques ;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

1. On sait que la méthode de Newton est quelquefois en défaut, c'est-à-dire que la correction qu'elle fournit, ajoutée à la première valeur approchée de la racine, donne quelquefois une somme plus éloignée de cette racine que les limites qui la comprennent. Aussi divers mathématiciens, tels que Fourier, ont cherché avec plus ou moins de succès à la perfectionner en écartant ces causes d'erreur. M. Cauchy a résolu complétement ce problème; mais, quoique son travail soit publié depuis vingt ans, quoique M. l'abbé Moigno ait essayé plusieurs fois, et notamment dans le tome X des *Nouvelles Annales*, de diriger sur ce sujet l'attention du monde savant, ce procédé n'est pas connu comme il devrait l'être, et nous croyons utile de le rappeler, en y joignant quelques observations et surtout la manière de resserrer une racine entre deux valeurs, l'une supérieure, l'autre inférieure.

2. Soit

$$y = f(x)$$

une fonction quelconque algébrique ou transcendante; on demande la plus petite racine α de l'équation

$$f(x) = 0$$

comprise entre deux valeurs de x, a et A.

Nous remarquerons que cette question, étant résolue d'une manière générale, dispensera de la séparation des racines : en effet, dès qu'on aura trouvé avec une approximation suffisante la plus petite racine α comprise entre a et A, en ajoutant à cette racine α une quantité suffisamment petite, on obtiendra sans peine une valeur a' telle, que a et a' ne contiennent que la seule racine α. Donc on pourra trouver entre a' et A une seconde racine, et ainsi de suite, s'il y a lieu.

On peut toujours supposer α positif, sauf à changer le signe de x si cela est nécessaire ; dès lors A sera positif : mais on peut aussi supposer $a \geqq 0$, car rien n'empêche de partir de la valeur $a = 0$. Enfin, observons que l'on peut encore supposer $f(a) > 0$: en effet, considérons la courbe dont l'équation est

$$y = f(x);$$

si $f(a)$ est négatif, il suffira de changer le sens des ordonnées, ce qui revient à changer le signe de tous les termes de $f(x)$.

3. Cela posé, toute la méthode est fondée sur le théorème suivant qui se trouve dans quelques Algèbres, mais que nous croyons devoir démontrer ici, parce qu'il n'est pas très-répandu.

Soient R *la plus petite et* S *la plus grande valeur que reçoit la fonction dérivée* $f'(x)$ *lorsque* x *croît par degrés insensibles depuis* a *jusqu'à* A ; *la valeur du rapport*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

sera toujours comprise entre R *et* S, *si* x *est compris entre* a *et* A.

En effet, $f'(x)$ étant la limite du rapport de l'accroissement de $f(x)$ à celui de x, on peut toujours trouver un

nombre h assez petit pour que l'on ait

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > f'(x) - \varepsilon$$

et

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < f'(x) + \varepsilon,$$

ε étant une quantité aussi petite que l'on voudra. Donc, à plus forte raison,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > \mathrm{R} - \varepsilon$$

et

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \mathrm{S} + \varepsilon.$$

D'après cela, concevons que l'on interpose entre les limites a et x des valeurs croissantes de x, savoir x_1, x_2,..., x_n assez rapprochées pour que les conditions précédentes soient toujours remplies quand on prendra l'une de ces valeurs pour x et la suivante pour $x+h$. Les fractions

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \ldots, \quad \frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}$$

seront toutes plus grandes que $\mathrm{R}-\varepsilon$ et toutes plus petites que $\mathrm{S}+\varepsilon$.

Or, comme toutes ces fractions ont des dénominateurs positifs, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une nouvelle fraction qui sera elle-même comprise entre $\mathrm{R}+\varepsilon$ et $\mathrm{S}+\varepsilon$; car si l'on additionne les inégalités

$$f(x_1)-f(a) > (x_1-a)(\mathrm{R}-\varepsilon),$$
$$f(x_2)-f(x_1) > (x_2-x_1)(\mathrm{R}-\varepsilon), \ldots,$$
$$f(x)-f(x_n) > (x-x_n)(\mathrm{R}-\varepsilon),$$

on aura, en réduisant,

$$f(x)-f(a)>(x-a)(R-\varepsilon)$$

ou

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>R-\varepsilon.$$

De même

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<S+\varepsilon;$$

donc à la limite, pour $\varepsilon=0$, on trouvera le théorème énoncé.

4. Ainsi, x étant compris entre a et A, F (x) sera une des valeurs que prendra $f'(x)$ pour x compris entre a et A ; or, puisque $f(a)>0$, α étant la plus petite racine ou, ce qui revient au même, α étant la première racine de $f(x)=0$ depuis a jusqu'à A, on voit que $f(x)$ diminue quelque part entre a et α, et, par conséquent, $f'(x)$ prend des valeurs négatives dans ce même intervalle.

5. Cela posé, l'équation

$$y=f(x)$$

de la courbe que nous considérons pouvant être mise sous la forme

$$y=f(a)+(x-a)F(x),$$

comparons-la avec l'équation

$$y_1=f(a)+(x-a)m$$

d'une droite qui partira évidemment du même point que la courbe, puisque $x-a$ donnera

$$y=y_1=f(a),$$

et cherchons quel doit être le coefficient m pour que la droite rencontre l'axe des x avant le point de la courbe

qui correspond à $x = \alpha$. Il suffit pour cela que, dans l'intervalle de a jusqu'à α, on ait toujours $y_1 < y$, car si cette condition est remplie, l'ordonnée de la courbe sera encore positive quand celle de la droite sera annulée. Il est clair qu'on y parviendra en donnant à m une valeur inférieure à toutes celles que peut avoir F (x) dans l'intervalle indiqué. Ainsi tout se réduit à prendre le minimum de F (x), c'est-à-dire celui de $f'(x)$ depuis $x = a$ jusqu'à $x = \alpha$, ou plutôt depuis a jusqu'à A, intervalle qui comprend le premier. Comme nous avons vu que $f'(x)$ devenait négatif quelque part entre a et α, on conçoit que ce minimum sera un maximum numérique des valeurs négatives de $f'(x)$.

Voici maintenant ce qu'il y a de simple et d'ingénieux à la fois dans la manière dont M. Cauchy détermine cette quantité m. Il met à part les termes positifs et les termes négatifs de $f(x)$ et pose

$$f(x) = \lambda(x) - \mu(x),$$

ce qui donnera aussi

$$f'(x) = \lambda'(x) - \mu'(x),$$

de sorte que $f'(x)$ sera décomposé de la même manière en un groupe positif et un groupe négatif. Or, x croissant constamment depuis a jusqu'à A, il est évident que l'on aura le minimum de $f'(x)$ en remplaçant x par a dans $\lambda'(x)$ et par A dans $\mu'(x)$; donc enfin

$$m = \lambda'(a) - \mu'(\text{A}).$$

m ainsi déterminé donne naturellement $y_1 < y$. Donc, si l'ordonnée $y_1 = 0$, la valeur correspondante de l'abscisse x sera comprise entre a et la racine α, et sera une valeur plus rapprochée de α; cette valeur de x, pour laquelle

$$f(a) + m(x - a) = 0,$$

donnera

$$x - a = -\frac{f(a)}{m}$$

et

$$x = a - \frac{f(a)}{m}.$$

On voit maintenant comment on pourra approcher indéfiniment de α. Soit

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{m}$$

cette première valeur de x; nous aurons ensuite

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{m_1},$$

en posant

$$m_1 = \lambda'(a_1) - \mu'(A).$$

On aura de même

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{m_2},$$

et ainsi de suite. On trouvera d'une manière analogue la plus grande des racines comprises entre a et A, en revenant de A à a.

6. Cette méthode présente le cachet de rigueur et de généralité qui caractérise les travaux de M. Cauchy, mais elle est moins avantageuse que celle de Newton, quand celle-ci est applicable. En effet, au lieu de prendre

$$x = a - \frac{f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(A)},$$

Newton pose

$$x = a - \frac{f(a)}{\lambda'(a) - \mu'(a)},$$

puisque

$$f'(a) = \lambda'(a) - \mu'(a).$$

Or, de ces deux quantités, m et $f'(a)$, toutes deux né-

gatives, du moins quand la correction de Newton est applicable, la plus grande numériquement est m, parce que la portion négative $\mu'(A)$ est plus grande que dans $f'(a)$. Donc, dans la méthode de Newton, le dénominateur de la correction étant plus petit, la correction sera plus considérable, et, par suite, plus avantageuse.

D'après cela, il est important de pouvoir reconnaître dans quelles circonstances la méthode de Newton est applicable. M. Cauchy est encore parvenu à résoudre ce problème, ainsi qu'on va le voir.

Si $f'(x)$ croît d'une manière continue de a jusqu'à A, les valeurs négatives de cette quantité décroissant numériquement, il est clair que $f'(a)$ sera le minimum cherché, c'est-à-dire le maximum des valeurs négatives que nous avons appelé m; on aura donc

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

C'est la correction de Newton.

Si, au contraire, $f'(x)$ va toujours en décroissant depuis a jusqu'à A, les valeurs négatives de cette quantité croissant numériquement, on pourra évidemment prendre $f'(A)$ pour valeur de m, ce qui donnera

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(A)}.$$

Cette correction a encore été indiquée par Newton, cependant on néglige de la faire connaître dans les ouvrages élémentaires, sans doute parce qu'elle n'a pas, comme la correction $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, une signification géométrique relative à la tangente en un point de la courbe. Mais elle n'en est pas moins utile, et l'on doit remarquer qu'on trouve bien plus souvent qu'on ne le pense l'occasion d'employer la méthode de Newton, si l'on appelle ainsi l'en-

semble des deux corrections que nous venons d'examiner.

Pour reconnaître si $f'(x)$ varie d'une manière continue, observons quel sera le signe de

$$f''(x) = \lambda''(x) - \mu''(x),$$

qui est la dérivée de $f'(x)$. Si l'on fait tour à tour dans la somme des termes positifs $x = a$ et $x = A$, et dans la somme des termes négatifs $x = A$ et $x = a$, on obtiendra deux différences $\lambda''(a) - \mu''(A)$ et $\lambda''(A) - \mu''(a)$, dont la première est évidemment inférieure, la seconde évidemment supérieure à toutes les valeurs de $f''(x)$ dans l'intervalle de $x = a$ à $x = A$. Donc si ces deux différences sont de même signe, il en sera de même, à plus forte raison, pour toutes les valeurs de $f''(x)$ comprises dans cet intervalle; ainsi le caractère cherché pour la continuité sera

$$\frac{\lambda''(a) - \mu''(A)}{\lambda''(A) - \mu''(a)} > 0,$$

puisque les deux termes de cette fraction devront avoir le même signe.

Cette condition étant remplie, si les deux signes des termes de la dernière fraction sont positifs, $f'(x)$ croît toujours dans l'intervalle indiqué : donc la correction est $-\frac{f(a)}{f'(a)}$; si le deux signes sont négatifs, $f'(x)$ décroît constamment : donc la correction sera $-\frac{f(a)}{f'(A)}$.

Nous allons voir ce qu'il faut faire quand les deux signes sont opposés.

7. Jusqu'à présent nous avons supposé que les corrections étaient toujours additives, ce qui ne permettait d'approcher de la racine que d'un seul côté. Nous allons

chercher maintenant à resserrer cette racine entre deux valeurs, l'une inférieure et toujours croissante, comme précédemment, l'autre supérieure et toujours décroissante. Seulement, il faut admettre pour cela que cette racine soit séparée, et nous avons vu que les recherches précédentes permettent d'y parvenir.

Nous supposerons donc que α est la seule racine comprise entre a et A; alors, puisque $f(a) > 0$, on a nécessairement $f(\mathrm{A}) < 0$.

On s'approchera toujours de a vers α en posant

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{m}$$

et

$$m = \lambda'(a) - \mu'(\mathrm{A}).$$

En modifiant légèrement les raisonnements qui ont conduit à cette correction, on trouvera pour approcher de A vers α, la valeur

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} - \frac{f(\mathrm{A})}{m}$$

que l'on peut d'ailleurs vérifier en remarquant que la correction $-\frac{f(\mathrm{A})}{m}$ est négative comme cela doit être puisque $f(\mathrm{A})$ et m sont tous deux négatifs; de plus

$$m = \lambda'(a) - \mu'(\mathrm{A})$$

étant maximum numérique des valeurs négatives de $f'(x)$, la correction ne peut être trop considérable.

Cette méthode réussit dans tous les cas possibles; mais pour que l'on soit forcé de l'appliquer, c'est-à-dire pour que la méthode de Newton ne puisse être employée, il faut que les limites $x = a$ et $x = \mathrm{A}$ de la racine α comprennent un changement dans la marche des valeurs de $f'(x)$ qui croîtrait après avoir décru ou réciproquement;

en d'autres termes, il faut que la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x)$$

ait une inflexion dans cet intervalle. Dans cette circonstance même, on peut généralement ramener cette recherche au cas ordinaire en prenant pour l'une des limites de α la valeur de x qui correspond à $f''(x) = 0$ et qui donne par conséquent le point d'inflexion.

8. Voyons ce qu'il faut faire pour resserrer la racine en plus et en moins quand la méthode de Newton est applicable, puisque l'emploi en est plus avantageux quand il est légitime.

On reconnaîtra sans peine, d'après ce qui a été dit jusqu'à présent, que si $f'(x)$ croît toujours de a jusqu'à A, on doit prendre

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

et

$$A_1 = A - \frac{f(A)}{f'(a)}.$$

Si, au contraire, $f'(x)$ décroît toujours, il faut poser

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(A)}$$

et

$$A_1 = A - \frac{f(A)}{f'(A)} \text{ (*)}.$$

Enfin nous terminerons en rappelant que nous avons supposé la racine α positive, ainsi que ses limites a et A : de plus, nous avons aussi supposé $f(a) > 0$, et, par suite,

(*) Fourier indique cette méthode, mais il la soumet à des restrictions qui ne sont pas toutes nécessaires.

$f(A) < 0$. Si l'énoncé de la question ne rentrait pas dans ces suppositions, il serait facile de l'y ramener.

9. Il nous reste maintenant à donner quelques exemples.

Soit l'équation

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

dont les racines sont comprises l'une entre 0 et -1, l'autre entre 0 et 1, et enfin la troisième entre 2 et 3. Cherchons la seconde racine pour laquelle $a = 0$, $A = 1$, ce qui donne

$$f(a) = 1 \quad \text{et} \quad f(A) = -1.$$

On trouve

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1.$$

et

$$f''(x) = 6x - 4;$$

donc $f''(x)$ prenant des valeurs différentes pour les limites qui comprennent la racine, on ne pourra pas compter sur la méthode de Newton, et il faut prendre avec M. Cauchy

$$m = \lambda'(a) - \mu'(A),$$

ce qui donne

$$m = -5, \quad a_1 = 0,2$$

et

$$A_1 = 0,8.$$

Ensuite

$$m_1 = \lambda'(a_1) - \mu'(A_1) = -4,08,$$

d'où l'on tire

$$a_2 = 0,38 \quad \text{et} \quad A_2 = 0,66;$$

on trouvera de même

$$a_3 = 0,5, \quad A_3 = 0,584.$$

Une fois arrivé à ce point, on pourra employer la méthode de Newton. En effet, le point d'inflexion de la courbe dont l'équation est

$$y = f(x)$$

étant donné par la valeur de x qui rend nulle la dérivée seconde $6x - 4$, c'est-à-dire par la valeur $x = 0,666$, on voit que la courbe ne subit pas d'inflexion depuis $x = 0,5$ jusqu'à $x = 0,584$. Comme $f''(x)$ est négatif pour ces deux valeurs, $f'(x)$ diminue dans cet intervalle; donc on devra poser

$$a_4 = a_3 - \frac{f(a_3)}{f'(A_3)}$$

et

$$A_4 = A_3 - \frac{f(A_3)}{f'(A_3)},$$

ce qui donnera

$$a_4 = 0,554 \quad \text{et} \quad A_4 = 0,555.$$

En continuant ainsi l'on trouve

$$x = 0,55496.$$

10. Considérons encore l'équation transcendante

$$x.2^x = 30\ (*).$$

Il est clair qu'il n'y a pas de racines négatives, puisque le premier membre serait alors négatif; de plus, il n'y aura qu'une seule racine positive, car le premier membre croît indéfiniment à partir de $x = 0$.

(*) Cette équation est déjà résolue par Pacciolo. Tm.

Posons

$$f(x) = 30 - x.2^x;$$

on reconnaît que la racine est comprise entre $a = 3$ qui donne

$$f(a) = 6,$$

et $A = 4$ pour lequel

$$f(A) = -34.$$

Ensuite

$$f'(x) = -2^x(1 + xl2)$$

et

$$f''(x) = -2^x l2(2 + xl2),$$

en indiquant par $l2$ le logarithme népérien de 2, c'est-à-dire 0,69314718. On peut voir facilement que $f''(x)$ étant toujours négatif, $f'(x)$ décroît constamment; on a donc

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(A)}$$

et

$$A_1 = A - \frac{f(A)}{f'(A)},$$

car la méthode de Newton peut s'appliquer ici puisqu'il n'y a pas de changement de courbure dans l'intervalle de $x = 3$ à $x = 4$.

On a

$$f'(34) = -60,3614,$$

ce qui donne

$$a_1 = 3,1 \quad \text{et} \quad A_1 = 3,4.$$

On calculera facilement 2^x par logarithmes, et l'on parviendra bientôt à la valeur $x = 3,22$ qui est suffisamment approchée, car

$$f(3,22) = 0,00001.$$

EXERCICES D'ALGÈBRE

Extraits du Manuel des candidats à l'École Polytechnique

DE M. CATALAN (*).

I. Étant donné le système

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p \quad = a_1,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{p+1} = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n + x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = a_n,$$

trouver dans quel cas il est *déterminé, indéterminé* ou *impossible*. Quand il est déterminé, quel est son *déterminant* et quelles sont les valeurs des inconnues?

II. Transformer l'expression $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{(a+b)}}$ en une autre dont le dénominateur soit rationnel.

III. En représentant par m un nombre plus grand que l'unité, on a

$$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1.2}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2.3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots = \frac{m}{m-1}.$$

IV. De combien de manières peut-on former le nombre 251 par l'addition de douze nombres entiers, inférieurs à 50?

(*) *Sous presse*, chez M. Mallet-Bachelier.

V. Démontrer la double inégalité

$$\frac{1}{(p-1)(a-1)^{p-1}} > \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(a+1)^p} + \frac{1}{(a+2)^p} + \ldots$$
$$> \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}.$$

VI. Développer, en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, la fonction

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \ldots$$

Quel sera le coefficient de x^n. La série sera-t-elle convergente $(1 > x > 0)$?

VII. Trouver la somme des produits trois à trois des n premiers nombres naturels.

VIII. Trouver la plus petite valeur entière de x vérifiant l'inégalité

$$(1,01)^x > 10x.$$

IX. Une personne emprunte pour un an, à *intérêt composé*, un *capital a*. Elle convient de se libérer au moyen de n payements égaux, effectués à des intervalles de temps égaux entre eux. Le premier payement sera fait $\frac{1}{n}$ d'année après le moment de l'emprunt. Le taux de l'intéret est de $\frac{z}{n}$ *pour franc pour* $\frac{1}{n}$ d'année. On demande

1°. La valeur b de chacun des payements;

2°. Vers quelle limite tend le rapport $\frac{nb}{a}$, lorsque n augmente indéfiniment;

3°. Comment varie cette limite lorsque r diminue;

4°. Quelle est la valeur de cette limite pour $r = 0$.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 315

(voir page 220);

PAR M. FÉLIX LUCAS,
Élève de l'École Polytechnique.

Soit un système de n forces appliquées au point A et représentées en grandeur et en direction par les longueurs AM_1, AM_2,..., AM_n, et soit AN la résultante.

E étant un point quelconque de l'espace, on forme l'expression

$$\overline{M_1E}^2 + \overline{M_2E}^2 + \ldots + \overline{M_nE}^2 - \overline{AE}^2.$$

Trouver la position du point E qui rend cette expression minima.

Je prends trois axes rectangulaires passant par A; j'appelle

$$\alpha_p,\ \beta_p,\ \gamma_p$$

les coordonnées du point M_p,

$$a,\ b,\ c$$

celles du point N.

On a alors

$$a = \sum \alpha_p, \quad b = \sum \beta_p, \quad c = \sum \gamma_p.$$

Si x, y, z désignent les coordonnées du point E, l'expression proposée est

$$\sum [(x-\alpha_p)^2 + (y-\beta_p)^2 + (z-\gamma_p)^2] - (x^2 + y^2 + z^2),$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(n-1)(x^2+y^2+z^2)-2(ax+by+cz)\\ &\qquad\qquad +\sum(\alpha_p^2+\beta_p^2+\gamma_p^2). \end{aligned}\right.$$

Si je fais mouvoir le point E dans l'espace de manière que cette expression conserve une valeur constante k, ce point décrira une sphère (réelle ou imaginaire) dont le centre, qui ne dépend pas de la constante k, a pour coordonnées $\frac{a}{n-1}$, $\frac{b}{n-1}$, $\frac{c}{n-1}$.

On reconnaît aisément que la plus petite valeur que puisse prendre la fonction (1) pour des positions réelles de E est la valeur de k qui réduit à un point la sphère en question. Mais alors la position de E est complétement déterminée. C'est le centre fixe dont nous avons parlé.

Le point cherché n'est donc pas le point N (*), mais il s'obtient en prenant sur AN, à partir de A, la $(n-1)^{\text{ième}}$ partie de cette droite.

Note du Rédacteur. Une solution anonyme, fondée sur des raisonnements analogues à ceux de la solution précédente, nous a été adressée de Luxembourg, et une autre par M. Émile Fron, élève du collége Rollin (classe de M. Suchet).

NOTE SUR UN THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE D'EULER

(voir t. XIV, p. 433);

Par M. CHEVILLIER,
Professeur à Besançon.

Ce théorème doit s'énoncer ainsi :

m et *b* étant supposés premiers entre eux, si l'on peut

(*) On a mis $\overline{AE}^2$ au lieu de $(n-1)\,AE^2$; faute typographique.

trouver un nombre entier x tel, que $mx - b$ divise

$$mc + ab,$$

la valeur correspondante de y est donnée par l'équation

$$my - a = \frac{mc + ab}{mx - b},$$

car on a

$$y = \frac{mc + ab + a(mx - b)}{m(mx - b)};$$

si m et b ne sont pas premiers entre eux, m et $mx - b$ ne seront pas non plus premiers entre eux et alors y peut avoir une valeur fractionnaire.

SUR LE CALCUL DE π AU MOYEN DES LOGARITHMES;

PAR M. IS. CHEVILLIET.

Si l'on calcule π par logarithmes au moyen des formules

$$P_1 = 2\sqrt{2},$$

$$P_2 = 2^2\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$P_3 = 2^3\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui donnent les périmètres des polygones réguliers de 4, 8, 16,..., côtés inscrits dans le cercle dont le diamètre est l'unité, l'approximation, au lieu d'aller toujours en augmentant, diminue bientôt, ainsi que M. Dupain l'a fait observer dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales* (p. 85). Cela est facile à expliquer, car la quantité pré-

cédée du signe moins dont on ne connaît jamais que les sept premiers chiffres tendant vers 2, l'erreur relative de la différence croît très-rapidement.

Pour éviter cet inconvénient et obtenir π avec toute l'approximation que comportent les Tables, j'emploie depuis longtemps, au lieu de ces formules, les suivantes :

$$P_1 = 2\frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$P_2 = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$P_3 = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

....

$$\pi = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots \text{ à l'infini},$$

qui s'en déduisent facilement et qui ont déjà été données dans les *Nouvelles Annales* par M. Catalan (t. I, p. 190), et aussi par Euler.

Le calcul de π au moyen de cette dernière expression est tout entier contenu dans le tableau suivant où, pour abréger, je désigne par D_1, D_2,..., D les dénominateurs des fractions successives et le produit de tous les dénominateurs employés.

$\log 2 = 0,3010300$	$\log D_1 = 0,1505150 = \log 1,414214$
$\log (2 + D_1) = 0,5332908$	$\log D_2 = 0,2666454 = \log 1,847759$
$\log (2 + D_2) = 0,5852079$	$\log D_3 = 0,2926039 = \log 1,961570$
$\log (2 + D_3) = 0,5978674$	$\log D_4 = 0,2989337 = \log 1,990370$
$\log (2 + D_4) = 0,6010131$	$\log D_5 = 0,3005066 = \log 1,997591$
$\log (2 + D_5) = 0,6017984$	$\log D_6 = 0,3008992 = \log 1,999397$
$\log (2 + D_6) = 0,6019946$	$\log D_7 = 0,3009973 = \log 1,999849$
$\log (2 + D_7) = 0,6020437$	$\log D_8 = 0,3010219 = \log 1,999963$
$\log (2 + D_8) = 0,6020559$	$\log D_9 = 0,3010279 = \log 1,999990$
$\log (2 + D_9) = 0,6020589$	$\log D_{10} = 0,3010274 = \log 1,999997$
$\log (2 + D_{10}) = 0,6020597$	$\log D_{11} = 0,3010298 = \log 1,999999$
	$\log D = \bar{3},1152101$

$$12 \log 2 = 3,6123600$$
$$\log D = \bar{3},1152101$$
$$\log \pi = 0,4971499 = \log 3,141593.$$

PROBLÈME.

Déterminer la surface du second degré qui passe par neuf points;

PAR M. POUDRA.

Soient a, b, c, d, e, f, g, h, i les neuf points donnés.

Par la droite ab et par les six points c, d, e, f, g, h on fait passer un hyperboloïde (*Nouvelles Annales*, mai 1856, p. 161).

Par la droite gh et par les six points a, b, c, d, e, f on fait passer un autre hyperboloïde.

Ces deux hyperboloïdes se couperont suivant une courbe gauche du quatrième degré passant par les huit

points a, b, c, d, e, f, g, h, qui sera donc facile à construire par points (*voir* p. 162).

Si, par le neuvième point i, on mène un plan quelconque, il coupera la courbe du quatrième degré en quatre points qui, avec le point i, détermineront une conique.

Or la courbe du quatrième degré qui est l'intersection des deux hyperboloïdes appartient également à toutes les surfaces du deuxième degré passant par ces huit points; donc elle appartient à celle qui passe par les neuf points donnés. Donc la section conique ci-dessus déterminée par un plan passant par le neuvième point i est sur cette surface; on peut déterminer ainsi une infinité de sections coniques situées sur la surface cherchée.

On voit aussi qu'en prenant un autre point que le point i pour le neuvième, on aurait d'autres sections coniques situées sur la même surface.

La surface du deuxième degré est donc déterminée.

SUR LES SÉRIES QUI DONNENT LE NOMBRE DE RACINES RÉELLES des équations algébriques à une ou à plusieurs inconnues;

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

I.

Quelques propriétés des formes quadratiques (*).

1°. Soit

$$f = \sum_r \sum_s A_{r,s} u_r u_s \qquad (A_{r,s} = A_{s,r})$$

(*) Nous engageons le lecteur à ne prendre qu'une forme quadratique à trois variables u_1, u_2, u_3 et il verra que dans cet admirable Mémoire tout devient d'une facilite intuitive. TM.

une forme quadratique à n indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_n$; si on la transforme au moyen de la substitution linéaire

(1) $$u_r = a_{r,1} v_1 + a_{r,2} v_2 + \ldots + a_{r,n} v_n$$

en posant

(2) $$A_{1,s} a_{1,r} + A_{2,s} a_{2,r} + \ldots + A_{n,s} a_{n,r} = h_{s,r},$$

et en supposant

(3) $$\begin{cases} h_{1,r} a_{1,s} + h_{2,r} a_{2,s} + \ldots + h_{n,r} a_{n,s} = 0, \\ h_{1,r} a_{1,r} + h_{2,r} a_{2,r} + \ldots + h_{n,r} a_{n,r} = p_r, \end{cases}$$

on aura

(4) $$f = \sum_r p_r v_r^2 \cdot$$

où les rectangles ont disparu. La substitution linéaire

(5) $$u_r = c_{r,1} w_1 + c_{r,2} w_2 + \ldots + c_{r,n} w_n$$

transformera d'une manière semblable la forme f dans celle-ci

(6) $$f = \sum_r q_r w_r^2,$$

en faisant

$$A_{1,s} c_{1,r} + A_{2,s} c_{2,r} + \ldots + A_{n,s} c_{n,r} = k_{s,r},$$
$$k_{1,r} c_{1,s} + k_{2,r} c_{2,s} + \ldots + k_{n,r} c_{n,s} = 0,$$
$$k_{1,r} c_{1,r} + k_{2,r} c_{2,r} + \ldots + k_{n,r} c_{n,r} = q_r.$$

Si l'on indique par A et C les déterminants (*)

$$\sum (\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}), \quad \sum (\pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n}),$$

et par $\alpha_{r,s}$, $\gamma_{r,s}$ les expressions $\frac{dA}{da_{r,s}}$, $\frac{dC}{dc_{r,s}}$; les équa-

(*) Il est à regretter, dans l'intérêt de l'enseignement public, que la traduction de l'ouvrage fondamental sur les déterminants de M. Brioschi tarde si longtemps à paraître. Il y a urgence. TM.

tions (1) donnent réciproquement v en u

$$A v_r = \alpha_{1,r} u_1 + \alpha_{2,r} u_2 + \ldots + \alpha_{n,r} u_n,$$

et en substituant pour u_1, u_2,..., u_n les valeurs (5), on aura

$$(7) \qquad A v_r = \lambda_{r,1} w_1 + \lambda_{r,2} w_2 + \ldots + \lambda_{r,n} w_n,$$

où

$$\lambda_{s,r} = \alpha_{1,s} c_{1,r} + \alpha_{2,s} c_{2,r} + \ldots + \alpha_{n,s} c_{n,r}.$$

Si, au moyen de la substitution linéaire (7), on transforme l'équation (4), la comparaison de ce résultat avec la forme (6) donne les équations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{r} p_1 \lambda_{1,r}^2 + p_2 \lambda_{2,r}^2 + \ldots + p_n \lambda_{n,r}^2 = q_r A^2, \\ p_1 \lambda_{1,r} \lambda_{1,s} + p_2 \lambda_{2,r} \lambda_{2,s} + \ldots + p_n \lambda_{n,r} \lambda_{n,s} = 0. \end{array} \right.$$

De même, en posant

$$\mu_{r,s} = \gamma_{1,2} a_{1,s} + \gamma_{r,r} a_{2,s} + \ldots + \gamma_{n,r} a_{n,s},$$

on obtient les équations

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{r} q_1 \mu_{1,r}^2 + q_2 \mu_{2,r}^2 + \ldots + q_n \mu_{n,r}^2 = p_r C^2, \\ q_1 \mu_{1,r} \mu_{1,s} + q_2 \mu_{2,r} \mu_{2,s} + \ldots + q_n \mu_{n,r} \mu_{n,s} = 0. \end{array} \right.$$

2°. Soient α_1, α_2,..., α_r, r indéterminées; je désigne par L le déterminant

$$\left| \begin{array}{lllll} \alpha_1 & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \ldots & \lambda_{r-1,1} \\ \alpha_2 & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \ldots & \lambda_{r-1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \lambda_{1,r} & \lambda_{2,r} \ldots & \lambda_{r-1,r} \end{array} \right|$$

et par L_s l'expression

$$\lambda_{s,1} \frac{dL}{d\alpha_1} + \lambda_{s,2} \frac{dL}{d\alpha_2} + \ldots + \lambda_{s,r} \frac{dL}{d\alpha_r}.$$

Si, dans les équations (8), on fait

$$r = 1, \quad s = 2, 3, \ldots, r$$

on obtient r équations, lesquelles multipliées respectivement par

$$\frac{dL}{d\alpha_1}, \frac{dL}{d\alpha_2}, \ldots, \frac{dL}{d\alpha_r}$$

donnent

$$p_r \lambda_{r,1} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,1} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,1} L_n = q_1 \frac{dL}{d\alpha_1} A^2.$$

Des mêmes équations (8) on déduira d'une manière analogue les suivantes :

$$p_r \lambda_{r,2} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,2} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,2} L_n = q_2 \frac{dL}{d\alpha_2} A^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_r \lambda_{r,r} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,r} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,r} L_n = q_r \frac{dL}{d\alpha_r} A^2,$$

et en ajoutant ces équations multipliées respectivement par

$$\frac{dL}{d\alpha_1}, \frac{dL}{d\alpha_2}, \ldots, \frac{dL}{d\alpha_r},$$

on a

$$(10) \left\{ \begin{aligned} & p_r L_r^2 + p_{r+1} L_{r+1}^2 + \ldots + p_n L_n^2 \\ & = A^2 \left\{ q_1 \left(\frac{dL}{d\alpha_1}\right)^2 + q_2 \left(\frac{dL}{d\alpha_2}\right)^2 + \ldots + q_r \left(\frac{dL}{d\alpha_r}\right)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

En désignant par M le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \mu_{1,1} & \mu_{2,1} \ldots & \mu_{r-2,1} \\ \alpha_2 & \mu_{1,2} & \mu_{2,2} \ldots & \mu_{r-2,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \mu_{1,r-1} & \mu_{2,r-1} \ldots & \mu_{r-2,r-1} \end{vmatrix}$$

et par M_s l'expression

$$\mu_{s,1}\frac{dM}{d\alpha_1}+\mu_{s,2}\frac{dM}{d\alpha^2}+\ldots+\mu_{s,r-1}\frac{dM}{d\alpha_{r-1}},$$

on déduit d'une manière analogue des équations (9) l'équation

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &q_{r-1}M_{r-1}^2+q_rM_r^2+\ldots+q_nM_n^2\\ &=C^2\left\{p_1\left(\frac{dM}{d\alpha_1}\right)^2+p_2\left(\frac{dM}{d\alpha_2}\right)^2+\ldots+p_{r-1}\left(\frac{dM}{d\alpha_{r-1}}\right)^2\right\}.\end{aligned}\right.$$

3°. Supposons que les coefficients $a_{r,s}$, $c_{r,s}$ et les α soient des quantités réelles, la même propriété aura lieu pour L_s, M_s, $\frac{dL}{d\alpha_s}$, $\frac{dM}{d\alpha_s}$; par conséquent les signes des termes des équations (10), (11) ne dépendront que des signes des coefficients p_1, p_2,..., q_1, q_2,.... Je suppose p_1, p_2,..., p_{r-1} tous négatifs, et les autres coefficients p_r, p_{r+1},..., p_n tous positifs. L'équation (10) montre que les r coefficients q_1, q_2,..., q_r ne peuvent pas être tous négatifs; et parce que ces coefficients sont r quelconques entre les n coefficients q_1, q_2,..., q_n, on en déduit que de ces mêmes coefficients il ne peut en être de négatifs un nombre plus grand que $r-1$. Or l'équation (11) montre que les coefficients q_{r-1}, q_r,..., q_n ne doivent pas être tous positifs, puisque p_1, p_2,..., p_{r-1} sont négatifs; mais ces coefficients sont $n-r+2$ quelconques entre les n quantités q_1, q_2,..., q_n; donc le nombre des positifs entre ces coefficients ne doit pas être plus grand que $n-r+1$; ou bien le nombre des négatifs ne devra être plus petit que $r-1$. Ainsi le nombre des quantités négatives parmi q_1, q_2,..., q_n ne peut être ni supérieur ni inférieur à $r-1$, donc il est égal à $r-1$; c'est-à-dire égal au nombre des négatifs entre les n coefficients p_1, p_2,..., p_n. En conséquence on a le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Si l'on transforme une forme quadratique au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels, dans une autre qui contienne les seuls carrés des variables, le nombre des termes positifs et négatifs de la transformée sera constant, quelle que soit la substitution employée.*

Cette importante propriété des formes quadratiques a été énoncée par M. Sylvester sous la dénomination de *loi d'inertie* des formes quadratiques. La démonstration ci-dessus en fait voir toute la généralité (*).

4°. On sait, ou l'on peut démontrer facilement, que, posant

$$m_{r,s} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \ldots & A_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,r-1} & A_{2,r-1} \ldots & A_{r,r-1} \\ A_{1,s} & A_{2,s} & A_{r,s} \end{vmatrix}$$

et

$$m_{r,r} = \Delta_r, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = A_{1,1}, \quad \Delta_2 = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2 \ldots,$$

$$m_{r,s} = \frac{d.\Delta_r}{d.A_{r,s}},$$

on transforme la forme quadratique f dans celle-ci

$$f = \sum_r \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} v_r^2,$$

au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{aligned} m_{1,1}v_1 &= m_{1,1}u_1 + m_{1,2}u_2 + \ldots + m_{1,n}u_n, \\ m_{2,2}v_2 &= \qquad\quad m_{2,2}u_2 + \ldots + m_{2,n}u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{n,n}v_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad m_{n,n}u_n, \end{aligned}$$

et les u étant exprimés en fonction de v.

(*) Ainsi, en faisant disparaître les rectangles dans une équation d'une conique ou d'une surface du second degré, les nombres des termes positifs et négatifs restent constants, quelle que soit la transformation linéaire.

TM.

Supposons maintenant que les coefficients $A_{r,s}$ de la forme f soient réels; alors on déduira comme corollaire du théorème I que le nombre des termes positifs et négatifs dans une transformée quelconque de la forme f (laquelle contienne les seuls carrés des variables, et soit obtenue au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels) est égal au nombre des termes positifs et négatifs dans la série :

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ldots,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

c'est-à-dire au nombre des permanences et des variations de signe dans la série

(12) $$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ldots,\ \Delta_n;$$

or

$$\Delta_0 = 1.$$

Ainsi l'on a ce théorème :

THÉORÈME II. *Le nombre des permanences et des variations de signes dans la suite* (12) *est égal au nombre des termes positifs et négatifs dans une transformée quelconque de la forme* f *obtenue dans les conditions du théorème I.*

5°. Une autre transformation remarquable de la forme quadratique f est celle qu'on obtient au moyen d'une substitution orthogonale, c'est-à-dire d'une substitution linéaire

$$u_r = a_{r,1} v_1 + a_{r,2} v_2 + \ldots + a_{r,n} v_n,$$

où les coefficients doivent vérifier les équations

$$a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + \ldots + a_{r,n}^2 = 1,$$

$$a_{r,1} a_{s,1} + a_{r,2} a_{s,2} + \ldots + a_{r,n} a_{s,n} = 0.$$

De ces équations on déduit

$$A = 1, \quad a_{s,r} = \alpha_{s,r} \ (\textit{voir } \text{p. } 265);$$

mais les équations (3) nous donnent en général

$$A\, h_{s,r} = p_r\, \alpha_{s,r},$$

par conséquent, dans ce cas particulier, l'équation (2) donnera

$$A_{1,s}\, a_{1,r} + \ldots + (A_{s,s} - p_r) a_{s,r} + \ldots + A_{n,s} a_{n,r} = 0.$$

Les coefficients p_1, p_2, etc., de la transformée

$$f = \sum_r p_r \rho_r^2$$

seront donc, comme il est connu, les racines du $n^{ième}$ degré

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} - \theta & A_{2,1} \ldots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - \theta \ldots & A_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,n} & A_{2,n} \ldots & A_{n,n} - \theta \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\theta^n - A_1 \theta^{n-1} + A_2 \theta^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} A_{n-1} \theta + (-1)^n A_n = 0;$$

A_1, A_2, ..., A_n sont des fonctions de $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, etc.

Or les racines de ces équations sont toutes réelles (propriété démontrée par MM. Cauchy, Jacobi, Borchardt, Sylvester, etc.; en conséquence le nombre des coefficients positifs dans la transformée ci-dessus sera égal au nombre des permanences de signes dans la suite

$$(14) \qquad 1, \ A_1, \ A_2, \ldots, \ A_n,$$

et le nombre des coefficients négatifs sera égal au nombre des variations de signes dans la même suite.

Les deux séries (12), (14) donneront donc pour le

théorème I un même nombre de permanences et de variations de signes.

II.

Des équations algébriques à une seule inconnue.

1°. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines d'une équation

$$\varphi(x) = 0,$$

$\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$, n fonctions rationnelles entières de x; $\omega(x)$, $\theta(x)$ deux polynômes qui ont même signe pour toutes les racines réelles de l'équation et a un nombre entier impair positif ou négatif.

Je démontrerai en premier lieu que la forme quadratique en u

$$f = \sum_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)}$$
$$\left\{ u_1 \psi_1(x_m) + u_2 \psi_2(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m) \right\}^2,$$

ou en posant

$$\sum_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \psi_r(x_m) \psi_s(x_m) = \mathrm{A}_{r,s},$$

la forme quadratique

$$f = \sum_r \sum_s \mathrm{A}_{r,s} u_r u_s$$

est à coefficients réels. En effet, supposons que les racines x_1, x_2 soient imaginaires conjuguées. En posant

$$(x - x_1)^a \omega(x_1) \psi_r(x_1) \psi_s(x_1) = \alpha + i\beta,$$
$$\theta(x_1) = l + im,$$

on aura

$$(x - x_2)^a \omega(x_2) \psi_r(x_2) \psi_s(x_2) = \alpha - i\beta,$$
$$\theta(x_2) = l - im, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

et

$$A_{r,s} = \frac{2}{l^2 + m^2}(l\alpha + m\beta) + \sum_3^n {}_m (x - x_m)^e \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \psi_r(x_m)\psi_s(x_m);$$

par conséquent, les coefficients de la forme f seront réels pour toutes les valeurs des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et on pourra donc appliquer à cette forme le théorème II.

2°. Cela posé, j'observe que, en supposant les racines x_1, x_2 imaginaires conjuguées et en posant

$$(x - x_1)^e \omega(x_1) = \lambda + i\mu, \quad \theta(x_1) = l + im,$$

$$u_1\psi_1(x_1) + u_2\psi_2(x_1) + \ldots + u_n\psi_n(x_1) = P + iQ,$$

on aura

$$(x - x_2)^e \omega(x^2) = \lambda - i\mu, \quad \theta(x_2) = l - im,$$

$$u_1\psi_1(x_2) + u_2\psi_2(x_2) + \ldots + u_n\psi_n(x_2) = P - iQ,$$

P, Q étant les fonctions linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. En substituant ces valeurs dans f, on obtient

$$f = \frac{2}{\alpha(l^2 + m^2)} \left\{ (\alpha P + \beta Q)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) Q^2 \right\} + \sum_3^n {}_m (x - x_m)^e \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \left\{ u_1\psi_1(x_m) + \ldots + u_n\psi_n(x_m) \right\}^2,$$

où

$$l\lambda + m\mu = \alpha, \quad m\lambda - l\mu = \beta;$$

et en général supposant que $x_1, x_{r+1}; x_2, x_{r+2}; \ldots, x_r, x_{2r}$ soient r couples de racines imaginaires et que

$$x_{2r+1} \ldots x_n$$

soient réelles, on pourra mettre f sous la forme

$$f = 2\sum_{1}^{r} {}_s \frac{1}{\alpha_s (l_s^2 + m_s^2)} \left\{ (\alpha_s \mathrm{P}_s + \beta_s \mathrm{Q}_s)^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2)\mathrm{Q}_s^2 \right\}$$

$$+ \sum_{2r+1}^{n} {}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \left\{ u_1 \psi_1(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m) \right\}^2.$$

En transformant cette forme quadratique au moyen de la substitution linéaire à coefficients réels

$$v_s = \alpha_s \mathrm{P}_s + \beta_s \mathrm{Q}_s, \quad v_{2s} = \mathrm{Q}_s,$$

$$v_m = u_1 \psi_1(x_m) + u_2 \psi_2(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m),$$

$(s = 1, 2, \ldots, r, \; m = 2r + 1, \ldots, n)$; on obtient

$$(15) \quad \begin{cases} f = 2\sum_{1}^{r} {}_s \dfrac{1}{\alpha_s (l_s^2 + m_s^2)} \left\{ v_s^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) v_{2s}^2 \right) \\ + \sum_{2r+1}^{n} {}_m (x - x_m)^a \dfrac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} v_m^2, \end{cases}$$

et le nombre des termes positifs et négatifs dans cette transformée sera par les deux théorèmes de la première partie égal au nombre des permanences et des variations de signe dans la suite (12), et réciproquement. Cela aura lieu pour une valeur quelconque réelle de la variable x. Les Δ sont des fonctions de $\mathrm{A}_{r,s}$, et, par conséquent, maintenant des fonctions de x.

Or pour une valeur réelle déterminée h de x, le nombre des termes positifs de la transformée (15) est évidemment égal à r (nombre des couples des racines imaginai-

res) plus le nombre des racines réelles $x_{2r+1},\ldots, x_n$ qui ont des valeurs inférieures à h; et le nombre des termes négatifs dans la même transformée est évidemment égal à r, plus le nombre des racines réelles qui ont des valeurs plus grandes que h. De cette manière on est conduit au théorème suivant :

Théorème III. *Pour une valeur réelle* h *de* x, *le nombre des permanences de signes dans la suite*

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ldots,\ \Delta_n,$$

représente le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

augmenté du nombre des racines réelles moindres que h. *Le nombre des variations représente le nombre des couples de racines imaginaires, plus le nombre des racines réelles supérieures à* h.

Dans ce théorème sont compris deux théorèmes analogues de M. Sylvester et de M. Hermite.

Corollaire I. Si dans la suite (12) ci-dessus on pose successivement

$$x = h,\quad x = k,\quad (h > k),$$

la différence entre les nombres des variations correspondantes sera égale au nombre des racines réelles de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

comprises entre k et h.

Corollaire II. L'équation

$$\varphi(x) = 0$$

a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la série des coefficients des plus hautes puissances de la variable dans la suite supérieure. En se rappelant ce qu'on a démontré dans la première

partie, n° 5, on voit facilement que les propriétes établies dans le théorème précédent et dans ses corollaires ont lieu aussi pour la suite

$$1,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n,$$

qui est une suite de fonctions de x. (*Comptes rendus*, 25 juin 1855, *Sur le dénombrement des racines, etc.*, par M. Cauchy.)

On voit donc qu'il existe une infinité de fonctions possédant les propriétés de celles de M. Sturm et qu'il y a des moyens assez simples pour les obtenir.

3°. Nous croyons utile d'ajouter quelques applications.

a. Supposons

$$\psi_r(x) = x^{r-1}, \quad \theta(x) = \varphi'(x), \quad a = +1,$$

on a

$$A_{r,s} = \sum_m (x - x_m) \frac{\omega(x_m)}{\varphi'(x_m)} x_m^{r+s-2},$$

ou en posant

$$S_i = \sum_m \frac{x_m^i \omega(x_m)}{\varphi'(x_m)},$$

on obtient

$$A_{r,s} = S_{r+s-2} x - S_{r+s-1}$$

et

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 x - S_1 & S_1 x - S_2 \ldots & S_{r-1} x - S_r \\ S_1 x - S_2 & S_2 x - S_3 \ldots & S_r x - S_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r+1} x - S_r & S_r x - S_{r+1} \ldots & S_{2r-2} x - S_{2r-1} \end{vmatrix}$$

ou, par une transformation connue,

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_r \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r-1} & S_r \ldots & S_{2r-1} \\ 1 & x & x^r \end{vmatrix}$$

Ces fonctions Δ_r sont, à un facteur constant près, les dénominateurs des réduites qu'on obtient en développant en fraction continue la fraction $\frac{\omega(x)}{\varphi(x)}$, en supposant $\omega(x)$ de degré inférieur à n. J'ai démontré directement cette propriété dans une Note : *Intorno ad alcuni punti d'algebra superiore,* publiée dans les *Annales* de M. Tortolini, août 1854; ce que d'ailleurs on peut vérifier assez facilement *à posteriori.*

Si l'on suppose $a = -1$ et

$$I_i = \sum_m \frac{x_m^i\,\omega(x_m)}{(x - x_m)\,\varphi'(x_m)},$$

on a

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} I_0 & I_1 \ldots & I_{r-1} \\ I_1 & I_2 \ldots & I_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{r-1} & I_r \ldots & I_{2r-2} \end{vmatrix}$$

et ces fonctions Δ_r sont, à un facteur constant près, les rapports entre les résidus obtenus en divisant $\varphi(x)$ par $\omega(x)$ (en changeant les signes selon la méthode de M. Sturm) et la fonction $\varphi(x)$. J'ai démontré cela dans la Note citée tout à l'heure, et j'ai fait voir de quelle manière on peut former ces dénominateurs et ces résidus en fonction des coefficients des polynômes $\varphi(x)$, $\omega(x)$.

Il faut observer que le théorème III est applicable aux deux suites des dénominateurs des réduites et des résidus, en supposant $\omega(x)$, $\varphi'(x)$ du même signe pour des valeurs réelles de la variable, propriété établie par M. Sturm (*Mémoires présentés,* tome VI, 1835, § 26).

Si l'on suppose

$$\omega(x) = \varphi'(x),$$

on obtient les résultats de MM. Sylvester, Cayley, Bor-

chardt (*Nouvelles Annales*, 1854, tome XIII, page 71). Dans ce cas on a

$$\Delta_n = \varphi(x).$$

b. On peut aussi obtenir tout de suite les expressions Δ_r par une disposition convenable des fonctions $\psi_r(x)$. Je me bornerai au cas de

$$\omega(x) = \theta(x) \quad \text{et} \quad a = 1.$$

En posant

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

et

$$\psi_r(x) = a_0 x^{r-1} + a_1 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1},$$

$$A_{r,s} = B_{r,s} x - C_{r,s},$$

au moyen des relations connues entre les sommes des puissances des racines et les coefficients d'une équation, on obtient facilement

$$B_{r,s} = (n - s + 1) a_{r-1} a_{s-1}$$
$$- \left\{ \begin{array}{l} (s - r + 2) a_s a_{r-2} + (s - r + 4) a_{s+1} a_{r-3} + \ldots \\ + (s + r - 4) a_{s+r-3} a_1 + (s + r - 2) a_{s+r-2} a_0 \end{array} \right\}$$
$$- C_{r,s} = (s - r + 1) a_{r-1} a_s + (s - r + 3) b_{r-2} a_{s+1} + \ldots$$
$$+ (s + r - 1) a_0 a_{s+r-1},$$

et l'on aura

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} B_{1,1} x - C_{1,1} & B_{2,1} x - C_{2,1} \ldots & B_{r,1} x - C_{r,1} \\ B_{1,2} x - C_{1,2} & B_{2,2} x - C_{2,2} \ldots & B_{r,2} x - C_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{r,r} x - C_{1,r} & B_{2,r} x - C_{2,r} \ldots & B_{r,r} x - C_{r,r} \end{vmatrix}$$

c. En supposant

$$\theta(x) = 1,$$

par conséquent $\omega(x)$ une fonction dont la valeur est po-

sitive pour toute valeur réelle de la variable

$$a = 1, \quad \psi_r(x) = x^{r-1}$$

et

$$S_i = \sum_m x_m^i \, \omega(x_m),$$

on a

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_r \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r-1} & S_r \ldots & S_{2r-1} \\ 1 & x \ldots & x^r \end{vmatrix}$$

résultat obtenu récemment par M. Joachimsthal (*Uber den Sturm'schen Satz*, *Journal* de Crelle, tome XLVIII, page 402).

III.

Des équations algébriques à deux inconnues.

1°. Soient

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \lambda(x, y) = 0$$

deux équations algébriques des degrés u, ν, et x_1, y_1, x_2, y_2,..., x_n, y_n les $n = u\nu$ systèmes de racines simultanées des mêmes équations. En indiquant par $\omega(x, y)$, $\theta(x, y)$ deux polynômes qui ont la propriété d'être de même signe pour toutes les valeurs réelles des variables; par $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$,..., $\psi_n(x, y)$, n fonctions rationnelles entières; et par a, c deux nombres impairs positifs ou négatifs; la forme quadratique

$$f = \sum_r \sum_s A_{r,s} \, u_r \, u_s,$$

dans laquelle

$$A_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_m (x - x_m)^b (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)} \times \psi_r(x_m, y_m)\,\psi_s(x_m, y_m),$$

est à coefficients réels ; ce qu'on démontre comme ci-dessus.

En opérant comme dans la IIᵉ partie, on trouvera que, en supposant que x_1, y_1, x_{r+1}, y_{r+1}, x_2, y_2, x_{r+2}, $y_{r+2}, \ldots$, x_r, y_r, x_{2r}, y_{2r} soient r couples de solutions simultanées imaginaires et que les autres solutions soient réelles, on peut mettre f sous la forme

$$f = 2\sum_{1}^{r}{}_s \frac{1}{\alpha_s(l_s^2 + m_s^2)} \left\{ (\alpha_s P_s + \beta_s Q_s)^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) Q_s^2 \right\}$$

$$+ \sum_{2r+1}^{n}{}_m (x - x_m)^b (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)} \times \left\{ u_1\psi_1(x_m, y_m) + \ldots + u_n\psi_n(x_m, y_m) \right\}^2,$$

P_s, Q_s étant les fonctions linéaires de u_1, u_2, etc., à coefficients réels. On pourra donc au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels transformer cette forme f dans la suivante :

$$(16)\quad \begin{cases} f = 2\displaystyle\sum_{1}^{r}{}_s \frac{1}{\alpha_s(l_s^2 + m_s^2)} \left\{ v_s^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) v_{2s}^2 \right\} \\ \quad + \displaystyle\sum_{2r+1}^{n}{}_m (x - x_m)^b (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)} v_m^2. \end{cases}$$

Or pour un système déterminé de valeurs réelles h, k de x et de y le nombre des termes positifs dans cette transformée est égal à r (nombre de couples des solutions simultanées imaginaires), plus le nombre des solutions simultanées réelles x_{2r+1}, $y_{2r+1}, \ldots$, x_n, y_n, pour lesquelles le produit $(h - x_m)(k - y_m)$ est positif; et le nombre des termes négatifs est égal à r augmenté du nombre des solutions simultanées réelles pour lesquelles $(h - x_m)(k - y_m)$ est négatif. Par conséquent, on a le théorème :

Théorème IV. *Pour un système de valeurs réelles* h *et* k *de* x *et de* y *le nombre des permanences de signes dans la suite*

$$1, \ \Delta_1, \ \Delta_2, \ldots, \ \Delta_n$$

représente le nombre des couples de solutions simultanées imaginaires des équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \lambda(x, y) = 0$$

augmenté du nombre des solutions réelles lesquelles sont à la fois plus grandes ou moindres que h, k, *et le nombre des variations de signes représente le nombre des couples de solutions simultanées imaginaires, plus le nombre des solutions réelles lesquelles ont la propriété d'être l'une plus grande, l'autre plus petite, ou réciproquement, que* h, k.

Il faut toujours se rappeler que les Δ sont des fonctions de $A_{r,s}$ fonction de x, y.

Corollaire. Si dans la suite supérieure on pose

$$x = h, \quad y = k,$$

$$x = h_1, \quad y = k_1,$$

$$(h_1 > h, \quad k_1 > k),$$

et si l'on indique par (h, k) le nombre des permanences

que présente la suite, même dans la première hypothèse, on aura le nombre

$$p = \frac{1}{2}\left\{(h, k) + (h_1, k_1) - (h, k_1) - (h_1, k)\right\}$$

égal au nombre des solutions simultanées réelles des équations données, qui sont à la fois plus grandes que h, k et moindres que h_1, k_1. En effet, en posant dans la transformée (16) h, k au lieu de x, y, on a

$$(h, k) = r + n - 2r;$$

analoguement

$$(h_1, k_1) = n - r, \quad (h, k_1) = r, \quad (h_1, k) = r$$

et, par conséquent,

$$p = n - 2r,$$

nombre des solutions simultanées supposées réelles.

On a donc aussi dans le cas des deux équations algébriques une infinité de fonctions qui ont la propriété de celles de M. Sturm. Admirable découverte due à M. Hermite (*).

2°. *Applications*. En supposant

$$\alpha = 1, \quad c = 1,$$
$$\theta(x, y) = \varphi'(x)\lambda'(y) - \varphi'(y)\lambda'(x),$$
$$\psi_r(x, y) = x^{n-r+1} y^{r-1},$$

et

$$S_{i,j} = \sum_m \frac{x_m^{j-i} y_m^{i}\, \omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)},$$

(*) *Comptes rendus*, t. XXXV, p. 52, 1852; t. XXXVI, p. 294, 1853. M. Hermite a publié récemment des théorèmes de *déterminants* sous forme d'appendice à un opuscule intitulé, je crois, *Questionnaire*, rédigé par MM. Gerono et Roguet. Puisse cette voie procurer une entrée dans l'enseignement à cette théorie désormais indispensable. Tm.

on a

$$A_{r,s} = xy S_{\beta-2,2\alpha} - y S_{\beta-2,2\alpha+1} - x S_{\beta-1,2\alpha+1} + S_{\beta-1,2\alpha+2},$$

étant $\beta = r + s$. Les expressions $S_{i,j}$ pourront être déterminées en fonction des coefficients des équations données par la méthode indiquée par M. Jacobi dans son Mémoire *Theoremata nova algebraica*, *etc.* (*Journal* de Crelle, tome XIV).

Si l'on suppose

$$\omega(x, y) = \theta(x, y),$$

on a

$$S_{i,j} = \sum_m x_m^{j-i} y_m^i,$$

et ces expressions pourront être calculées par la méthode de Poisson (Serret, *Algèbre supérieure*, p. 103).

Enfin si l'on fait

$$\alpha = r + 1$$

et

$$S_i = y_1^i + y_2^i + \ldots + y_n^i,$$

$$T_i = x_1 y_1^i + x_2 y_2^i + \ldots + x_n y_n^i,$$

on a

$$A_{r,s} = y(xS_{\beta-2} - T_{\beta-2}) - (xS_{\beta-1} - T_{\beta-1}),$$

et en conséquence

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} xS_0 - T_0 & xS_1 - T_1 \ldots & xS_1 - T_r \\ xS_1 - T_1 & xS_2 - T_2 \ldots & xS_{r+1} - T_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ xS_{r-1} - T_{r-1} & xS_r - T_r \ldots & xS_{2r-1} - T_{2r-1} \\ 1 & y \ldots & y^r \end{vmatrix}$$

Ces dernières fonctions ont déjà été considérées par M. Hermite dans un cas particulier.

Il est évident qu'avec la méthode qu'on a suivie dans ce paragraphe pour établir le théorème IV et son corollaire, on pourra trouver des théorèmes et des corollaires analogues en considérant trois équations à trois inconnues, etc. (*).

IV.

Application des propriétés exposées dans le § Ier.

Soit

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} A_{1,1} - x & A_{2,1} \ldots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - x \ldots & A_{n,2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{1,n} & A_{2,n} \ldots & A_{n,n} - x \end{vmatrix} = 0.$$

Il est connu que, en supposant $A_{r,s} = A_{s,r}$ cette équation a toutes ces racines réelles, et M. Hermite a fait observer récemment que cette propriété a lieu aussi lorsque les quantités $A_{r,s}$ sont imaginaires, $A_{r,s}$ et $A_{s,r}$ étant conjugués et $A_{r,r}$ réels. En posant

$$x = h, \quad x = k$$

dans la suite

$$\varphi(x), \ \varphi'(x), \ \varphi''(x), \ldots, \ \varphi^{(n)}(x)$$

la différence entre les nombres des variations correspondantes sera donc le nombre des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h et k. Or, en posant dans le déterminant (13) (§ Ier, n° 5) $A_{r,r} - x$ au lieu de $A_{r,r}$, on voit facile-

(*) Ce beau travail fait entrevoir que le théorème de Sturm peut s'étendre à un système quelconque d'équations algébriques et se rattache immédiatement à la théorie des déterminants; théorie à peu près inconnue. Tm

ment que, à un facteur près, on a

$$\varphi^n(x) = 1, \quad \varphi^{(n-1)}(x) = -A_1, \ldots,$$
$$\varphi'(x) = (-1)^{n-1} A_{n-1}, \quad \varphi(x) = (-1)^n A_n$$

et la différence entre les nombres des permanences de signes de la suite

$$1, \ A_1, \ A_2, \ldots, \ A_n$$

correspondantes à $x = h$, $x = k$ sera le nombre des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h et k. Et parce que en posant

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} A_{1,1} - x & A_{2,1} \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - x \ldots & A_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r,1} & A_{2,r} & A_{r,r} - x \end{vmatrix}$$

la série

$$1, \ \Delta_1, \ \Delta_2, \ldots \ \Delta_n$$

donnera un même nombre de permanences que la série ci-dessus, on a le théorème :

Théorème V. *La différence entre le nombre des permanences de signes dans cette dernière série correspondantes à* $x = h$, $x = k$ *donne le nombre des racines de l'équation*

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h *et* k (*Comptes rendus*, 6 août 1855, *Remarque sur un théorème de M. Cauchy*, par M. Hermite).

On voit que cette dernière série est beaucoup plus simple que la série supérieure donnée par le théorème de Budan-Fourier.

Les Mémoires de MM. Hermite et Sylvester qu'on a trouvés plusieurs fois cités dans ce travail sont les suivants : *Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées* (*Comptes rendus*, 1852, 2e semestre, p. 52). — *Remarque sur le théorème de M. Sturm* (*Comptes rendus*, 1853, 1er semestre, p. 294). — *On a theory of the syzigetic relations of two rational integral functions, etc.* (*Philosophical Transactions*, 1853, part. III). C'est par ces travaux que ces deux illustres géomètres ont établi sur sa vraie base cette importante partie de l'Algèbre supérieure.

SPÉCIMEN DES CINQ EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1855).

M. SERRET,
Examinateur du premier degré.

Convergence des séries à termes alternativement positifs et négatifs.— Variation d'une fonction entière de x lorsque x passe de $-\infty$ à $+\infty$. Exemple :

$$x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

— Coefficients angulaires des deux tangentes que l'on peut mener à l'hyperbole par un point extérieur. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole. — Equation d'un cône de révolution dont le sommet est à l'origine.

M. HERMITE,
Examinateur du premier degré.

Division algébrique. — Faire voir qu'on ne peut

mettre une fonction F (x) que d'une seule manière sous la forme $\varphi(x) \times Q + R$, R étant de degré inférieur à $\varphi(x)$. — Sin $(a + b)$; peut-on, par le moyen des dérivées, tirer de la formule

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

la formule

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\,?$$

— Directrice dans les courbes du second degré. — Peut-on mettre l'équation à trois variables sous la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (mx + ny + pz + q)^2?$$

— Equilibre du treuil.

M. WERTHEIM,
Examinateur du second degré.

Une équation du degré m ne peut avoir que m racines. — Interpolation : formule de Newton. — Parallélogramme des forces. — Centre de gravité du tétraèdre. — Electrophore. — Compressibilité des liquides. — Combinaisons de l'azote et de l'oxygène.

M. LEFÉBURE,
Examinateur du second degré.

Décomposer un polynôme en facteurs du premier degré. — Exemple :

$$x^3 + x^2 + x + 1.$$

— Discussion des différents genres de courbes compris dans l'équation

$$(y - ax - b)^4 = px^4 + qx + r.$$

— Volume engendré par un polygone circonscrit à un cercle tournant autour d'un diamètre. — Volume du cône

tronqué. — Intersection des surfaces. — Principes généraux. — Cas d'une surface de révolution dont l'axe est quelconque et d'un plan. — Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. — La rendre calculable par logarithmes.

M. DIDION,
Examinateur du second degré, Président du jury d'examen.

Deux angles qui ont les côtés parallèles et de même sens sont égaux et leurs plans sont parallèles. — Mesure de l'angle de deux plans. — Par une droite donnée mener un plan qui fasse avec une autre droite déterminée un angle donné. — Equilibre de la poulie. — Travail absorbé par le frottement. — Comparateur. — Oxyde de carbone.

Courbes.

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\omega}, \quad \rho = \frac{1}{\sin\omega + \cos\omega},$$

$$y = \frac{x^2+1}{x+1}, \quad x^2y - xy - 1 = 0, \quad y^4 = x^4 - 4x,$$

$$y^2 + x^2 - x - y - 1 = 0, \quad y^2 = x^4 - x^2 - x - \frac{1}{4}, \quad y = x^{\frac{1}{x}}.$$

Surfaces.

$$xy - 3xz = 2, \quad xy - x^2 - z^2 = a, \quad z^2 - 2xy - 2x = 1.$$

Équation transcendante.

$$2,5 \sin x + 3,7 \cos x = 4,1.$$

Note. Cette équation se ramène à la forme

$$\sin(x + a) = b \cos a.$$

LIMAÇON DE PASCAL;

PAR M. MANNHEIM,
Officier d'Artillerie.

Extrait d'une Lettre.

Une partie de la question longuement traitée par M. Painvin dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales* est généralement connue sous cet énoncé :

Le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés sont tangents à deux circonférences données se compose de plusieurs limaçons de Pascal.

Pendant le mouvement de l'angle constant, *un point quelconque décrit sur le plan des deux cercles un limaçon de Pascal; une droite quelconque enveloppe une circonférence.*

Un point quelconque du plan fixe des deux cercles trace sur le plan mobile une ellipse.

Les démonstrations géométriques de ces propriétés sont excessivement simples.

On peut encore ajouter les propriétés suivantes, également très-simples.

Si l'on considère une position quelconque de l'angle mobile, la circonférence qui passe par le sommet de cet angle et par les points de contact de ses côtés et de circonférences données contient les pôles des limaçons de Pascal du lieu précédemment énoncé. Le lieu des centres de ces circonférences se compose de deux circonférences.

QUESTIONS.

335. Etant donnés deux cercles dans un même plan, alors dans le triangle formé par les deux tangentes intérieures et une tangente extérieure, le rectangle des deux côtés qui sont tangentes intérieures est équivalent à la somme du rectangle des deux tangentes intérieures arrêtées au point de contact, et du rectangle des deux rayons.

(A. BURLET, de Dublin.)

336. Un triangle rectangle est équivalent au rectangle des deux segments faits sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.

(A. BURLET, de Dublin.)

337. Soit ABCD un quadrilatère quelconque; si, par le point de concours (T) des perpendiculaires élevées de deux sommets consécutifs (A, B) sur les côtés opposés (AD, BC) qui y aboutissent, on mène une perpendiculaire (TE) à la droite (RS) qui joint les milieux des diagonales, cette perpendiculaire divisera le côté (AB) en deux segments (AE, BE) inversement proportionnels aux projections (AH, BK) des côtés AD et BC sur AB.

En sorte qu'on aura

$$\frac{AE}{BE} = \frac{BK}{AH}.$$

(JULES VIEILLE.)

338. Prolongez la base BC d'un triangle isocèle ABC, d'une longueur CD égale à BC; joignez D au milieu E de AB; la droite DE rencontre AC en F et l'on a

$$CF = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} AB;$$

portez CF sur AB de A en G; menez DG qui rencontre

AC en H milieu de AC; soit I le point d'intersection des diagonales GF, EH du quadrilatère GHEF; menez DI qui rencontre AB en K, on aura

$$AB = 15\,GK = 10\,EK.$$

339. Toutes les circonférences ayant leurs centres sur une même droite et coupant à angle droit une circonférence donnée ont même axe radical; et toutes ces circonférences prises deux à deux, et la circonférence donnée, ont même centre radical. (MANNHEIM.)

340. Soient donnés un angle trièdre de sommet S et un point fixe O par lequel on mène un plan coupant les faces de l'angle suivant le triangle ABC; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles; V_1, V_2, V_3 étant les volumes de trois pyramides ayant pour bases ces parallélogrammes et S pour sommet commun, la somme $\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}$ est constante, de quelque manière qu'on mène le plan coupant par le poit fixe O. (MANNHEIM.)

SUR UNE TRANSFORMATION DE LA FORMULE DE THOMAS SIMPSON

(voir t. XIII, p. 323).

Soient $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{2n+3}$ des points en nombre impair pris sur une courbe plane ne présentant dans cet intervalle aucun point singulier. Menons les ordonnées rectangulaires M_1A_1, M_2A_2, $M_3A_3, \ldots, M_{2n+3}A_{2n+3}$. Supposons que ces ordonnées soient équidistantes.

Notations.

$$M_1A_1 = e, \quad M_2A_2 = y_1,$$

$$M_3A_3 = y_2, \ldots, \quad M_{2n+2}A_{2n+2} = y_{2n+1}, \quad M_{2n+3}A_{2n+3} = E,$$

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 \ldots = A_{2n+2}A_{2n+3} = h.$$

$\sum y_p$ = somme de tous les y qui ont un indice pair;

$\sum y_i$ = somme de tous les y qui ont un indice impair;

P' = aire du polygone formé par les cordes $M_1 M_2$, $M_2 M_3, \ldots, M_{2n+2} M_{2n+3}$, par les ordonnées extrêmes e, E et par la partie $A_1 A_{2n+3}$ de l'axe intercepté entre ces ordonnées;

P = aire du polygone formé par les cordes $M_1 M_3$, $M_3 M_5$, $M_5 M_7, \ldots, M_{2n+1} M_{2n+3}$, par les ordonnées extrêmes e, E et par la partie de l'axe $A_1 A_{2n+3}$ interceptée entre ces ordonnées;

S = aire du quadrilatère mixte formé par l'aire curviligne $M_1 M_2 \ldots M_{2n+1}$, les ordonnées extrêmes e, E et l'axe $A_1 A_{2n+3}$.

On a évidemment

$$P' = \frac{h}{2}\left(e + E + 2\sum y_p + \sum y_i\right),$$

$$P = h\left(e + E + 2\sum y_p\right),$$

d'où

$$\frac{P' - P}{3} = \frac{h}{6}\left(2\sum y_i - 2\sum y_p - e - E\right),$$

$$P' + \frac{P' - P}{3} = \frac{h}{3}\left(e + 4\sum y_i + 2\sum y_p + E\right).$$

Par la formule de Simpson, on a

$$S = \frac{h}{3}\left(e + 4\sum y_i + 2\sum y_p + E\right) \text{ (*)},$$

donc

$$S = P' + \frac{P' - P}{3}.$$

(*) *Voir* t. XIII, p. 325.

tte formule a été donnée par M. Saigey (*Géométrie ntaire*, p. 245). M. Piobert l'a indiquée explicite- (t. XIII, p. 327, § 3), mais ne s'y est pas arrêté, que cette formule présente les mêmes inconvénients elle de Simpson, donnant absolument les mêmes ré- s, et il indique des formules qui font disparaître rtie ces inconvénients.

sait d'ailleurs que les formules qui servent à cal- l'aire d'un cercle servent également pour le calcul rimètre.

raisonnements qu'emploie M. Saigey pour parvenir formule sont très-élémentaires, mieux appropriés ètre à l'enseignement que ceux de Simpson.

OTE SUR LA SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES;

PAR E. CATALAN.

F (n) une fonction entière de n égale au produit *lques-uns* des p facteurs $n, n+1, n+2, n+3, \ldots,$ $p-1)$. Soit $f(n)$ une autre fonction entière de n, ère par rapport à F (n), et dont le degré soit de unités au moins inférieur au degré de F (n) (*). emarque fort simple, et qui à raison même de sa icité n'avait peut-être pas été faite, permet de som- rès-aisément la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{f(n)}{F(n)}.$$

le faire voir, prenons un cas particulier, et, par ple,

$$u_n = \frac{n^2 - 3n + 7}{n(n+1)(n+3)(n+4)}.$$

(*) ans cette dernière condition la série ne serait pas convergente.

Au lieu de décomposer, par la méthode connue, u_n en fractions ayant pour dénominateur les facteurs n, $n+1$, $n+3$, $n+4$, posons

$$\frac{n^2-3n+7}{n(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} + \frac{C}{(n+2)(n+3)} + \frac{D}{(n+3)(n+4)},$$

A, B, C, D étant des constantes.

Pour les déterminer, chassons les dénominateurs et faisons, successivement,

$$n=0,\quad n=-1,\quad n=-2,\quad n=-3.$$

Nous trouverons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 14 &= 24A,\\ 11 &= 6A-6B,\\ 0 &= -4B+4C,\\ -25 &= 6C-6D; \end{aligned}\right.$$

puis

$$(3)\qquad A=\frac{7}{12},\quad B=-\frac{5}{4},\quad C=-\frac{5}{4},\quad D=\frac{35}{12}\ (*).$$

Soit actuellement

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n;$$

c'est-à-dire

$$S_n = A\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B\sum_1^n \frac{1}{(n+1)(n+2)} + C\sum_1^n \frac{1}{(n+2)(n+3)} + D\sum_1^n \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

(*) Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, on voit bien, d'après la manière dont les inconnues A, B, C, D s'enchaînent dans les équations (1), que, *dans tous les cas, la décomposition essayée sera possible, et possible d'une seule manière.*

$$\left\{\begin{aligned} S_n = A\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B\sum_2^n \frac{1}{n(n+1)} \\ + C\sum_3^n \frac{1}{n(n+1)} + D\sum_4^n \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}\right.$$

is (et c'est là la remarque à laquelle nous faisions
on en commençant)

$$\frac{1}{(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$A\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right) + C\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$D\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$= A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D - (A+B+C+D)\frac{1}{n+1}.$$

suite,

$$\lim S_n = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D.$$

plaçant les coefficients par leurs valeurs, on trouve

$$S_n = \frac{13}{48} - \frac{1}{n+1},$$

$$\lim S_n = \frac{13}{48}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 316

(voir page 52);

PAR M. LÉON DURAND,
Élève au petit séminaire d'Iseure.

Toute progression arithmétique où la raison et le premier terme sont premiers entre eux, renferme un nombre infini de termes premiers à un nombre donné quelconque.

(JACOBI.)

Démonstration.

$$k = a + xr$$

est un terme de cette progression dont le premier terme est a et la raison r.

Soit α le produit des facteurs communs à a et au nombre donné p;

Soit p' le produit des facteurs premiers de p qui ne divisent point a.

Si 6 représente un nombre premier avec α et plus petit que lui, $(n\alpha + 6)$ sera premier avec α.

Si donc on fait

$$x = (n\alpha + 6)p',$$

alors

$$k = a + (n\alpha + 6)p'r,$$

et k sera premier avec p; car un facteur premier ϖ commun à p et à k, ou bien divisant α, diviserait a, mais non $(n\alpha + 6)p'r$, ou bien, divisant p', diviserait $(n\alpha + 6)p'r$, mais non a.

Or n est un nombre quelconque, j'en conclus pour k une infinité de valeurs.

te. M. Dirichlet a démontré que toute progression
nétique dont le premier terme et la raison sont pre-
entre eux renferme une infinité de nombres pre-
. Si l'on admet que toute progression arithmétique
le premier terme et la raison sont premiers entre
enferme au moins un nombre premier, le théorème
Dirichlet découle immédiatement du théorème de
i. Il suffit de prendre pour p le produit de tous les
res premiers renfermés dans la progression $a + xr$
considérer la progression

$$(\alpha + 6 p' r) + n(\alpha p' r);$$

nclurait que les termes de cette dernière progression
aucun diviseur premier de la forme $a + xr$, et qu'en
quence cette progression ne renferme aucun nombre
er, contrairement au principe admis. Il n'existe
aucun nombre p qui soit le produit de tous les
res premiers renfermés dans la formule $a + xr$; ces
res premiers sont donc en nombre illimité.

(Pepin S. J.)

SOLUTION DE LA QUESTION 320

(voir p. 53);

Par M. George BERTRAND,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet).

t

$$y = f(x),$$

nt le prix total et x la profondeur du puits; augmen-
le Δx cette profondeur, le prix augmentera de Δy.
volume enlevé est proportionnel à Δx, puisque la
ur du puits reste constante.

Donc

$$\Delta y = \Delta x . x . a,$$

x étant la profondeur du puits à ce moment et a le prix payé pour enlever un volume de déblais ayant pour base la section du puits et pour hauteur l'unité.

Cette égalité sera vraie à la limite et l'on aura

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = ax,$$

d'où

$$y = \frac{ax^2}{2} + C;$$

pour $x = 0$, $y = 0$, donc

$$C = 0.$$

Pour creuser un puits de 60 mètres, le prix est 100 francs, donc

$$100 = a \frac{60^2}{2},$$

ou

$$a = \frac{1}{18};$$

le puisatier s'arrêtant au bout de 30 mètres, on a

$$y = \frac{1}{18} \cdot \frac{30^2}{2} = 25.$$

Donc le puisatier devra recevoir 25 francs.

OLUTION DE LA QUESTION 326 (PROUHET)

(voir page 329) ;

PAR M. HIPPOLYTE PLESSIX,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet),

ET M. A. ROUSSIN,
Élève du lycée Bonaparte (classe de M. Bouquet).

racines d'une équation du troisième degré sont
pq, les racines de la dérivée sont rationnelles.
et, une équation du troisième degré admettant
es p^2, q^2, $2pq$ sera de la forme

$$(p+q)^2 x^2 + (p^2 q^2 + 2p^3 q + 2pq^3)x + K = 0.$$

'équation dérivée sera

$$- 2(p+q)^2 x + (p^2 q^2 + 2p^3 q + 2pq^3) = 0,$$

ines de cette équation seront

$$\frac{p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^4 - 3p^2 q^2 - 6p^3 q - 6pq^3}}{3}.$$

prouver que ces racines sont rationnelles, il n'y
ouver que la quantité sous le radical est un carré
Or cette quantité égale

$$p^4 - 2p^3 q + 3p^2 q^2 - 2pq^3 + q^4,$$

e qui est le carré de $(p^2 - pq + q^2)$.
es racines de l'équation (2) sont rationnelles.
lu Rédacteur. M. l'abbé Sauze, S. J., professeur
e Sainte-Marie à Toulouse, donne la même so-

SOLUTION DE LA QUESTION 328

(voir p. 230);

PAR M. JOZON,
Elève de Logique (Sciences), lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Lecaplain),

ET M. E. GILLOTIN,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet) (*).

Connaissant la somme de deux nombres et le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, trouver ces nombres.

Si x et y sont les deux nombres inconnus, m leur somme et p^5 le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, il suffit, pour résoudre la question, de trouver les solutions des deux équations

$$(1) \qquad x + y = m,$$

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = p^5.$$

Pour cela, de l'équation (1) je tire

$$x^2 + y^2 = m^2 - 2xy,$$

$$x^3 + y^3 = m^3 - 3xy(x + y) = m^3 - 3mxy.$$

Remplaçant dans l'équation (2) $x^2 + y^2$ et $x^3 + y^3$ par leurs valeurs, on obtient l'équation

$$p^5 = m^5 + 6m x^2 y^2 - 5m^3 xy.$$

Si l'on prend xy pour inconnue, l'équation se trouve ramenée au second degré, et on tire pour xy la valeur

$$(3) \qquad xy = \frac{5m^3 \pm \sqrt{m^6 + 24mp^5}}{12m}.$$

(*) M. Perret, professeur de physique au lycée de Périgueux, ramène la solution à la sommation des racines d'une équation du deuxième degré.

ıais ainsi la somme et le produit des nombres x
es deux nombres sont donc les racines de l'équa-

$$z^2 - mz + \frac{5m^3 \pm \sqrt{m^6 + 24mp^5}}{12m} = 0,$$

$$= \frac{3m^2 \pm \sqrt{-6m^4 - m^4 \mp 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5}}}{6m}.$$

ntités m et p étant positives, pour que les valeurs
issent être réelles, il faut prendre le second ra-
ec le signe $+$. Si alors je suppose que x soit le
nd des deux nombres proposés, j'aurai

$$x = \frac{3m^2 + \sqrt{-6m^4 + (\sqrt{m^6 + 24mp^5})\,3m}}{6m}$$

$$y = \frac{3m^2 - \sqrt{-6m^4 + (\sqrt{m^6 + 24mp^5})\,3m}}{6m}.$$

Discussion des valeurs de x *et de* y (*).

que les valeurs trouvées pour x et y convien-
l faut et il suffit qu'elles soient réelles et posi-

qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que l'on

$$3m\sqrt{m^6 + 24mp^5} > 6m^4,$$

$$9m^8 + 216m^3p^5 > 36m^8,$$

n

$$8p^5 > m^5.$$

---

te discussion est de M. Jozon



Je suppose maintenant que m^5 soit toujours plus petit que $8p^5$. Dans ce cas, la valeur de x est réelle et positive, celle de y est réelle. Pour qu'elle soit positive, il faut et il suffit que l'on ait

$$3m^2 > \sqrt{-6m^4 + 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5}},$$

ou

$$15m^4 > 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5},$$

ou enfin

$$m^5 > p^5.$$

Ainsi donc, les valeurs trouvées pour x et y conviendront toujours, quand on aura à la fois

$$8p^5 > m^5 \quad \text{et} \quad p^5 < m^5,$$

et ne conviendront jamais quand l'une de ces conditions ne sera pas remplie.

Si l'on suppose p constant, la plus grande valeur qu'on puisse donner à m^5 est donc

$$m^5 = 8p^5$$

et alors la quantité sous le radical s'annulant, $x = y = \frac{m}{2}$, et la plus petite valeur qu'on puisse donner à m^5 est

$$m^5 = p^5$$

et, dans ce cas, $x = m$ et $y = 0$.

SOLUTION DE LA QUESTION 329

(voir page 230);

PAR M. A. FINOT,
Élève du collége Rollin (classe de M. Suchet).

une progression géométrique de quatre termes, ne la somme des antécédents et la somme des con- s, trouver ces termes sans opérer d'élimination.
nt a, b, c, d les termes, on a

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d};$$

$$a+b+c=m,\quad b+c+d=n,$$

sont des nombres donnés.
D'après les théorèmes connus sur les rapports nous avons

$$\frac{abc}{bcd}=\frac{a}{d}=\frac{m^3}{n^3}$$

$$\frac{a-d}{d}=\frac{m^3-n^3}{n^3};$$

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n},$$

outant les termes de $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$,

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{m}{n},$$

d'où

$$\frac{a+c-b-d}{b+d}=\frac{m-n}{n};$$

d'ailleurs

$$\frac{m-n}{n}=\frac{b-c}{c},$$

nous pouvons donc ajouter au rapport précédent les termes $b-c$ et c, ce qui donnera

$$(2)\qquad \frac{a-d+c-b-c+b}{b+c+d}=\frac{a-d}{n}=\frac{m-n}{n}.$$

Divisons (1) par (2), il viendra

$$\frac{n}{d}=\frac{n(m^3-n^3)}{n^3(m-n)}=\frac{m^2+mn+n^2}{n^2},$$

d'où finalement

$$d=\frac{n^3}{m^2+mn+n^2}$$

et

$$c=\frac{mn^2}{m^2+mn+n^2},$$

$$b=\frac{m^2n}{m^2+mn+n^2},$$

$$a=\frac{m^3}{m^2+mn+n^2},$$

car, la raison

$$q=\frac{m}{n}.$$

Note du Rédacteur. M. l'abbé Sauze et M. Jean Molard, étudiant, prennent x pour premier terme, et l'on a

$$m+n=x\left(1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}+\frac{n^3}{m^3}+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right),$$

d'où

$$x=\frac{m^3}{m^2+n^2+mn}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 330

(voir page 230);

PAR UN ABONNÉ (*),
ET M. JEAN MOLARD,
Étudiant.

nployant les notations de M. Lebesgue, on a, deux dernières racines,

$$-\frac{i}{2}\pm\frac{1}{x}\sqrt{-3i^2-4q}.$$

nc vérifier que

$$^2+4q)(4q^3+27r^2)=(6qi^2-9ri+4q^2),$$
$$36q^2i^4-108qri^3+48q^3i^2+(9ri-4q^2)^2;$$

oservant que $i^3=-qi-r$,

$$(3i^2+4q)(4q^3+27r^2)$$
$$=(12q^3+81r^2)i^2+108qr^2+16q^4.$$

ation est identique.

lu Rédacteur. M. J. de Virieu, régent à Saumur, ussi la solution à une identité, directement sans on. Incessamment une démonstration générale ioschi, fondée sur cette magnifique propriété que ines quelconques d'une équation algébrique sont ions *rationnelles* de toutes les autres racines, et a avec admiration, du moins qu'on pourra lire nbre.

(*) rmule donnée à la page 230 contient une faute typographique : $4q^2+27r^2$ au lieu de $4q^3+27r^2$.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LETTRE SUR LE PROBLÈME :

Trouver une droite qui rencontre quatre droites données,

PRÉCÉDÉE D'UNE OBSERVATION AU RÉDACTEUR ;

PAR M. A. CHEVILLARD,
Professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive.

Monsieur le Rédacteur,

Vous avez raison de dire qu'Olivier n'a fait qu'introduire en géométrie descriptive une méthode employée depuis longtemps dans les épures de charpente. On a dit de même que Monge, en créant la géométrie descriptive, n'avait fait que généraliser des procédés connus bien avant lui des charpentiers et des tailleurs de pierre. Il s'agit donc seulement entre nous de savoir si l'innovation (*) d'Olivier est utile à la science du dessin. Vous, monsieur le rédacteur, vous dites à peu près non (**). Les praticiens, forts de leur expérience journalière, affirment le contraire. Pour que vos lecteurs puissent choisir entre ces deux opinions opposées, il est bon de leur rappeler que toutes les écoles industrielles ont adopté les idées d'Olivier (***); qu'en 1850, l'école théorique par excellence, c'est-à-dire l'Ecole Polytechnique, introduisait ces idées dans son programme. Aussi dès lors propose-t-on dans les concours annuels des questions dont la solution exige, le plus sou-

---

(*) Je nie l'innovation. Monge et Olivier! quelle terrible comparaison! TM.

(**) J'ai dit, au contraire, que les changements de plans sont souvent très-utiles, même indispensables. Mais cette utilité ne date pas d'Olivier. TM.

(***) Qui inspectait ces écoles. TM.

des changements de plan. Au lieu de laisser au choix
ndidat les dimensions et la position de corps dont il
onstruire l'intersection, on lui détermine par des
res les éléments de la question.

a-t-on que les questions des premiers concours ont
nnées sous l'influence d'Olivier? (*) Je répondrai
Ecole Polytechnique persiste aujourd'hui avec rai-
ns les mêmes errements (**); car elle a maintenu
angements de plan dans son programme et continué
oposer sur cette méthode des questions dont vous
ublié annuellement les énoncés en les accompagnant
s souvent d'éloges. Je n'en citerai qu'un exemple
quable tiré du concours de 1854 :

Jne calotte sphérique creuse repose par sa base sur
lan horizontal; le rayon extérieur de cette base est
^{m},10, le rayon intérieur est de 0^m,035. La hauteur
a calotte mesurée jusqu'à la surface extérieure est
^{m},03. Par le centre de la base, on mène une droite
allèle à la diagonale d'un cube dont une face serait
le plan horizontal et une autre sur le plan vertical;
s on prend cette droite pour l'axe d'un cylindre dont
ection droite serait un cercle de 0^m,03 de diamètre.
a posé, on veut connaître l'intersection de ce cylin-
avec les deux surfaces sphériques qui limitent la
tte creuse, ainsi que la tangente en un point quel-
que d'une de ces courbes. On construira, en outre,
léveloppement de la surface cylindrique du solide
mun aux deux corps. »

in, si toutes ces raisons, qui font suite aux raisons
ques insérées en mai dernier, étaient encore regar-
omme insuffisantes, je pourrais placer la méthode

---

ui TM.
est une erreur. TM.

des changements de plan sous la recommandation d'un nom dont vos lecteurs ne déclineraient pas la compétence, je veux parler de M. Bardin, dont votre journal apprécie si bien le talent, et qui, sous le nom de *projections auxiliaires*, n'a cessé d'enseigner la même méthode (*).

En terminant, je crois devoir m'associer entièrement au regret que vous manifestez en ces termes dans le numéro de janvier 1855 : « On cherche avec raison à répandre et à populariser cette langue universelle qu'on appelle le *dessin*. Pourquoi cette langue est-elle exclue des concours universitaires? » Et je crois être conséquent en déclarant n'entendre aucunement l'observation que vous faites en mai 1856, à savoir qu'*il faut employer avec économie, éviter même, autant que possible, les changements de plans* (**); car les personnes qui connaissent la théorie de la transformation des projections savent bien à quelle grande classe générale de problèmes cette méthode *doit* s'appliquer, sans rien de vague ni d'indéterminé (mai, page 202), et qu'elle est, au contraire, destinée à produire l'économie en même temps que la visibilité des constructions graphiques.

1. Quand la solution d'un problème ne dépend pas de la position particulière de ses données, on évite la complication des théories et surtout l'emploi des courbes auxiliaires par la méthode d'Olivier. Il faudrait se procurer les mêmes avantages pour les problèmes dont la solution dépend principalement de la position des données. C'est pour ce cas, heureusement bien moins utile que l'autre, que le dessinateur est livré à ses ressources personnelles, faute de règles assez générales. Je citerai seu-

---

(*) Nous publierons incessamment les observations de M. Bardin, qui doit savoir mieux que personne ce qu'il enseigne. TM.

(**) Je ne vois aucune connexion entre ce regret que j'exprime encore aujourd'hui et les changements de plans de projection. TM.

nt l'ellipse à projections droite et circulaire (*), la
re inscrite aux surfaces de révolution développables
on, comme d'excellents moyens de simplification
métrie descriptive de M. Adhémar) aussi avantageux
peu répandus. Mais, pour résoudre la question qui
objet de cette Note, je dois rappeler d'abord les pro-
es suivants :

*Déterminer le contact d'un plan quelconque pas-
par une génératrice rectiligne de surface gauche
lement réglée* S, *avec cette surface donnée soit par
directrices droites, soit par deux directrices droites
un plan directeur;* problème résolu sans tracé de
e à l'aide de la double génération rectiligne (Leroy,
er, etc.). Simplification remarquable si S est de ré-
ion.

même problème est résolu pour une surface gauche
onque par l'emploi de l'hyperboloïde et mieux du
oloïde de raccordement sur la génératrice donnée.

Circonscrire un cône de sommet m *ou un cylindre
rection* R *à une surface gauche doublement réglée*
sait que la ligne de contact est une conique dont le
est polaire de *m* ou conjugué à R. On déterminera
points de ce plan à l'aide de trois plans passant par
générations rectilignes et par *m* ou parallèlement
t dont on cherchera les contacts 1, 2, 3 (1°). On
minera ensuite divers points de la conique de con-
ar les rencontres de diverses génératrices de S avec
n 1, 2, 3. Ainsi, pas de courbe auxiliaire pour dé-
ner chaque point de la ligne de contact et, à la ri-
, même avantage pour une surface gauche quelcon-
si l'on veut s'en préoccuper.

(*) C'est-à-dire dont une projection est une droite et l'autre un cercle.
TM.

Jusqu'ici ces questions sont connues comme je l'indique, quoique dans un sens évidemment moins pratique ; mais je ne sache pas qu'on en ait profité pour résoudre, *sans courbes à tracer*, les trois problèmes suivants :

2. *Mener par une droite* D *un plan tangent à une surface gauche doublement réglée* S *et déterminer les contacts* x *et* y.

Construisez le plan 1, 2, 3 de la conique de contact d'un cône circonscrit à S par un point m de D (n° 1, 2°). Les points x, y seront dans ce plan. Construisez le plan 6, 7, 8 de la conique de contact d'un cône circonscrit à S par un point n de D, plan qui contiendra encore x et y. Ces deux points seront donc à l'intersection E des plans 1, 2, 3, 6, 7, 8 ; D et E étant, comme on sait, deux droites polaires conjuguées, un troisième plan correspondant à un nouveau point de D ne servirait à rien. L'un des plans 1, 2, 3, 6, 7, 8 peut être fourni par un cylindre de direction D circonscrit à S.

Cela posé, reste à trouver les intersections x, y, de E avec S. Procurez-vous deux nouveaux points 4 et 5 de la conique 1, 2, 3 (n° 1). Par deux changements de plans de projection successifs, rabattez sur le papier les points 1, 2, 3, 4, 5 et la droite E. La question sera ramenée à trouver l'intersection d'une droite E avec une conique donnée par cinq points 1, 2, 3, 4, 5. Si l'on joint deux quelconques de ces cinq points aux trois autres, on formera deux faisceaux dont les rayons divisent homographiquement la sécante E en six points conjugués deux à deux. Les points doubles de cette division homographique sont précisément x et y. Il n'y a aucune difficulté à les obtenir, puisque ces six points sont en involution (*Géométrie supérieure* de M. Chasles). Si donc on trouve que ces points doubles sont imaginaires, on en conclura que

ème est impossible, parce que D ne rencontre pas
ait d'ailleurs que la réciproque est vraie.

rouver les points où une droite D *rencontre une doublement réglée* S.

chez le contact x d'un seul plan tangent mené à (n° 2). Les deux génératrices rectilignes qui pas- x et sont dans le plan xD rencontreront D aux herchés. Le second plan tangent qu'on peut me- par D fournirait évidemment les deux points pré- S étant du deuxième degré. Si x est sur D, celle- angente à S en ce point. Si x n'existe pas, D ne re pas S.

donnée une projection d'un point d'une surface ent réglée, on pourra toujours trouver l'autre on sans tracer de courbe; solution qui se simplifie ablement dans bien des cas, surtout quand S a directeur.

rouver une droite qui rencontre quatre droites ques données sans tracé de courbe (*).

t A, B, C, D les quatre droites données. On con- yperboloïde à une nappe S déterminé par A, B, herchera les points x, y où D rencontre cet hy- de, et comme ces points auront été trouvés chacun génératrice de S (n° 3) savoir G et G′, ces deux encontreront donc A, B, C, D; d'où deux solu-

erboloïde A, B, D fournirait encore deux solu- c.; en tout huit solutions se réduisant évidemment x premières. Sans discuter ce problème, je ferai nt remarquer que si la quatrième droite D était ice de l'hyperboloïde A, B, C et de même système

(*) Grunert a donné une solution analytique de ce problème (*Nou- les*, t. XIII, p. 117).



que ces trois droites, il y aurait une infinité de solutions.

Les détails de l'exécution d'un pareille épure ne peuvent trouver place ici. Pour être compris, on devra partager le travail en plusieurs parties désignées chacune par une couleur particulière. L'habitude du dessin graphique suggérera de grandes simplifications, même dans le cas le plus général.

THEORÈME CONCERNANT QUATRE CONIQUES INSCRITES DANS LE MÊME QUADRILATÈRE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. THÉORÈME. *Soient* C, C′, Σ, Σ′ *quatre coniques inscrites dans un même quadrilatère;* m, m′ *deux des points d'intersection de* Σ *avec* C *et* C′ *respectivement et* n *l'un des points d'intersection de* Σ′ *avec* C. *Si l'on décrit la conique* U *qui est tangente aux quatre côtés du quadrilatère et à la corde* m′ n, *et qu'on fasse rouler cette corde sur la conique* U *jusqu'à ce qu'elle passe par le point* m, *ce qui donne lieu à deux positions distinctes, cette corde, dans chacune de ces deux positions, passera par l'un des points d'intersection de* Σ′ *et de* C′.

2. Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que si l'on transforme, par voie de *dualité*, la proposition qui fait l'objet du n° 757 de la *Géométrie supérieure*, on obtient la suivante qui en est la *corrélative:*

Étant données trois coniques inscrites dans le même quadrilatère, si une corde de longueur variable roule sur l'une d'elles, tandis que ses extrémités glissent sur les deux autres respectivement, les tangentes à la pre-

conique, menées par ces deux extrémités, se cou-ur une quatrième conique inscrite dans le même ilatère que les trois autres.

Cela posé, soit désignée par M la tangente $m'n$ à ique U, et soit N une tangente à la même conique par le point m. N coupera la conique Σ' en deux n', n''. Ne nous occupons que de celui de ces deux qui est situé dans la région de la conique Σ' où naturellement amenée l'extrémité n de la corde va-$m'n$, quand on la fait rouler sur U et glisser en temps sur Σ et Σ' jusqu'à ce qu'elle vienne passer point m, conformément à l'hypothèse; et soit n' nt.

droite M a ses extrémités m', n situées sur Σ et Σ' tivement, et la droite N a ses extrémités m et n' s deux mêmes coniques respectivement. Ces deux sont tangentes à la conique U; donc, en vertu de position auxiliaire rappelée ci-dessus (n° 2), le de concours i des tangentes à cette conique me-ar les deux points m' et n, et le point de con-i' des deux tangentes à la même conique menées s deux points m et n', sont sur une sixième co-U′ inscrite dans le même quadrilatère que les coni-onnées.

uellement, considérons les droites mi' et ni; elles par construction, tangentes toutes deux à la coni-Les extrémités de la première sont les points m ués respectivement sur C et U′; celle de la seconde s points n et i situés respectivement aussi sur les mêmes coniques C et U′. Donc, en vertu de la pro-n déjà citée, les tangentes à U, menées par leurs nités, doivent se couper deux à deux sur une même e inscrite dans le même quadrilatère que les coni-onnées. Ces tangentes sont, d'une part, mn' et $i'n'$



qui se coupent en n', et, d'autre part, nm' et im' qui se coupent en m'. Or m' appartient, par hypothèse, à la conique C'; donc enfin n' appartient aussi à cette conique.

C. Q. F. D.

4. Le quadrilatère du théorème général (n° 1) peut être un parallélogramme. Si ce parallélogramme devient imaginaire, les deux sommets, considérés comme deux *centres d'homologie*, subsistent et conservent toutes leurs propriétés. Dans ce cas, ils sont les foyers communs des coniques données (voir *Traité des propriétés projectives*). La proposition (n° 2) et le théorème général (n° 1) subsistent également. Seulement il faut ajouter que si deux des coniques, C et C' par exemple, sont de même espèce (ellipses ou hyperboles), les deux autres Σ, Σ' sont nécessairement d'espèce différente des premières (hyperboles ou ellipses), sans quoi les points d'intersection m, m', n, n' seraient imaginaires.

5. Les points m, m' seront alors désignés sous le nom de *points correspondants,* et de même les points n et n'.

Le théorème général prend ainsi l'énoncé suivant, qui a été donné pour la première fois sans démonstration par M. Chasles, dans une communication faite à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846 au sujet des coniques homofocales:

Si l'on prend sur deux coniques deux systèmes de points correspondants m, m' *et* n, n', *les deux droites* mn', m'n *sont tangentes à une même conique homofocale aux proposées.*

VALUATION D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE FRACTIONNAIRE

La variable étant racine d'une équation algébrique donnée;

D'APRÈS GAUSS.

. *nova. integr.* Comm. Gotting. vol. III, 1814-15, pages 39.

I.

it Z, ζ, ζ' trois fonctions entières de z; on de- quelle fonction entière on peut substituer à la $\frac{Z}{\zeta}$, telle qu'en y substituant pour z une racine de on $\zeta' = 0$, on trouve la même valeur qu'en sub- cette racine pour z dans l'expression fraction-

it k le degré de ζ et k' le degré de ζ'; on suppose d'ail- ue ζ et ζ' n'ont pas de facteur commun, de sorte fraction $\frac{Z}{\zeta}$ ne peut devenir infinie: ce qui aurait 'on substituait une racine commune à ζ et à ζ'.

ns sur ζ et ζ' les opérations de la recherche du and commun diviseur; on aura cette suite d'équa-

$$\left\{\begin{array}{l}
\zeta'' = \lambda\zeta \quad - p\zeta', \\
\zeta''' = \lambda'\zeta' \quad - p'\zeta'', \\
\zeta^{\text{iv}} = \lambda''\zeta'' \quad - p''\zeta''', \\
\zeta^{\text{v}} = \lambda'''\zeta''' \quad - p'''\zeta^{\text{iv}}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\zeta^{(m)} = \lambda^{(m-2)}\zeta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\zeta^{(m-1)}.
\end{array}\right.$$

partir de ζ'' sont les résidus des divisions, fonc-

tions entières dont le coefficient du premier terme est l'unité; et soient k'', k''', k^{IV},..., $k^{(m)}$ les degrés successifs de ces résidus. Ces nombres k, k', k'',..., $k^{(m)}$ vont toujours en décroissant et enfin $k^{(m)} = 0$; p, p', p'',..., $p^{(m-1)}$ sont des fonctions entières de z de l'ordre $k - k'$, $k' - k''$, $k'' - k'''$; les λ sont des nombres, et $\zeta^{(m)} = 1$; car le dernier reste doit être l'unité puisque les fractions n'ont pas de diviseur commun; si $k' > k$, il faudra faire $p = 0$.

Formons une seconde série de fonctions entières de z, en changeant dans les équations (1) les ζ en η et supposant $\eta = 1$, $\eta' = 0$; on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \eta'' = \lambda\eta - p\eta', \\ \eta''' = \lambda'\eta' - p'\eta'', \\ \eta^{\text{IV}} = \lambda''\eta'' - p''\eta''', \\ \eta^{\text{V}} = \lambda'''\eta''' - p^{\text{IV}}\eta^{\text{V}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta^{(m)} = \lambda^{(m-2)}\eta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\eta^{(m-1)}. \end{cases}$$

Il est évident que $\eta'' = \lambda$, par conséquent η'' est d'ordre nul; que $\eta''' = -p'\lambda$, donc η''' est de même ordre que p', c'est-à-dire de l'ordre $k' - k''$; η^{IV} est de même ordre que $p''\eta'''$, c'est-à-dire de l'ordre

$$k'' - k''' + k' - k'' = k' - k'''.$$

On trouve de même que η^{V} est de l'ordre $k' - k^{\text{IV}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\eta^{(m)}$ qui est de l'ordre $k' - k^{(m-1)}$.

Considérons cette troisième série de fonctions

$$\zeta - \zeta\eta,\quad \zeta' - \zeta\eta',\quad \zeta'' - \zeta\eta'',\quad \zeta''' - \zeta\eta''',\dots.$$

on a évidemment les relations

$$\begin{aligned} \zeta'' - \zeta\eta'' &= \lambda(\zeta - \zeta\eta) - p(\zeta' - \zeta\eta'), \\ \zeta''' - \zeta\eta''' &= \lambda'(\zeta' - \zeta\eta') - p'(\zeta'' - \zeta\eta''), \\ \zeta^{\text{IV}} - \zeta\eta^{\text{IV}} &= \lambda''(\zeta'' - \zeta\eta'') - p''(\zeta''' - \zeta\eta'''). \end{aligned}$$

évident que

$$\zeta - \zeta\eta = 0, \quad \zeta' - \zeta\eta' = \zeta',$$

$\zeta'' - \zeta\eta''$ est divisible par ζ'; de même $\zeta''' - \zeta\eta'''$, $\zeta\eta^{\text{iv}}$,.... Chacune de ces fonctions étant divisible il s'ensuit que la racine de ζ' substituée dans ces ons les annule; donc la dernière fonction

$$\zeta^{(m)} - \zeta\eta^{(m)} = 1 - \zeta\eta^{(m)}$$

t nulle en remplaçant z par une racine de $\zeta' = 0$; l en est de même de

$$\frac{Z}{\zeta}[1 - \zeta\eta^{(m)}] = \frac{Z}{\zeta} - Z\eta^{m}.$$

la substitution de la valeur de z dans $\frac{z}{\zeta}$ donne le résultat que si on la substitue dans la fonction en- $z\,\eta^{(\mu)}$; c'est ce qu'il fallait trouver.

II.

s avons vu que $Z\eta^{(m)}$ peut remplacer $\frac{Z}{\zeta}$; mais il suf- prendre le résidu de la division de $Z\eta^{(\mu)}$ par ζ': à et, posons les équations

$$\begin{aligned}
Z &= q'\ \zeta' + Z',\\
Z' &= q''\ \zeta'' + Z'',\\
Z'' &= q'''\ \zeta''' + Z''',\\
Z''' &= q^{\text{iv}}\zeta^{\text{iv}} + Z^{\text{iv}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z^{(m-1)} &= q^{(m)}\,\zeta^{(m)} + Z^{(m)},
\end{aligned}$$

Z' est le résidu de la division de Z par ζ',
Z'' » Z' par ζ'',
Z''' » Z'' par ζ''',
etc.

Or Z' est d'un ordre inférieur à l'ordre de ζ' inférieur à k', Z'' est d'un ordre inférieur à celui de ζ'' inférieur à k''; et allant de suite, $Z^{(m)}$ est d'un ordre inférieur à $\zeta^{(m)}$, c'est-à-dire à 1. Donc

$$Z^{(m)} = 0;$$

ainsi

$$Z = q'\zeta' + q''\zeta'' + q'''\zeta''' + q^{\text{iv}}\zeta^{\text{iv}} + \ldots + q^{(\mu)}\eta^{(\mu)}.$$

En posant

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\zeta'' = \zeta\eta'', \quad \zeta''' = \zeta\eta''', \ldots, \quad \zeta^{\text{iv}} = \zeta\eta^{\text{iv}}$$

(voir ci-dessus); donc, avec la même condition,

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\frac{Z}{\zeta} = q''\eta'' + q'''\eta''' + q^{\text{iv}}\eta^{\text{iv}} + \ldots + q^{(m)}\eta^{(m)}.$$

Or z' est d'un ordre inférieur à k' : $q''\zeta''$ est donc aussi d'un ordre inférieur à k'; mais ζ'' est d'ordre k'' : q'' est donc d'un ordre inférieur à $k' - k''$; mais η'' est d'ordre nul : donc $q''\eta''$ est d'ordre inférieur à k', z'' est d'ordre inférieur à k'', et de même $q'''\zeta'''$; mais ζ''' est d'ordre k''': donc q''' est d'ordre inférieur à $k'' - k'''$; η''' est d'ordre $k' - k''$: donc $q'''\eta'''$ est d'ordre inférieur à $k' - k'''$, et on démontre de même que tous les termes sont d'un ordre inférieur à k'.

Si l'équation

$$\zeta' = 0$$

a des racines rationnelles, il est plus facile de substituer immédiatement ces valeurs dans $\frac{Z}{\zeta}$ et de débarrasser ζ'

es racines ; le degré de la fonction équivalente sera *dre* alors que si on laisse subsister ces racines ration-s.

III. *Applications.*

$$Z = z^6 - \frac{50}{39} z^4 + \frac{283}{715} z^2 - \frac{256}{15015},$$

$$\zeta = 7 z^6 - \frac{105}{13} z^4 + \frac{315}{143} z^2 - \frac{35}{429},$$

$$\zeta' = z^7 - \frac{21}{13} z^5 + \frac{105}{143} z^3 - \frac{35}{429} z.$$

nt

$$\zeta' = 0,$$

$$z = 0$$

$$\frac{Z}{\zeta} = \frac{256}{1225}.$$

ant par z, on a

$$\zeta' = z^6 - \frac{21}{13} z^4 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{429},$$

nc pour quotient 7 et pour résidu

$$\frac{42}{13}\left(z^4 - \frac{10}{11} z^2 + \frac{5}{33}\right);$$

$$z^4 - \frac{10}{11} z^2 + \frac{5}{11} = \frac{13}{42}\zeta - \frac{13}{6}\zeta',$$

$$\zeta'' = z^4 - \frac{10}{11} x^2 + \frac{5}{33},$$

$$\lambda = \frac{13}{42}, \quad p = +\frac{13}{6}:$$

et, continuant de même, on trouve

$$\zeta''' = z^2 - \frac{3}{7}, \quad \lambda' = -\frac{4719}{280},$$

$$\zeta^{\text{IV}} = 1, \qquad \lambda'' = -\frac{147}{8},$$

$$p' = -\frac{4719}{280} z^2 + \frac{3333}{286},$$

$$p'' = -\frac{147}{8} z^2 + \frac{777}{88},$$

$$\eta = 1, \quad \eta' = 0, \quad \eta'' = \frac{13}{42}, \quad \eta''' = \frac{20449}{3920} z^2 - \frac{14443}{3920},$$

$$\eta^{\text{IV}} = \frac{61347}{640} z^4 - \frac{127413}{1120} z^2 + \frac{120263}{4486};$$

$$Z = z^6 - \frac{50}{39} z^4 + \frac{283}{715} z^2 - \frac{256}{15015}, \quad q' = 1,$$

$$Z' = \frac{1}{3} z^4 - \frac{22}{65} z^2 + \frac{323}{5005}, \qquad q'' = \frac{1}{3},$$

$$Z'' = -\frac{76}{2145} z^2 + \frac{632}{45045}, \qquad q''' = -\frac{76}{2145},$$

$$Z''' = -\frac{4}{3465}, \qquad q^{\text{IV}} = -\frac{4}{3405};$$

de là, on dérive la fonction entière equivalente à la fonction fractionnaire, savoir :

$$-\frac{1859}{16800} z^4 - \frac{1573}{29400} z^2 + \frac{7947}{39200}.$$

M. Koralek, le célèbre calculateur, a ainsi achevé le calcul; regardant z^2 comme l'inconnue, les trois racines de l'équation

$$z^6 - \frac{21}{13} z^4 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{459} = 0$$

$$z_1^2 = 0,549\,664\,41,$$
$$z_2^2 = 0,900\,912\,54,$$
$$z_3^2 = 0,164\,807\,68;$$

leurs, étant substituées dans l'expression

$$\frac{1859}{1680}z^4 - \frac{1573}{29400}z^2 + \frac{7947}{39200},$$

ent respectivement ces résultats :

$$-0,042\,568\,17,$$
$$-0,011\,774\,11,$$
$$-0,008\,449\,63.$$

te. On voit qu'il est bien moins pénible de calculer ne fonction entière que sur une fraction rompue. t P, Q, R trois fonctions entières de z et supposons 'on ait

$$Py + Q = 0, \quad R = 0;$$

nant z, on obtient une équation en y. Cette mé- nous apprend qu'on peut parvenir à cette équation en éliminant z entre $y = S$ et $R = 0$, S étant une ion entière de z qu'on peut déterminer. Cela revient étriquement à remplacer une courbe hyperbolique ne courbe parabolique. TM.

SUR LA QUESTION 330

(voir p. 220, 305).

théorème est démontré dans l'*Algèbre supérieure*, dit., p. 206, et est une conséquence immédiate des ules données par Stainville (*Annales* de Gergonne, , p. 201). (A. GENOCCHI.)

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

I.

Discussion d'une équation numérique du second degré à trois variables.

Nous supposerons que les trois équations du premier degré

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

qui déterminent les coordonnées du centre, aient une solution *finie* et une seule; en prenant pour origine le point déterminé par cette solution, l'équation à discuter aura la forme

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

et la valeur du polynôme

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

sera différente de zéro (*).

Nous admettrons de plus que le terme indépendant F n'est pas nul.

(*) Ce polynôme est, comme on sait, le dénominateur commun des valeurs qu'on obtient en résolvant les équations

$$\frac{1}{2}f'_x = 0, \quad \frac{1}{2}f'_y = 0, \quad \frac{1}{2}f'_z = 0.$$

On le nomme le *déterminant* des fonctions linéaires $\frac{1}{2}f'_x$, $\frac{1}{2}f'_y$, $\frac{1}{2}f'_z$, ou bien encore l'*invariant* de la fonction homogène du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy.$$

Nous le désignerons par la lettre D.

En faisant successivement

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0$$

l'équation (1), on aura les sections de la surface par
lans des coordonnées. Si parmi ces trois sections on
/e deux lignes *réelles* d'espèces différentes, la surface
un hyperboloïde à une nappe. Car, en coupant un
rboloïde à deux nappes, ou un ellipsoïde par des
s qui contiennent le centre de la surface, on n'obtient
is des lignes réelles d'espèces différentes.

parmi les trois sections dont il s'agit, on trouve une
réelle et une ligne *imaginaire,* la surface sera un
rboloïde à deux nappes. Car, la surface sera réelle,
seule surface réelle du second degré, à centre unique,
puisse être coupée suivant une ligne imaginaire par
lan contenant le centre, est l'hyperboloïde à deux
es.

'après cela, on voit qu'il n'y a lieu à discussion qu'au-
que les trois sections sont de même nature.

Elles peuvent être, toutes trois, du genre parabo-
e.

n aura alors

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0, \quad B^2 - A'A'' = 0.$$

un des coefficients A, A', A'' ne sera nul; car, si l'on
, par exemple, $A = 0$, il en résulterait

$$B' = 0, \quad B'' = 0,$$

équation (1) se réduisant à

$$A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + F = 0,$$

ntiendrait que deux variables, ce qui ne peut avoir
quand la surface a un centre unique. Les relations

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0,$$

montrent, de plus, que les trois coefficients A, A′, A″ doivent avoir le même signe.

Suivant que le signe commun à A, A′, A″ *sera différent de celui du terme indépendant* F *ou le même que celui de* F, *la surface sera un hyperboloïde à une nappe ou un hyperboloïde à deux nappes.*

En effet, dans le premier cas, les sections par les plans des coordonnées étant chacune formées de deux droites réelles, il est clair que la surface est un hyperboloïde à une nappe. Et de là on peut conclure que, dans l'autre cas, la surface est nécessairement un hyperboloïde à deux nappes. C'est ce que nous allons faire voir.

En admettant pour plus de précision que A, A′, A″ soient positifs, le terme indépendant F sera négatif quand les sections seront formées de droites réelles, et l'équation proposée aura la forme

$$(2)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = K^2.$$

Comme elle représente alors un hyperboloïde à une nappe, en prenant pour axes des x et des y les deux axes réels de l'hyperboloïde et pour axe des z l'axe imaginaire, on réduira l'équation précédente à

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2,$$

le terme indépendant ne sera pas changé puisqu'on a conservé la même origine. Quand F est positif, l'équation proposée devient

$$(3)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = -K^2;$$

et la même transformation de coordonnées qui réduit l'équation (2) à

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2,$$

donnera pour (3) l'équation

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = -K^2,$$

i représente évidemment un hyperboloïde à deux nap-
s (*).

3. Les trois sections par les plans des coordonnées
uvent être du genre elliptique. Dans ce cas, on a les
égalités

$$B''^2 - AA' < 0, \quad B'^2 - AA'' < 0, \quad B^2 - A'A'' < 0.$$

Les trois coefficients A, A′, A″ sont différents de zéro
ils ont le même signe. Quand le signe commun à A,
, A″ sera le même que celui du terme indépendant F,
trois ellipses seront imaginaires, et elles seront, au
ntraire, réelles si le signe de A, A′, A″ est différent
celui de F. Dans le premier cas, la surface ne peut
e qu'un hyperboloïde à deux nappes ou une surface
aginaire. Dans le second, elle sera un ellipsoïde ou un
perboloïde à une nappe.

Nous allons discuter l'équation proposée dans chacune
ces deux hypothèses.

1°. *Si les sections sont des ellipses imaginaires, l'équa-
n représentera un hyperboloïde à deux nappes ou une
rface imaginaire suivant que l'*invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

---

*) En général, si, $f(x, y, z)$ étant une fonction homogène du second
ré, l'équation

$$f(x, y, z) + h = 0$$

résente un hyperboloïde à une nappe, l'équation

$$f(x, y, z) - h = 0$$

résentera un hyperboloïde à deux nappes. Car la première pourra être
nenée à la forme

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = K^2;$$

par la même transformation de coordonnées, la seconde deviendra

$$px^2 + p'y^2 - p''z^2 = -K^2.$$

aura un signe différent de celui du terme indépendant F, *ou le même signe que* F.

Démonstration. Les quantités A, $B''^2 - AA'$ étant différentes de zéro, le polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

pourra être transformé en cette somme algébrique de carrés

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2}\ (^*).$$

et, par suite, l'équation proposée deviendra

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} \\ &\qquad + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} + F = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, les coefficients A, F sont supposés de même signe; d'ailleurs, la différence $AA' - B''^2$ est positive, donc les trois termes

$$\frac{(Ax + B''y + B'z)^2}{A},\quad \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)},\quad F,$$

sont à la fois ou positifs ou négatifs. Cela posé, si l'invariant D a un signe contraire à celui de F, la surface représentée par l'équation (4) ne peut être imaginaire puisque l'intersection de cette surface par le plan

$$Ax + B''y + B'z = 0$$

(*) La transformation dont il s'agit ici n'offre qu'une application particulière d'une théorie très-remarquable qui est due à M. Hermite. Les propositions élémentaires de cette théorie ont été exposées dans la dernière édition du *Programme* que j'ai publié avec M. Roguet.

une hyperbole dont la projection sur le plan des yz a r équation

$$\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}+\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}+F=o.$$

conséquent, cette surface est un hyperboloïde à deux pes.

Quand l'invariant D a le même signe que le terme inendant F, l'équation (4) n'admet aucune solution le, parce que le premier membre est la somme de tre carrés précédés du même signe, et dont l'un est épendant des variables.

°. *Lorsque les sections sont des ellipses réelles, l'étion proposée représente un ellipsoïde ou un hyperoïde à une nappe suivant que l'invariant*

$$AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2$$

n signe contraire à celui du terme indépendant F, *le même signe que ce terme.*

Démonstration. On peut, comme précédemment, tre l'équation proposée sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{(Ax+B''y+B'z)^2}{A}+\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}\\&\qquad+\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}+F=o.\end{aligned}\right.$$

Mais A et F ont maintenant des signes contraires, ce que les ellipses qui résultent des intersections de urface par les plans des coordonnées sont supposées les. De plus, $AA'-B''^2$ est une quantité positive; il suit que si l'invariant D et le terme indépendant F nt pas le même signe, les trois carrés $\frac{(Ax+B''y+B'z)^2}{A}$,

$\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}$, $\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}$ auront leurs coefficients positifs quand F sera négatif, et inversement; on en conclura que l'équation (4) représente alors une surface limitée qui ne peut être qu'un ellipsoïde (*).

Lorsque D et F ont le même signe, deux des carrés qui composent le premier membre de l'équation (4) sont précédés du signe + et les deux autres du signe —. Il est, par cela même, évident que la surface admet des génératrices rectilignes; par conséquent, cette surface est un hyperboloïde à une nappe. C'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Supposons actuellement que les sections par les plans des coordonnées soient des hyperboles.

On aura

$$B''^2-AA'>0,\quad B'^2-AA''>0,\quad B^2-A'A''>0;$$

les coefficients A, A′, A″ pourront être positifs, négatifs ou nuls. Nous allons faire voir que, dans tous les cas, *la surface sera un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes suivant que l'invariant* D *et le terme indépendant* F *auront le même signe ou des signes contraires.*

En admettant d'abord que les carrés des trois variables ne manquent pas à la fois, l'un des trois coefficients A, A′, A″, par exemple A, ne sera pas nul, on pourra alors

(*) En prenant pour plans de coordonnées les trois plans déterminés par les équations

$$Ax+B''y+B'z=0,$$
$$(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z=0,\qquad z=0,$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$K^2x^2+K'^2y^2+K''^2z^2=h^2,$$

et sous cette forme on reconnaît immédiatement qu'elle appartient à un ellipsoïde.

er à l'équation proposée la forme

$$\frac{(Ax+B''y+B'z)^2}{A}+\frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)}$$
$$+\frac{Dz^2}{(AA'-B''^2)}+F=0.$$

différence $AA'-B''^2$ étant ici négative, on voit que oefficients $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A(AA'-B''^2)}$ des deux premiers carrés les signes contraires, et qu'il en est de même des derniers termes $\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}$ et F, quand D et F ont ême signe. Dans ce cas, en faisant passer ces deux iers termes dans le second membre de l'équation, un des deux membres deviendra une différence de carrés, d'où il faut conclure que la surface représ e par l'équation proposée, admettant des génératriectilignes, est un hyperboloïde à une nappe.

rsque D et F ont des signes contraires, les deux es $\frac{Dz^2}{AA'-B''^2}$ et F ont le même signe; alors, deux ois carrés

$$+B''y+B'z)^2 \over A}, \quad \frac{[(AA'-B''^2)y+(AB-B'B'')z]^2}{A(AA'-B''^2)},$$
$$\frac{Dz^2}{AA'-B''^2},$$

t affectés du même signe que F, et si l'on égale à le troisième carré, on aura l'équation d'un plan nt par le centre de la surface et dont l'intersection la surface sera une ligne imaginaire (*); par consé-

Supposez que le terme qui a un signe contraire à celui de F soit, par le, le premier terme $\frac{(Ax+B''y+B'x)^2}{A}$. Les coordonnées des

quent, l'équation proposée représentera un hyperboloïde à deux nappes.

Quand on a, à la fois,

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

l'équation proposée devient

(5) $$2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

et l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

se réduit à $2BB'B''$. Aucun des trois coefficients B, B', B'' ne peut être nul.

Il est facile de reconnaître que la surface est un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, suivant que le produit $BB'B''$ a le même signe que F, ou un signe différent de celui de F.

On voit d'abord que cette surface est indéfinie dans tous les sens, puisqu'en donnant à deux des variables des

---

points communs à la surface et au plan diamétral

$$Ax + B''y + B'x = 0$$

devront vérifier l'équation

$$\frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{(AA' - B''^2)} + F = 0.$$

Or, cette équation n'admet aucune solution réelle, puisque le premier membre est la somme de trois carrés précédés du même signe, et que l'un de ces carrés est indépendant des variables.

Au reste, en prenant pour plans de coordonnées les trois plans

$$Ax + B''y + B'x = 0,$$

$$(AB' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0. \quad z = 0,$$

l'équation deviendra

$$K^2x^2 - k'^2y^2 - k''^2z^2 = h^2,$$

et il est alors évident qu'elle se rapporte à un hyperboloïde à deux nappes.

quelconques, la valeur correspondante de la
ne variable est constamment réelle. D'ailleurs la
a un centre unique et n'est pas un cône, donc elle
être que l'un des deux hyperboloïdes.

savoir quel est celui des deux hyperboloïdes que
on (5) représente, il suffit de remarquer que pour
nts communs à la surface et au plan

$$By + B'x = 0$$

ar le centre, on a

$$By + B'x = 0 \quad \text{et} \quad 2B''xy + F = 0;$$

$$x = \pm B\sqrt{\frac{F}{2BB'B''}}.$$

si le produit $BB'B''$ a le même signe que F, l'é-
n

$$x = \pm B\sqrt{\frac{F}{2BB'B''}}$$

ine deux droites parallèles qui appartiennent à la
considérée, et, par conséquent, l'équation (5)
nte un hyperboloïde à une nappe. Si $BB'B''$ et F
signes différents, l'intersection de la surface et du
ntral $By + B'x = 0$ est imaginaire, donc l'équa-
) se rapporte à un hyperboloïde à deux nappes.

e tout ce qui précède, nous concluons que pour re-
tre de quel genre est la surface représentée par
ion

$$\ldots A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

de déterminer les signes des différences

$$B^2 - A'A'', \quad B'^2 - AA'', \quad B''^2 - AA'$$



et de l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

du polynôme homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy,$$

ce qui n'exige aucune transformation de l'équation proposée.

Il est d'ailleurs facile d'exprimer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

représente une surface d'un genre déterminé.

Si l'on veut, par exemple, que la surface soit un ellipsoïde, il faudra que la section faite par l'un des trois plans coordonnés soit une ellipse *réelle*, et de plus la surface devra être limitée. Ces conditions seront suffisantes.

En prenant pour plan sécant le plan des xy, les équations de la section seront

$$z = 0, \quad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + F = 0,$$

et on exprimera que cette section est une ellipse réelle en posant

$$B''^2 - AA' < 0, \quad AF < 0.$$

Si l'on suppose le terme indépendant F négatif, ce qui est permis, les deux premières conditions deviendront

$$B''^2 - AA' < 0, \quad A > 0.$$

De plus, pour que la surface soit limitée, il faut et suffit qu'on ait

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0 \quad (n^o 3, 2^o),$$

donc, en admettant que le terme indépendant F soit né-

les conditions nécessaires et suffisantes pour que
ation

$$+ A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

sente une ellipse, consistent dans les trois inégalités :

$$A > 0,$$
$$AA' - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0.$$

marque. Une méthode différente de celle que nous
suivie a conduit aux conditions

$$A + A' + A'' > 0,$$
$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0,$$
$$'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0\ (*).$$

eut effectivement déduire ces dernières inégalités de
que nous venons de trouver.

, en posant

$$D = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

$$D = \frac{(AA' - B''^2)(AA'' - B'^2) - (AB - B'B'')^2}{A}$$

---

uand les coordonnées sont rectangulaires, la détermination des
rincipaux et des axes des surfaces du second degré dépend de la
ion de l'équation du troisième degré

$$-(A + A' + A'')S^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)S$$
$$- (AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) = 0.$$

démontré que le premier membre de cette équation doit offrir
riations de signes lorsque l'équation du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$

nte un ellipsoïde, en admettant que F soit négatif. On a donc les
onditions

$$A + A' + A'' > 0,$$
$$AA' + AA' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0,$$

et, par conséquent, les inégalités supposées

$$A > 0, \quad AA' - B''^2 > 0, \quad D > 0$$

donnent

$$AA'' - B'^2 > 0,$$

et, par suite,

$$A'' > 0.$$

On a aussi

$$D = \frac{(AA'' - B'^2)(A'A'' - B^2) - (A''B'' - BB')^2}{A''},$$

d'où

$$A'A'' - B^2 > 0, \quad A' > 0.$$

En additionnant les trois inégalités

$$A > 0, \quad A' > 0, \quad A'' > 0,$$

il vient

$$A + A' + A'' > 0.$$

De même, l'addition des trois inégalités

$$AA' - B''^2 > 0, \quad AA'' - B'^2 > 0, \quad A'A'' - B^2 > 0$$

donne

$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 > 0.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

6. Nous avons jusqu'à présent admis que l'équation proposée contenait un terme indépendant des variables; lorsqu'il en est autrement, cette équation se réduit à

$$(5) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

et elle ne peut représenter qu'une surface conique ou l'origine des coordonnées, en supposant toujours que l'invariant D ne soit pas nul.

Quand les trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, $B^2 - A'A''$ ne sont pas à la fois négatives, on trouve au

une ligne réelle parmi les trois sections des plans
nnés, et, par conséquent, l'équation proposée ap-
t à un cône.

iscussion se borne donc à l'examen du cas particu-
les trois différences dont il s'agit étant négatives,
tions par les plans coordonnés ne donnent qu'un
int qui est l'origine.

déjà fait observer (n° 3) que dans ce cas le poly-
homogène

$$x^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

re remplacé par

$$\frac{B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2};$$

uit que l'équation proposée revient à

$$\frac{x + B''y + B'z)^2}{A} + \frac{[(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z]^2}{A(AA' - B''^2)} + \frac{Dz^2}{AA' - B''^2} = 0.$$

sque D et A auront le même signe, les coefficients
$\frac{1}{AA' - B''^2)}$, $\frac{D}{AA' - B''^2}$ des trois carrés qui forment
mier membre de l'équation (6) seront à la fois ou
s ou négatifs, et alors l'équation (6) n'admettant
seule solution réelle $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, re-
tera l'origine des coordonnées.

) et A ont des signes contraires, les deux premiers
ients $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A(AA' - B''^2)}$ seront positifs, et le troi-

sième $\frac{D}{AA' - B''^2}$ négatif ou inversement, et il est évident que l'équation admettra une infinité de solutions réelles, elle représentera donc un cône ayant son centre à l'origine (*).

D'après cela, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By z + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

représente un point sont exprimées par ces quatre inégalités

$$B''^2 - AA' < 0,\quad B'^2 - AA'' < 0,\quad B^2 - A'A'' < 0,\quad AD > 0.$$

G.

(*) Si, par exemple, D est négatif et A positif en prenant pour plans de coordonnées les trois plans

$$Ax + B''y + B'z = 0,$$
$$(AA' - B''^2)y + (AB - B'B'')z = 0,\quad z = 0,$$

l'équation (6) se ramènera à la forme

$$K^2x^2 + K'^2y^2 - K''^2z^2 = 0,$$

d'où

$$K^2x^2 = (K''z + K'y)(K''z - K'y):$$

la surface représentée est évidemment un cône dont les génératrices ont pour équations

$$Kx = \lambda(K''z + K'y),$$
$$Kx = \frac{1}{\lambda}(K''z - K'y).$$

SUR LA DIVISION DU CERCLE
SON APPLICATION A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR JACOBI.

trait des *Comptes rendus* mensuels de l'Académie des Sciences
de Berlin pour l'année 1837.)

(TRADUIT PAR M. E. LAGUERRE-WERLY.)

nt p un nombre premier, x une racine de l'équa-

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

ne racine primitive de p. Posons en outre

$$F(\alpha) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

gnant une racine de l'équation

$$\frac{\alpha^{p-1} - 1}{\alpha - 1} = 0.$$

ra

$$F(\alpha) F(\alpha^{-1}) = \alpha^{\frac{p-1}{2}} . p;$$

on pose

$$F(\alpha^m) F(\alpha^n) = \psi(\alpha) F(\alpha^{m+n}),$$

ession $\psi(\alpha)$ sera une fonction entière de α dont
fficients seront des nombres entiers; on aura de plus

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1}) = p\ (*).$$

doit excepter le cas où une ou plusieurs des quantités α^m, α^n,
réduiraient à l'unité.

Désignons par r une racine primitive de l'équation

$$r^{p-1} - 1 = 0,$$

et dans l'expression

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m}).F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

remplaçons la quantité r par le nombre g; il viendra si m et n sont des nombres positifs plus petits que $p - 1$

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m)\Pi(n)} \pmod{p},$$

équation dans laquelle

$$\Pi(n) = 1.2.3\ldots n.$$

Mais si $m + n$ est plus grand que $p - 1$, on aura

$$\psi(g) \equiv 0 \pmod{p};$$

cette dernière proposition constitue dans les applications un des théorèmes les plus féconds de la théorie des nombres.

Le cas de $m + n = p - 1$ doit être excepté. Il y a plus de dix ans que j'ai communiqué ces théorèmes à Gauss. Je ferai encore remarquer que si l'on pose

$$2 \equiv g^m, \quad 3 \equiv g^{m'} \pmod{p},$$

on obtient ces deux formules remarquables :

(1) $$F(-1)F(\alpha^2) = \alpha^{2m}F(\alpha)F(-\alpha),$$

(2) $$F(\alpha)F(\gamma\alpha)F(\gamma^2\alpha) = \alpha^{-3m'}p\,F(\alpha^3).$$

Dans la dernière formule, γ désigne une racine cubique de l'unité. Si λ est un facteur impair de $p - 1$, la première de ces deux formules permet de déterminer les fonctions $F(\alpha)$, dans lesquelles α désigne une racine $2\lambda^{ième}$ de l'u-

u moyen de celles où α désigne une racine $\lambda^{ième}$ de
. On obtient aussi pour $F(-\gamma)$ l'expression

$$F(-\gamma) = \sqrt{p}\sqrt[3]{\gamma^{-B}\frac{A - B\sqrt{-3}}{A + B\sqrt{-3}}},$$

n dans laquelle

$$A^2 + 3B^2 = p.$$

e des deux mêmes formules, on trouve que si α est
cine primitive 8e de l'unité et si l'on a

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$
$$a \equiv c \equiv -1 \pmod{4},$$

a

$$= \sqrt{(-1)^{\frac{c+1}{4}}(c + d\sqrt{-2})\sqrt{(a + b\sqrt{-1})\sqrt{p}}},$$

lus

$$(\alpha)\,F(\alpha^2) = (-1)^{\frac{c+1}{4}+\frac{p-1}{8}}(a + b\sqrt{-1})\,F(\alpha^3),$$

$$(\alpha)\,F(\alpha^3) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}(c + d\sqrt{-1})\,F(-1).$$

ient encore la formule suivante où γ et α désignent
ivement des racines imaginaires de l'unité du troi-
t du quatrième degré,

$$= \frac{F(\alpha)F(\gamma)}{a' + b'\alpha} = \frac{\sqrt{(a + b\alpha)\sqrt{p}}\sqrt[3]{\frac{L + M\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt{p}}}{a' + b'\alpha},$$

e dans laquelle

$$p = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = \frac{L^2 + 3M^2}{4},$$
$$\equiv -1 \pmod{4}, \quad a' \equiv -L \equiv -1 \pmod{3},$$
$$M \equiv 0 \pmod{3}, \quad \frac{a'}{b'} \equiv \frac{a}{b} \pmod{p}.$$

Les signes douteux et les valeurs des radicaux seront toujours déterminés par des congruences, ou, s'ils dépendent du choix de la racine primitive g, cette dépendance sera indiquée d'une manière simple. La loi de cette dépendance est le principe le plus fécond dans l'application à la théorie des résidus des puissances. Je ferai encore remarquer que si

$$p = c^2 + 2d^2$$

est de la forme $8n + 1$, C est le résidu minimum par rapport au module p du nombre

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p+3}{2}\right)\cdots\frac{5(p-1)}{8}}{1.2\ldots\frac{p-1}{8}},$$

et qu'il est toujours positif ou négatif suivant que, abstraction faite du signe, il est de la forme $4n + 3$ ou de la forme $4n + 1$.

Les fonctions $F(\alpha)$, que l'on avait seulement déterminées dans les cas où α était ou une racine carrée ou une racine cubique ou une racine biquadratique de l'unité, sont maintenant déterminées par la formule ci-dessus lorsque α est une racine de l'unité soit du degré 6, soit du degré 8 ou bien encore du degré 12. On peut donc à priori résoudre complétement les équations du sixième, du huitième et du douzième degré qui se présentent dans la division du cercle; on n'a besoin pour cela que de la décomposition du nombre p en les trois formes $x^2 + y^2$, $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. J'ai joint à mon travail le tableau de ces décompositions pour tous les nombres premiers compris depuis 5 jusqu'à 12,000.

La formule suivante est d'une grande importance dans l'application de la division du cercle à la théorie des nombres.

ient p un nombre premier de la forme $n\lambda + 1$, β une
e primitive de l'unité du degré λ, α une racine quel-
ue de l'équation

$$\alpha^{p-1} = 1\ ;$$

le plus

$$\lambda \equiv g^{n}\ (\text{mod}.\ p)\ ;$$

ıra, si λ est impair,

$$)\ F(\beta\alpha)\, F(\beta^{2}\alpha) \ldots F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = \alpha^{-\lambda m}\, p^{\frac{\lambda-1}{2}}\, F(\alpha^{\lambda}),$$

 est pair,

$$\left\{\begin{aligned} & F(\alpha)\, F(\beta\alpha) \ldots F(\beta^{\lambda-1}\alpha) \\ & = (-1)^{\frac{(p-1)(\lambda-2)}{8}}\, p^{\frac{\lambda-2}{2}}\, F(-1)\, F(\alpha^{\lambda})\ (*). \end{aligned}\right.$$

quantité $F(-1)$ qui entre dans cette formule est
urs égale à

$$\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\, p}.$$

fonctions ψ sont liées intimement avec les coeffi-
du binôme ou les intégrales eulériennes de première
e, comme le montre la congruence

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m).\Pi(n)}\ (\text{mod}.\ p).$$

comparaison de cette congruence avec la formule

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m}).F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

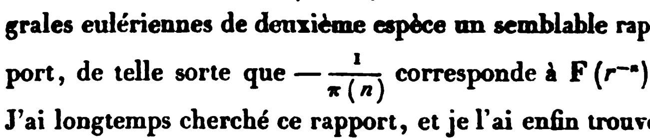
re qu'il doit exister entre les fonctions F et les inté-

---

e théorème est analogue à un théorème de Gauss sur les intégrales
nnes, théorème dont récemment Dirichlet a donné une remarqua-
onstration. (*Jacobi*.)



grales eulériennes de deuxième espèce un semblable rap-



port, de telle sorte que $-\frac{1}{\pi(n)}$ corresponde à $F(r^{-n})$. J'ai longtemps cherché ce rapport, et je l'ai enfin trouvé dans le théorème suivant :

Remplaçons dans l'expression $F(\alpha)$ l'exposant g^m par son résidu positif g_m par rapport au module p, en sorte que

$$F(x, \alpha) = x + \alpha x^{g_1} + \alpha^2 x^{g_2} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g_{p-2}}.$$

Ne représentons plus par x et α des racines de l'unité; mais soient x une variable indéterminée et α un nombre congru à g^{-m} suivant le module p. Représentons en outre par Y_n l'expression que l'on obtient en développant

$$[\log(1+y)]^n,$$

et en supprimant dans ce développement les puissances de y supérieures à la $(p-1)^{ième}$.

On aura pour une valeur quelconque de α et la valeur de m correspondante,

$$F(1+y, \alpha) \equiv -\frac{Y_m}{\Pi_m} (\text{mod.}\, p),$$

congruence qui doit avoir lieu quel que soit y, et, par conséquent, doit être vérifiée isolément par les coefficients de chaque puissance de y. Telle est la relation cherchée; en multipliant ensemble deux fonctions F, on en déduit le rapport indiqué plus haut entre les fonctions ψ et les coefficients binomiaux. Je ferai encore remarquer que dans le développement de la $(2m)^{ième}$ puissance de $\log(1+y)$, si p est un nombre premier plus grand que $2m+1$, le coefficient de y^p réduit à sa plus simple expression contient toujours un multiple de p à son numérateur.

La vraie forme des racines de l'équation

$$x^p = 1,$$

ne que l'on n'a donnée nulle part jusqu'ici, est la suite :

On peut, comme on sait, former facilement ces racines moyen des fonctions F (α) et par de simples additions. est un facteur de $p - 1$ et si

$$\alpha^\lambda = 1,$$

t aussi connu que $[F(\alpha)]^\lambda$ n'est fonction que de α. s on n'a besoin de connaître que les valeurs de F (α), r lesquelles λ est une puissance d'un nombre premier. par exemple $\lambda\lambda'\lambda''$ un facteur de $p - 1$; supposons $\lambda, \lambda', \lambda''$ soient des puissances de nombres premiers érents et $\alpha, \alpha', \alpha''$ des racines primitives de l'unité des és $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc.; on aura

$$F(\alpha\alpha'\alpha''\ldots) = \frac{F(\alpha)F(\alpha')F(\alpha'')\ldots}{\psi(\alpha, \alpha', \alpha''\ldots)},$$

, α', α''...) étant une fonction rationnelle de α, α', .., à coefficients entiers. Si donc on regarde la racine $- 1)^{ième}$ de l'unité comme connue, l'expression de x ontiendra que des radicaux dont les exposants seront puissances de nombres premiers, ou des produits de radicaux. Si

$$\lambda = \mu^n,$$

ant un nombre premier, on trouve les fonctions F (α) a manière suivante. Posons

$$F(\alpha)F(\alpha^i) = \psi_i(\alpha)F(\alpha^{i+1}),$$

endra

$$F(\alpha) = \sqrt[\mu]{\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha)\ldots\psi_{\mu-1}(\alpha)F(\alpha^\mu)},$$

$$F(\alpha^\mu) = \sqrt[\mu]{\psi_1(\alpha^\mu)\psi_2(\alpha^\mu)\ldots\psi_{\mu-1}(\alpha^\mu)F(\alpha^{2\mu})},$$

. . . .



et enfin

$$F\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)$$

$$= \sqrt[n]{\psi_1\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)\psi_2\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)\ldots\psi_{\mu-2}\left(\alpha^{\mu^{n-1}}\right)(-1)^{\frac{p-1}{n}}p}.$$

Les $\mu - 1$ fonctions ψ ne déterminent pas seulement toutes les quantités placées sous les signes radicaux, mais encore la dépendance mutuelle des valeurs des radicaux. Si l'on remplace α par ses différentes puissances, on peut, au moyen des valeurs ainsi obtenues, exprimer rationnellement $F(\alpha^i)$ par les puissances de $F(\alpha)$, puisque tous les $\mu^n - 1$ quotients $\frac{[F(\alpha)]^i}{F(\alpha^i)}$ s'expriment toujours par un produit de plusieurs des $\mu - 1$ fonctions $\psi(\alpha)$. C'est en cela que consiste un des plus grands avantages de la méthode proposée sur celle de Gauss ; dans cette dernière méthode, la recherche de la dépendance des différentes valeurs des radicaux exige un travail tout spécial, d'une pratique très-pénible à cause de sa difficulté, même pour de petits nombres premiers ; par l'introduction des fonctions ψ, on obtient, au contraire, en même temps, et les quantités placées sous les signes radicaux, et les relations qui lient entre elles les valeurs de ces radicaux. On forme les fonctions ψ par un algorithme très-simple ; il exige seulement l'emploi d'une Table donnant les solutions des congruences de la forme

$$g^{m'} \equiv 1 + g^m \pmod{p}.$$

En suivant ces règles, un de mes auditeurs (*) a dans

(*) A cette occasion, le même géomètre (Rosenhain) a démontré ce remarquable théorème : Si α désigne une racine cubique et γ une racine cinquième de l'unité ; si, de plus, p désigne un nombre de la forme $30n + 1$ et si l'on pose

$$24 \equiv g^m \pmod{p},$$

émoire couronné par l'Académie de Berlin donné la
ution complète des équations de la forme $x^p = 1$
tous les nombres premiers jusqu'à 103.

des théorèmes les plus féconds dans la théorie des
ores est le suivant. Soient m, m', m'', etc., des nom-
positifs et plus petits que $p-1$; désignons par m_i,
m''_i, les plus petits restes positifs que l'on obtient
ivisant im, im', im'', etc., par $p-1$. Faisons de

$$m_i + m'_i + m''_i + \ldots = n_i(p-1) + s_i,$$

est positif et plus petit que $p-1$. Si r est le plus
des nombres n_1, n_2,..., n_{p-1} et si l'on pose

$$F(r^{-m}).F(r^{-m'})\ldots = \chi(r)\,F(r^{-s}),$$

les coefficients de $\chi(r)$ seront des nombres entiers
ibles par p^r et non divisibles par une puissance plus
e de p; si l'on pose en outre

$$\chi(r) = p^r \chi'(r),$$

ura

$$\chi'(g) \equiv \pm \frac{\Pi(s)}{\Pi(m)\,\Pi(m')\,\Pi(m'')} \pmod{p}.$$

pplication de cette proposition donne des théorèmes
culiers, dont j'ai donné il y a longtemps dans le
nal de Crelle un spécimen concernant le nombre des
es quadratiques réduites des diviseurs de la forme

---

a

$$F(\alpha)F(-\gamma) = \alpha^m \frac{A + B\sqrt{-3}}{2} F(-\alpha\gamma),$$

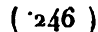
on où l'on a

$$A \equiv -2,\quad B \equiv 0 \pmod{5}$$

$$4p = A^2 + 3B^2.$$

(*Jacobi.*)





$y^2 + pz^2$, p étant un nombre premier de la forme $4n + 3$ (*). Quand j'aurai donné à ces théorèmes la généralité dont ils paraissent susceptibles, j'aurai l'honneur de les communiquer à l'Académie. Ils forment un lien entre les deux parties principales de la haute arithmétique, la division du cercle et la théorie des formes quadratiques.

J'ai fait l'application de la division du cercle à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques, et l'ai employé

(*) Un théorème analogue a lieu pour les nombres premiers de la forme $4n + 1$; le nombre des résidus quadratiques compris entre o et $\frac{1}{4}p$ donne alors le nombre des formes. (*Jacobi.*)

Le théorème dont Jacobi fait ici mention est ainsi conçu : Tout diviseur quadratique de la forme

$$y^2 + pz^2$$

peut se mettre sous la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

ou

$$p = 4ac - b^2,$$

si b est impair, et

$$p = ac - \frac{b^2}{4},$$

si b est pair. On peut faire en sorte que b soit plus petit que a et c. Les formes ainsi obtenues sont alors des formes réduites, et le nombre des classes des diviseurs quadratiques est le même que celui de ces formes réduites. Choisissons ces formes réduites en sorte que, si n est pair, b soit impair et réciproquement. Soit N le nombre de ces formes, P la somme des résidus quadratiques de p, Q la somme des non-résidus, on aura

$$2N - 1 = \frac{Q - P}{A}.$$

On peut conclure de là que l'on a toujours

$$Q > P,$$

si

$$p = 4n + 3,$$

résultat aussi obtenu par M. Dirichlet dans son Mémoire sur les progressions arithmétiques. (*Note du Traducteur.*)

beaucoup de simplicité et de facilité à la démons-
n du beau théorème donné par Gauss dans son
ème Mémoire sur les résidus biquadratiques; il n'en
fait connaître jusqu'à présent la démonstration,
désigne comme un *mysterium maxime reconditum*,
y était parvenu vraisemblablement par un chemin
ifférent (*). La loi de réciprocité pour les résidus
ues est de la plus grande simplicité, et la démons-
n découle immédiatement des formules connues de
ision du cercle.

ent

$$\frac{L + M\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{L' + M'\sqrt{-3}}{2}$$

nombres complexes premiers (M et M' sont divisi-
ar 3 et peuvent être zéro); désignons par

$$\left[\frac{x + y\sqrt{-3}}{\frac{1}{2}(L + M\sqrt{-3})}\right]$$

les quantités

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

t congrue à la puissance

$$(x + y\sqrt{-3})^{\frac{\frac{1}{4}(L^2 + 3M^2) - 1}{3}}$$

it le module $L + M\sqrt{-3}$, on aura

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(L' + M'\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L + M\sqrt{-3})}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}(L + M\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L' + M'\sqrt{-3})}\right).$$

---

e théorème concerne la réciprocité biquadratique entre deux nom-
emiers complexes $a + b\sqrt{-1}$ et $c + d\sqrt{-1}$. M. Dirichlet a démon-

Les démonstrations de ces théorèmes ont pu être communiquées sans difficulté à mes auditeurs dans mes leçons de l'hiver dernier (*).

Quand on cherche au moyen de la loi de réciprocité de Legendre à reconnaître si un nombre premier est résidu quadratique ou non-résidu d'un autre, on est obligé de décomposer en facteurs premiers chacun des restes obtenus et de traiter chacun d'eux en particulier. Gauss a apporté à la théorie des résidus quadratiques un perfectionnement essentiel en ramenant par un théorème spécial cette recherche au développement d'une fraction en fraction continue, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer aucune décomposition en facteurs. J'ai complété de même la théorie des résidus cubiques et biquadratiques; c'était une généralisation qui s'offrait d'elle-même. Pour montrer en particulier en quoi consiste cette généralisation pour les résidus quadratiques, soit p un nombre impair quelconque égal à f, f', f'', etc., où f, f', f'', etc., sont des nombres premiers égaux ou différents; j'étends de la manière suivante le sens de la belle notation employée

---

tré le premier théorème de Gauss relatif à la réciprocité quadratique de ces nombres.

(*) Ces démonstrations, connues déjà des professeurs Dirichlet et Kummer, ont été récemment publiées par le Dr Eisenstein dans le XXVIIe volume du *Journal* de Crelle, page 289, et dans le XXVIIIe, page 53. La démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques donnés par le même géomètre à la page 41 du XXVIIIe volume est la même que celle que j'ai communiquée à Legendre en 1827, et qu'il a insérée dans la troisième édition de sa *Théorie des nombres*. Les théorèmes donnés ci-dessus sur les formes quadratiques font maintenant partie d'une grande théorie fondée par Dirichlet. (*Jacobi*, octobre 1845.)

La démonstration de la loi de réciprocité de Legendre dont parle ici Jacobi est aussi identique avec celle qu'a donnée M. Cauchy en 1829 dans le *Bulletin* de Férussac avant la publication de la troisième édition de la *Théorie des nombres*. M. Serret a introduit la démonstration de Jacobi dans la deuxième édition de son *Algèbre supérieure*.

(*Note du Traducteur.*)

Legendre. Si x est un nombre premier, $\left(\frac{x}{p}\right)$ désigne
roduit

$$\left(\frac{x}{f}\right)\left(\frac{x}{f'}\right)\left(\frac{x}{f''}\right)\cdots$$

nt p et p' deux nombres impairs premiers entre eux
un au moins soit positif; on a, comme pour les nom-
premiers,

$$\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}}\left(\frac{p}{p'}\right),$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

formules donnent la valeur de $\left(\frac{p'}{p}\right)$ au moyen du dé-
ppement ordinaire de $\frac{p'}{p}$ en fraction continue par
règle simple et essentiellement différente de celle de
ss. La détermination de $\left(\frac{p'}{p}\right)$ exige seulement que
recherche si p et p' sont réellement premiers entre
comme on l'a supposé. Ceci s'applique aussi aux ré-
s biquadratiques et cubiques pour lesquels j'ai intro-
une notation semblable. L'emploi du symbole général
fournit dans la pratique de grandes facilités.

uant aux résidus du huitième et du cinquième degré,
exigent des principes tout à fait nouveaux, j'en ai
poussé l'étude assez avant; aussitôt que j'aurai amené
i de réciprocité qui les concerne à la perfection dé-
ble, je les communiquerai à l'Académie. Une de mes
nières applications de la division du cercle concerne
ésolution du problème de Pell par les fonctions cir-



culaires (*). J'extrais d'un Cours rédigé sous mes yeux par le professeur au gymnase de Dantzig, Czawalina, d'après des leçons que j'ai faites il y a plusieurs années, les théorèmes suivants :

Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$; désignons par a ses résidus quadratiques inférieurs à $\frac{1}{2}p$ et positifs, on aura

$$\sqrt{p(\sqrt{p}.y+x)} = 2^{\frac{p+1}{2}} \Pi \sin^2 \frac{a\Pi}{p},$$

x et y étant des solutions de l'équation

$$x^2 - py^2 = -4,$$

et le signe Π désignant un produit s'étendant à toutes les valeurs de a. Soit q un nombre premier de la forme $8n+3$; désignons par a ses résidus quadratiques, il viendra

$$x + y\sqrt{q} = \sqrt{2}\,\Pi \sin\left(\frac{a\Pi}{q} + \frac{\Pi}{4}\right),$$

x et y étant des solutions de l'équation

$$x^2 - qy^2 = -2.$$

Soient q et q' deux nombres premiers de la forme $4n+3$; supposons en outre q résidu quadratique de q' ; désignons respectivement par a et a' les résidus quadratiques positifs de q et de q', on aura

$$+2^{\frac{q-1}{2}.\frac{q'-1}{2}} \Pi \sin\left(\frac{a\Pi}{q} + \frac{a'\Pi}{q'}\right) = \sqrt{q}.x + \sqrt{q'}.y,$$

(*) Ce problème consiste dans la résolution de l'équation indéterminée

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Euler (*Algèbre*, tome II) en attribue une solution à Pell.

(*Note du Traducteur.*)

r satisfaisant à l'équation

$$qx^2 - q'y^2 = 4.$$

et y ne sont pas pairs, en cubant les équations

$$x^2 - py^2 = -4 \quad \text{et} \quad qx^2 - q'y^2 = 4,$$

otiendra la solution des équations

$$u^2 - pv^2 = -1,$$
$$qu^2 - q'v^2 = +1.$$

ote du Traducteur (*). On peut consulter sur cette ie les *Recherches arithmétiques* de Gauss, septième on; les Mémoires sur la théorie des nombres, publiés M. Cauchy dans les *Mémoires de l'Institut,* tome X; rents articles du même géomètre dans les *Comptes us,* et le Mémoire de M. Kummer sur les nombres lexes (*Journal* de M. Liouville, tome XVI).

Lebesgue a donné dans le même journal des démons- ons de quelques-unes des propositions contenues le présent Mémoire de Jacobi. M. Cauchy a aussi é dans le *Bulletin* de Férussac (septembre 1829) un né de ses recherches sur cette partie de la théorie des ores; on y trouve notamment indiquée l'application théorie des résidus de tous les degrés. Ce résumé se ine ainsi :

J'observerai, en finissant, qu'ayant donné à M. Ja- bi communication de mes formules, j'ai appris de t habile géomètre qu'il était parvenu de son côté, et s'appuyant sur les mêmes principes, à des résultats même genre. Il a donné quelques-uns de ses résul- s, mais sans indiquer la méthode qui les avait four- s, dans le tome II du *Journal* de Crelle. »

Le Traducteur, profond investigateur en géométrie et en analyse, e un esprit d'abstraction excessivement rare chez des jeunes gens. saurait trop encourager les travaux de ces hommes d'avenir. Tm



On peut encore consulter les *Recherches sur la théorie des nombres* publiées par M. Libri dans le tome IX du *Journal* de Crelle, et depuis réimprimées dans les *Mémoires de l'Institut.*

NOTE SUR L'AIRE DU TRIANGLE RECTILIGNE ET L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE COMPARÉES.

Les cercles inscrits dans le triangle rectiligne et dans le triangle sphérique divisent chacun les trois côtés en six segments égaux deux à deux; dans le triangle rectiligne, multipliant pour chaque cercle la somme des segments inégaux par le produit de ces segments, on obtient le carré de l'aire du triangle; dans le triangle sphérique, multipliant pour chaque cercle le sinus verse de la somme des trois segments inégaux par le produit des sinus verses de ces trois segments, on obtient un produit égal au carré du produit du sinus verse de l'excès sphérique par les sinus verses des trois côtés. TM.

Remarque. Le raisonnement qu'on lit dans la note de la page 279 n'est qu'une tautologie.

Si a et b sont premiers entre eux, $a+mb$, $a+(m+1)b$ seront aussi premiers entre eux. Si l'on prend $a+mb=a'$ pour premier terme et $a'+b'$ pour second terme, on voit que l'hypothèse est celle-ci : Dans toute progression arithmétique au delà d'un terme quelconque, on peut trouver un nombre premier. C'est dire que dans toute progression arithmétique où le premier terme et la raison sont premiers entre eux, il y a une infinité de nombres premiers. C'est précisément ce qu'il faut démontrer. Nous y reviendrons. (LEBESGUE.)

QUESTIONS.

. Soient AB, A′B′, A″B″, etc., un système de for-
équilibre dans un plan. A, A′, A″, etc., sont les
d'application; AB, A′B′, etc., représentent les
tés et les directions des forces; par un point quel-
e M du plan soient menées aux droites AB, A′B′,
etc., des droites ME, ME′, ME″, etc., sous un
constant α: de telle sorte qu'en faisant tourner
ces droites ME′ autour de M jusqu'à ce qu'elle
de avec ME, alors A′B′ devienne parallèle à AB,
a somme des produits AB.EA + A′B′.E′A′ + A″B″.
etc., est constante quelle que soit la position du
M et la grandeur de l'angle α, et selon que cette
est positive, nulle ou négative, l'équilibre est
, permanent ou instable. (Möbius.)

. ABC est un triangle inscrit dans le triangle *abc*,
ur *bc*, B sur *ac*, C sur *ab*; trois courbes sont don-
ans le même plan; AB touche une courbe en γ,
iche la deuxième courbe en β, et BC la troisième
en α; on a, pour toute position du triangle ABC,

$$\frac{A\gamma.B\alpha.C\beta}{A\beta.B\gamma.C\alpha}=\frac{aC.bA.cB}{aB.bC.cA}$$

ontrer par des considérations de statique.

(Möbius.)

. Si p et $4p+1$ sont deux nombres premiers ab-
2 est racine primitive relativement au nombre
1. (Tchebychef.) (*)

(*) ...oncé par l'éminent arithmologue dans un ouvrage sur les con-
publié en langue russe à Saint-Pétersbourg. In-8 de 279 pages.

THEORÈME DE LEGENDRE ET DE M. P. SERRET SUR LE TRIANGLE SPHÉRIQUE,

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

En rendant compte de l'excellent ouvrage de M. Paul Serret, M. Prouhet appelle l'attention sur le théorème suivant :

Si les côtés a, b, c *d'un triangle sphérique sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, on peut substituer à sa résolution celle d'un triangle rectiligne auxiliaire ayant pour l'un de ses côtés* a *et pour angles* A, B — E, C — E (2E *étant l'excès sphérique*); *et les deux autres côtés de ce triangle ne différeront des côtés correspondants du triangle sphérique que par des infiniment petits du second ordre.*

Cette proposition peut-elle, comme l'affirme l'auteur des *Méthodes en Géométrie*, « être employée aux *mêmes* usages que le théorème *analogue* de Legendre? »

Le théorème de M. Serret et celui de Legendre fournissent l'un et l'autre un triangle rectiligne qu'on peut, dans certains cas, substituer au triangle sphérique; voilà l'analogie. Mais Legendre ne néglige que les quantités du quatrième ordre, tandis que M. Serret néglige celles du second; voilà la différence : elle est assez essentielle pour que les deux théorèmes ne puissent pas se prêter aux mêmes usages.

Bien plus, lorsqu'on se borne au second ordre, le triangle de M. Serret est trop particulier.

Considérons, en effet, un triangle sphérique ABC

les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la
e.

pposons d'abord que ce triangle soit rectangle en A,
struisons avec les éléments a, B, C un triangle rec-
e A′B′C′. Les différences

$$A - A', \quad b - b', \quad c - c'$$

du second ordre, car on a

$$A - A' = \frac{\pi}{2} - (\pi - B - C) = 2E;$$

$$\sin\frac{b}{R} = \sin\frac{a}{R}\sin B,$$

$$\frac{b}{R}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2}\right) = \frac{a}{R}\left(1 - \frac{a^2}{6R^2}\right)\sin B,$$

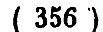
$$b = \frac{1 - \frac{a^2}{6R^2}}{1 - \frac{b^2}{6R^2}}\, a\sin B = b'\left(1 + \frac{b^2 - a^2}{6R^2}\right),$$

b' au second ordre près;

Même calcul pour $c - c'$.

éléments du triangle rectiligne A′B′C′ ne diffèrent
qu'au second ordre des éléments correspondants du
gle sphérique rectangle ABC. Or, si dans le triangle
igne A′B′C′ on laisse deux éléments fixes et qu'on
varier un troisième élément de quantités du second
, les autres éléments ne varieront que de quantités
t ordre; on pourra donc se procurer une infinité de
gles rectilignes dont les éléments ne diffèrent qu'au
d ordre de ceux du triangle sphérique rectangle

enons maintenant un triangle sphérique obliquangle
; menons la hauteur AD et formons deux triangles



rectangles adjacents $A'B'D'$, $A'C'D'$ composés des éléments

$$A'D' = AD, \quad A'B' = AB, \quad A'C' = AC,$$
$$B'A'D' = BAD, \quad C'A'D' = CAD.$$

L'angle $B'D'C'$ ne diffère de π qu'au second ordre, puisque, d'après le théorème précédent, chacun des angles en D' est égal à $\frac{\pi}{2}$, aux quantités du second ordre près. Donc $B'C'$ ne diffère de $B'D' + D'C'$ qu'au second ordre; et comme, d'après le théorème précédent, les côtés $B'D'$ et $D'C'$ sont égaux à BD et à DC, aux quantités du second ordre près, $B'C'$ ne diffère qu'au second ordre de BC.

D'ailleurs, les angles $C'B'D'$, $B'C'D'$ étant du second ordre, les angles $A'B'D'$, $A'C'D'$ sont égaux à B et à C, à des quantités du second ordre près.

Ainsi le triangle rectiligne $A'B'C'$ possède, aux quantités du second ordre près, les mêmes éléments que le triangle sphérique ABC. Il suffira donc de laisser fixes deux éléments de ce triangle rectiligne et de faire varier un troisième élément de quantités du second ordre, pour *obtenir une infinité de triangles rectilignes dont les éléments ne diffèrent qu'au second ordre des éléments correspondants du triangle sphérique* ABC.

GEOMÉTRIE DE L'ESPACE.

DÉRATIONS SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE.

THÉORÈME I. *Si l'on connaît*

$$\frac{)(m+2)(m+3)-(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{1.2.3}-1$$

es de trois valeurs qui satisfont en même temps x équations dont l'une s'élève au degré m *et l'autre gré* n (m *n'est pas inférieur à* n), *on en déduira nfinité de pareils groupes sans avoir recours à ces ions* (Plucker, *Nouvelles Annales*, tome VII, 66).

ÉORÈME II. *Soit*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_n = 0$$

stème de n *équations homogènes littérales entre inconnues* $x_1, x_2, \ldots x_n$; F_1 *est du degré* p_1, F_2 *du* p_2, F_n *du degré* p_n. *Faisons*

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_n = P;$$

minant les inconnues, on parvient à une équation gène entre les coefficients. Les coefficients de F_1 *ent dans chaque terme au degré* $\frac{P}{p_1}$, *les coefficients au degré* $\frac{P}{p_2}$, *etc., conséquemment le degré de ation est*

$$P\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right)$$

(Cayley, *Nouvelles Annales*, tome XII, page 396).

Observation. Cette propriété a même lieu pour des équations non homogènes, car on les rendra telles en remplaçant x, y, z, etc., par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$, etc.; cela ne change pas les coefficients.

2. Une ligne algébrique est donnée par l'intersection de deux surfaces algébriques; le degré de la ligne est égal au produit des degrés des deux surfaces : ainsi une courbe n'est pas connue en énonçant seulement son degré, il faut encore énoncer les deux facteurs dont le produit donne ce degré. Représentons par S_m une surface de degré m; alors une courbe du vingt-quatrième degré peut résulter des intersections de ces couples de surfaces S_1 et S_{24}, S_2 et S_{12}, S_3 et S_8, S_4 et S_6, et le nombre de points qui déterminent cette courbe sera différent, selon qu'elle est le résultat de l'intersection de l'un ou de l'autre des quatre systèmes de couples.

3. Théorème III. *Une ligne de degré* mn *donnée par l'intersection des surfaces* S_m, S_n *est déterminée par un nombre de points donné par l'expression*

$$\frac{3mn(m-n+4)+(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

où m *n'est pas inférieur à* n.

Démonstration. S_m et S_n sont données respectivement par des équations de degré m et n entre les coordonnées x, y, z. Soit

$$N=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-(m+1-n)(m+2-n)(m+3-n)-6}{6}.$$

Lorsque N groupes de valeurs simultanées de x, y, z satisfont aux deux équations, on en déduit une infinité

res groupes y satisfaisant également (théorème I); i veut dire géométriquement : si les surfaces S_m, S_n I points en commun, elles ont encore une infinité res points en commun et la ligne d'intersection est minée; or l'expression N étant développée se réduit orme indiquée. Donc, etc.

rollaire. Si $m = n$,

$$N = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 2.$$

Exemples. 1°. $n = 1$, la courbe est plane et l'on nt

$$N = \frac{m(m+3)}{2}.$$

$n = 2$,

$$N = m(m+2).$$

$n = 3$,

$$N = \frac{3m(m+1)}{2}.$$

Prenons d'abord les lignes dont le degré n'est pas ombre premier.

ient

$mn = 4,\quad n = 1,\quad m = 4,\quad N = 14,$
$\qquad\qquad n = 2,\quad m = 2,\quad N = 8;$

$mn = 6,\quad n = 1,\quad m = 6,\quad N = 27,$
$\qquad\qquad n = 2,\quad m = 3,\quad N = 15;$

$mn = 8,\quad n = 1,\quad m = 8,\quad N = 44,$
$\qquad\qquad n = 2,\quad m = 4,\quad N = 24;$

$mn = 10,\quad n = 1,\quad m = 10,\quad N = 65,$
$\qquad\qquad n = 2,\quad m = 5,\quad N = 35;$



$$mn = 12, \quad n = 1, \quad m = 12, \quad N = 90,$$
$$n = 2, \quad m = 6, \quad N = 48,$$
$$n = 3, \quad m = 4, \quad N = 24;$$
$$mn = 16, \quad n = 1, \quad m = 16, \quad N = 152,$$
$$n = 2, \quad m = 8, \quad N = 80,$$
$$n = 4, \quad m = 4, \quad N = 42.$$

6. Lorsque le degré de la ligne est un nombre premier p, il est évident que, lorsque cette ligne est sur une surface de degré p, elle est nécessairement plane, car

$$mn = p,$$

on a nécessairement

$$m = p, \quad n = 1;$$

mais cette ligne devient gauche pour l'intersection de deux surfaces réglées ayant un élément rectiligne commun. Soit, par exemple, $p = 3$; l'intersection de deux surfaces réglées du second degré ayant une droite commune est une ligne gauche du troisième degré. Soit encore $p = 5$; l'intersection d'une surface réglée du second degré avec une surface réglée du troisième degré et ayant une droite en commun donne encore en commun une ligne gauche du cinquième degré.

7. Quand on dit qu'une ligne est déterminée par un certain nombre de points, il s'agit de points pris au hasard; mais lorsque ces points ont une certaine position, il peut y avoir indétermination. Par exemple, une courbe plane du troisième degré est déterminée par neuf points; mais lorsque ces points sont les intersections de deux de ces courbes, on peut y faire passer une infinité de lignes du troisième ordre: il en est de même pour les courbes gauches. Ainsi une ligne gauche du quatrième ordre est

rminée par huit points. Mais lorsque ces huit points les intersections de trois surfaces du second ordre, st évident qu'en prenant ces surfaces deux à deux, il e trois courbes du quatrième ordre par ces huit points; même pour les lignes de tout ordre.

. Faisant

$$mn = p,$$

$$6N = 3p\left(\frac{p}{n} - n + 4\right) + (n-1)(n-2)(n-3);$$

nt croître n par unités, on obtient successivement

$$6N' = 3p\left(\frac{p}{n+1} - n + 3\right) + n(n-1)(n-2),$$

$$6N'' = 3p\left(\frac{p}{n+2} - n + 2\right) + (n+1)(n-1)(n-2),$$

....

$$-N') = 3p\left[\frac{p}{n(n+1)} + 1\right] - 3(n-1)(n-2);$$

est plus grand que $(n-1)(n-2)$; donc $N > N'$; émontre de même que $N' > N''$, etc. Ainsi à mesure n croît, les valeurs de N diminuent; plus n s'approche de m, plus le nombre de points déterminants diue.

ar exemple, soit

$$p = 60;$$

ura pour

	Points déterminants.
1.60........	1890
2.30........	960
3.20........	660
4.15........	391
5.12........	214
6.10.... ...	130



9. Toutes les courbes de degré mn, quoique déterminées par des nombres divers de points, ont en commun la propriété d'être rencontrées par un plan en mn points.

10. Théorème IV. *L'enveloppe des plans osculateurs d'une courbe à double courbure donnée par l'intersection de deux surfaces* S_m, S_n *est représentée par une équation de degré* $mn(m+n-2)$.

Démonstration. Cette enveloppe est le lieu des tangentes. Soient

$$F=0, \quad f=0$$

les équations rendues homogènes des surfaces de degrés respectifs m, n dont l'intersection donne les courbes, et x_1, y_1, z_1, u_1 les coordonnées d'un point de la courbe; soient encore

$$S=0$$

l'équation du plan tangent à la surface F et passant par le point $(x_1 y_1 z_1 u_1)$; et

$$s=0$$

l'équation du plan tangent à la surface f passant par le même point : alors

$$S=0, \quad s=0$$

seront les équations de la tangente à la courbe passant par ce même point; $F=0$, $f=0$ ne contiennent que les coordonnées fixes x_1, y_1, z_1, u_1 et aux degrés m et n; $S=0$, $s=0$ contiennent les mêmes coordonnées fixes aux degrés $m-1$, $n-1$ et encore les coordonnées constantes au premier degré x, y, z, u. Eliminant les coordonnées x_1, y_1, z_1, u_1 entre les quatre équations homogènes, en considérant x, y, z, u comme des coefficients

rès le théorème II, le degré de l'équation finale est

$$m-1)(n-1)\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1}\right)=mn(m+n-2).$$

n'a pas besoin d'avoir égard aux coefficients des équa-
s

$$F=0, \quad f=0,$$

ce sont des constantes.

. Pour qu'on puisse mener d'un point donné une
ente à la courbe $F=0, f=0$, ou, ce qui revient au
ne, un plan tangent à la surface enveloppe, il faut
le point soit situé sur la surface enveloppe que nous
ns de considérer. Le point étant donc pris sur cette
ace, les coordonnées des points de contact qui satis-
à trois des quatre équations

$$F=0, \quad f=0, \quad S=0, \quad s=0$$

font à la quatrième. Si donc m n'est pas inférieur à
plus grand nombre de points de contact sera donné
e système d'équations

$$F=0, \quad f=0, \quad S=0.$$

i $mn\,(m-1)$ est le nombre de tangentes qu'on peut
er par le point donné; c'est la *classe* de la courbe
S_n).

bservation. Cette expression a même lieu lorsque la
be est plane; alors

$$n=1,$$

$n\,(m-1)$ devient $m\,(m-1)$.

2. *Définition.* L'enveloppe des plans normaux à la
be se nomme *surface polaire de la courbe.*

HÉORÈME V. *Le degré de l'équation de la surface*



polaire relative à la courbe (S_m, S_n) *est*

$$mn(3m + 3n - 4).$$

Démonstration. On trouve l'équation de cette surface en éliminant x_1, y_1, z_1, coordonnées du point de la courbe entre les quatre équations

$$F = 0, \quad f = 0,$$
$$(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1 = 0,$$
$$(x - x_1)\,d^2x_1 + (y - y_1)\,d^2y_1 + (z - z_1)\,d^2z_1 - ds'_1 = 0\,(^*).$$

La deuxième équation est de degré $m + n - 1$ et la troisième de degré $2m + 2n - 3$; donc, d'après le théorème II, les x, y, z montent au degré

$$mn(m + n - 1)(2m + 2n - 3)\left(\frac{1}{m + n - 1} + \frac{1}{2m + 2n - 1}\right)$$
$$= mn(3m + 3n) - 4.$$

13. Le plan passant par la tangente au point x_1, y_1, z_1 et par la perpendiculaire élevée en ce point au plan osculateur nommé axe du plan osculateur a pour équation

$$(A)\left\{\begin{aligned} &(x - x_1)[dy_1(dx_1\,d^2y_1 - dy_1\,d^2x_1) - dz_1(dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1)] \\ &+ (y - y_1)[dz_1(dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1) - dx_1(dz_1\,d^2x_1 - dx_1\,d^2z_1)] \\ &+ (z - z_1)[dx_1(dz_1\,d^2x_1 - dx_1\,d^2z_1) - dy_1(dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1)] \end{aligned}\right.$$

le degré en x_1, y_1, z_1 se monte à $3m + 3n - 5$.

L'enveloppe de ce plan a une équation de degré

$$3mn(2m + 2n - 3).$$

14. Le degré de la surface réglée formée par les normales principales est

$$2mn(2m + 2n - 3);$$

tel est aussi le degré de la surface réglée formée par les

(*) Duhamel, t. Ier, p. 398.

pendiculaires au plan osculateur passant par le point y_1, z_1.

5. *Application.* $m = n = 2$.

Degré du plan osculateur..	8
Plan normal...........	32
Plan (A)...............	60
Normale principale.......	40
Axes du plan osculateur...	40

6. La courbe formée par les centres de courbure est née par l'intersection des deux surfaces réglées fors par les plans osculateurs et les plans normaux, aces dont les degrés sont

$$mn(m+n-2) \quad \text{et} \quad mn(3m+3n-4).$$

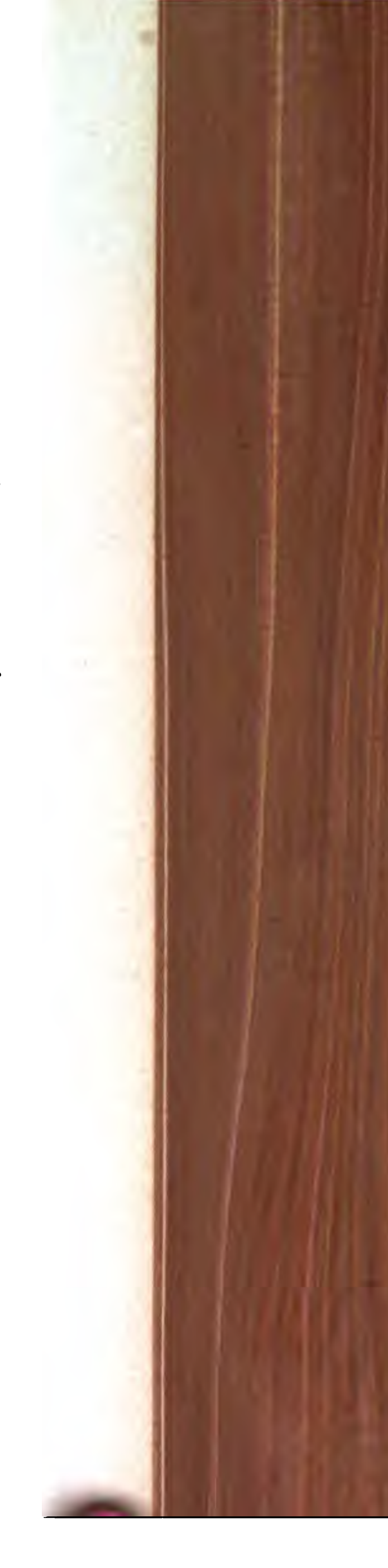
e courbe n'est pas l'arête de rebroussement de la sur polaire; cette arête est sur cette surface et sur celle l'on obtient en éliminant x_1, y_1, z_1 entre les quatre ations

$$F=0, \quad f=0,$$

$$(x-x_1)\,dx_1+(y-y_1)\,dy_1+(z-z_1)\,dz_1=0,$$

$$(x-x_1)\,d^2x_1+(y-y_1)\,d^2y_1+(z-z_1)\,d^2z_1=0,$$

ui donne une surface de degré $mn(5m+5n-8)$.



THÉORÈME SUR UNE PROPRIÉTÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie (*).

Lemme. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n racines supposées inégales de l'équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

En posant

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_r),$$
$$\varphi(x) = (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \ldots (x - x_n),$$

on a

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)}, \quad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{\psi(x)} - f(x)\frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)};$$

de la dernière desquelles on déduit, vu que

$$f(x_{r+1}) = 0, \ldots,$$

$$\varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2}) \ldots \varphi'(x_n) = \frac{f'(x_{r+1})f'(x_{r+2}) \ldots f'(x_n)}{\psi(x_{r+1})\psi(x_{r+2}) \ldots \psi(x_n)}.$$

Or on a évidemment

$$\psi'(x_1)\psi'(x_2) \ldots \psi'(x_r)\psi(x_{r+1})\psi(x_{r+2}) \ldots \psi(x_n)$$
$$= (-1)^{r(n-r)} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_r);$$

par conséquent

$$\varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2}) \ldots \varphi'(x_n)$$
$$= (-1)^{r(n-r)} \frac{f'(x_{r+1})f'(x_{r+2}) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)f'(x_2) \ldots f(x_r)} \psi'(x_1)\psi'(x_2) \ldots \psi'(x_r);$$

(*) Nous engageons le lecteur à prendre un exemple particulier, par exemple $r = 2$, $n = 5$.

rce que, en indiquant par D, Δ, ∇ les produits res-
fs des carrés des différences des racines des équations

$$f(x)=0, \quad \varphi(x)=0, \quad \psi(x)=0,$$

, comme on sait,

$$\pm D = f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n),$$
$$\pm \Delta = \varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2})\ldots \varphi'(x_n),$$
$$\pm \nabla = \psi'(x_1)\psi'(x_2)\ldots \psi'(x_r)$$

quantités D, Δ, ∇ étant prises avec le signe positif
ue les nombres n, $n-r$, r seront $\equiv 0$ ou $\equiv 1$
l. 4), et avec le signe négatif dans les autres cas);
ıra

$$\pm\Delta) = (-1)^{r(n-r)} \frac{(\pm \nabla)}{f'^2(x_1)f'^2(x_2)\ldots f'^2(x_r)}(\pm D).$$

pposons

$$r = n-2,$$

ıra

$$\pm \Delta = -(x_{n-1}-x_n)^2,$$

quantités D, ∇ devront être prises avec des signes
aires. Donc

$$(x_{n-1}-x_n)^2 = \frac{\nabla}{f'^2(x_1)f'^2(x_2)\ldots f'^2(x_{n-2})}\cdot D;$$

$$x_{n-1}+x_n = -(a_1 + x_1' + x_2 + \ldots + x_{n-2}),$$

onséquent

$$\left\{\begin{aligned} x_{n-1} &= -\frac{1}{2}(a_1 + x_1 + \ldots + x_{n-2}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-2})}\sqrt{D} \\ x_n &= -\frac{1}{2}(a_1 + x_1 + \ldots + x_{n-2}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f(x_{n-2})}\sqrt{D}. \end{aligned}\right.$$

Or D peut s'exprimer en fonction des coefficients de l'équation donnée, et $\frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-2})}$ est une fonction rationnelle des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, vu que ∇ est un carré ; on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. *Deux racines quelconques d'une équation algébrique du n^ième^ degré peuvent être exprimées en fonction rationnelle des autres* n — 2.

Observation. Indiquant par

$$\theta(x_1, x_2, \ldots x_{n-2})$$

le second membre de la première des équations (1), on trouve facilement que cette fonction n'a que deux valeurs (Serret, *Algèbre supérieure,* p. 275). Ces deux valeurs sont celles des deux racines x_{n-1}, x_n.

Pour l'équation du troisième degré, en posant (*Alg. sup.*, p. 218)

$$x_2 = -\frac{1}{2}(a_1 + x_1) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{D}}{f'(x_1)} = \theta(x_1),$$

on trouve

$$x_3 = \theta(x_2), \quad x_1 = \theta(x_3),$$

c'est-à-dire x étant une racine quelconque : les trois racines seront

$$x, \; \theta(x), \; \theta^2(x).$$

Pour l'équation du quatrième degré, en posant

$$-\frac{1}{2}(a_1 + x_r + x_s) + \frac{1}{2}\frac{x_r - x_s}{f'(x_r)f'(x_s)}\sqrt{D} = \theta(x_r, x_s),$$

on a

$$x_r = \theta(x_r, x_s) = \theta(x_s, x_u) = \theta(x_u, x_r).$$

De ces propriétés des racines, on déduit que ces équations sont résolubles algébriquement.

Note. Incessamment une démonstration fort simple de ce théorème par M. A. Genocchi.

ROBLÈME SUR CINQ CONIQUES ET CINQ DROITES ANHARMONIQUEMENT CORRESPONDANTES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

stion. On donne sur un plan : 1° trois points a, 2° cinq autres points d, e, f, g, h. Déterminer un x tel, que les cinq coniques circonscrites au quare $abcx$ et passant respectivement par les cinq d, e, f, g, h correspondent anharmoniquement à sceau de cinq droites données.

ution. Soit P le sommet du faisceau de cinq droites e, Pf, Pg, Ph qui est homographique à celui des roites données. Ce point, comme on sait, est unise détermine aisément par l'intersection de deux ies qui ont trois points communs connus à priori.

sulte du théorème général de M. Chasles sur la conon de la courbe du troisième ordre que les dix a, b, c, x, d, e, f, g, h, P sont situés sur une courbe du troisième ordre U, qui se trouve déter par les seuls neuf points connus ; sans qu'on ait de faire intervenir le point cherché x.

ayon Pd correspond anharmoniquement à la co($abcxd$) qu'il rencontre au point d et en un autre d'. Ce point d', appartenant aussi à la courbe du me ordre, se déterminera aisément en n'employant ligne droite et le cercle, puisque les deux autres de rencontre du rayon Pd avec la courbe, savoir , sont déjà connus. La conique ($abcxdd'$) est donc ement déterminée. On cherchera pareillement le point de rencontre e' du rayon Pe avec la conique

($abcxe$) qui lui correspond anharmoniquement, et cette conique, dont on connaît déjà quatre points, sera déterminée.

Cela posé, les deux coniques ($abcxdd'$) et ($abcxee'$) ont trois points communs a, b, c; on en conclura donc immédiatement le quatrième x qui satisfait à la question.

Ainsi le problème est résolu.

PROBLÈME SUR LES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PROBLÈME. *Construire géométriquement la courbe du quatrième ordre qui passe par quatorze points donnés en supposant que huit de ces points soient situés sur une même conique.*

Soient a, b, c, d, e, f, g, h les huit points donnés sur une conique C, et i, k, l, m, n, o les six autres points. Il s'agit de faire passer par ces quatorze points une courbe du quatrième ordre W.

Je désignerai, pour abréger, par B l'ensemble des quatre points a, b, c, d, et par B″ celui des quatre points e, f, g, h, de telle sorte que (B, l) signifiera la conique déterminée par les cinq points a, b, c, d, l, et ainsi des autres.

La conique (B″, i) coupera la courbe du quatrième ordre W en trois autres points inconnus x, y, z. Je désignerai par B′ l'ensemble des quatre points i, x, y, z dont le point i est seul connu.

Considérons les deux faisceaux de coniques (B, B″), (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), (B, o) et (B′, B″), (B′, k), (B′, l), (B′, m), (B′, n), (B′, o).

Ces courbes se correspondent deux à deux anharmo-

iement, parce qu'une conique du premier faisceau, que (B, k) et celle (B′, k) qui lui correspond dans le xième, passent ensemble par un même point k de la rbe W. Ceci résulte d'un théorème général démontré M. Chasles dans les *Comptes rendus*, tome **XXXVII**, ıce du 15 septembre 1853 (*voir* la *Note du Rédac-*, p. 372).

ela posé, soit P le sommet d'un faisceau de cinq tes Pk, Pl, Pm, Pn, Po correspondant anharmoniment aux coniques (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), o) (point qu'on sait construire sans difficulté), et soit le rayon qui, dans le faisceau de droites, correspond conique donnée (B, B″) qui fait partie du faisceau de iques. Enfin, appelons a' et B′ les deux points d'interion de ce rayon avec la conique (B″, i) ou (B′, B″).

es six droites Pa', Pk, Pl, Pm, Pn, Po correspont aussi harmoniquement avec les six coniques (B′, B″), k), (B′, l), (B′, m), (B′, n), (B′, o), puisque cellesorrespondent anharmoniquement, comme je viens de ire, aux six coniques (B, B″), (B, k), (B, l), m), (B, n), (B, o).

onc les neuf points i, a', b', k, l, m, n, o, P déterent une courbe du troisième ordre qui, en vertu du orème fondamental de M. Chasles sur la description es courbes (*Comptes rendus*, 1853), passe aussi par rois autres points x, y, z communs à toutes les conis du faisceau (B′, B″), (B′, k), etc.

ette courbe du troisième ordre U et la conique B″) ont trois points communs déjà connus, savoir: ′, et b'; il s'agit de trouver les trois autres x, y.

our cela, joignons par une droite les deux points k et ar exemple, et soit q le troisième point de rencontre a droite kl avec la courbe U, point facile à détermi-

ner sans tracer la courbe. Puis regardons l'ensemble de cette droite et de la conique (B', B'') comme formant une courbe du troisième ordre U'.

Les courbes U et U' ont six points communs déjà connus, savoir i, a', b', k, l, q; leurs trois autres points d'intersection sont précisément les points cherchés x, y, z.

La question est ainsi ramenée à celle où il s'agit de trouver les trois autres points d'intersection de deux courbes du troisième ordre qui ont six points communs connus à priori, question résolue très-simplement par M. Chasles dans les *Comptes rendus* de 1855, séance du 31 décembre, et par moi-même dans l'ouvrage intitulé : *Mélanges de Géométrie pure*, p. 193.

Dès que ces trois points x, y, z seront connus, la construction de la courbe W s'achèvera sans difficulté. Car toute conique circonscrite arbitrairement au quadrilatère *abcd* déterminera celle qui lui correspond anharmoniquement dans le faisceau circonscrit au quadrilatère *ixyz*. Les quatre points d'intersection de ces deux coniques homologues appartiendront à la courbe W, dont on construira ainsi autant de points qu'on voudra.

Ainsi le problème est résolu.

Note du Rédacteur. M. de Jonquières s'appuie sur un théorème de M. Chasles que nous croyons utile de citer textuellement.

THÉORÈME GÉNÉRAL. *Si l'on a deux faisceaux de coniques dont les unes passent par quatre points* a, b, c, d *et les autres par quatre points* a', b', c', d', *et que ces courbes se correspondent deux à deux de manière que le rapport anharmonique de quatre courbes du premier faisceau soit égal à celui de quatre courbes correspondantes dans le deuxième faisceau, le lieu de tous les points d'intersection des coniques correspondants sera*

courbe du quatrième ordre passant par les huit *ts* a, b, c, d, a', b', c', d (*Comptes rendus*, XXVII, 1853, 2e semestre, p. 273).

oient

$$r=0,\quad s=0,\quad u=0,\quad v=0$$

quations de quatre côtés d'un quadrilatère ;

$$r_1=0,\quad s_1=0,\quad u_1=0,\quad v_1=0$$

équations des quatre côtés d'un second quadrilatère : aisceaux de coniques passant respectivement par les nets des quadrilatères ont pour équations

$$\alpha rs + uv = 0,$$
$$\alpha r_1 s_1 + u_1 v_1 = 0.$$

paramètre variable α étant le même, les faisceaux se espondent anharmoniquement. Donc, éliminant α,

$$rsu_1 v_1 + r_1 s_1 uv = 0,$$

le lieu cherché du quatrième ordre et passant par les sommets des quadrilatères.

NOTE

aire d'un polygone plan et sur l'expression de cette aire en fonction des coordonnées des sommets ;

PAR M. E. PROUHET.

n définit ordinairement l'aire d'une figure plane en it que c'est *la portion de plan limitée par son con-*. Mais cette définition n'offre plus de sens raisone lorsque ce contour, fermé d'ailleurs, présente des

points doubles, comme cela a lieu dans les polygones étoilés. Il est cependant possible d'étendre la notion de superficie de manière à la rendre applicable à tous les cas.

2. Soient A_1, A_2,..., A_n les n sommets consécutifs d'un polygone, soit PM un rayon vecteur dont l'extrémité P, que nous nommerons le *pôle*, demeure fixe pendant que l'autre extrémité M se meut sur le périmètre dans un sens déterminé, A_1, A_2,..., A_n par exemple. Le rayon vecteur étant d'abord en PA_1 et venant ensuite en PA_2, nous dirons qu'il a engendré ou décrit le triangle PA_1A_2, de sorte que le point M, revenu à sa position initiale après avoir parcouru tout le contour, aura décrit n triangles.

Or les sinuosités du contour pouvant faire que PM tourne tantôt dans un sens que nous nommerons *direct*, tantôt dans le sens opposé, il sera naturel de considérer comme *positives* les aires décrites dans le premier sens, et comme *négatives* celles qui sont décrites dans le mouvement rétrograde. Cette convention est déjà faite en mécanique et son introduction en géométrie offre de grands avantages, comme le montrera la suite de cet article.

3. D'après cela, si le polygone est convexe et le pôle P pris dans son intérieur, tous les triangles seront décrits dans le même sens et leur somme algébrique se réduira, suivant les cas, à $\pm$ l'aire du polygone, le mot *aire* étant pris encore dans son acception ordinaire.

Si le pôle est extérieur, tous les triangles ayant quelque portion de leur surface dans l'intérieur du polygone auront le même signe, tous ceux qui sont entièrement situés hors du polygone auront le signe opposé, et il est visible que la somme algébrique des triangles de première et de seconde espèce sera encore égale à $\pm$ la surface du polygone.

4. Ces résultats conduisent naturellement à la défi-

on qu'il convient d'adopter et qui est la suivante:
l'aire d'un polygone plan est la somme algébrique triangles engendrés par un rayon vecteur dont l'ex-ité fixe est placée en un point quelconque du plan et l'autre parcourt le périmètre du polygone dans ens déterminé.

outefois, pour justifier complétement cet énoncé, il démontrer que l'expression ainsi définie demeure la e en grandeur et en signe pour un même sens de ro-n, quel que soit le pôle. C'est ce que l'analyse suivante ra hors de doute.

Considérons, en premier lieu, un triangle PA_1A_2 l'un des sommets, pris pour pôle, soit à l'origine oordonnées rectangulaires. Désignons par x_1, y_1 les lonnées du point A_1 et par x_2, y_2 celles du point A_2. supposant d'abord que le triangle soit tout entier l'angle YOX, et que l'on ait $x_1y_2 > y_1x_2$, on trou-sans peine pour l'aire absolue

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

onséquent, si l'on désigne $x_1y_2 - x_2y_1$ par $[1, 2]$ en énonçant un triangle, on marque par l'ordre des s le sens dans lequel le côté A_1A_2 est parcouru, on

$$PA_1A_2 = \frac{1}{2}[1, 2],$$

résulte

$$PA_2A_1 = -PA_1A_2 = -\frac{1}{2}[1, 2],$$

ar conséquent,

$$PA_2A_1 = \frac{1}{2}[2, 1],$$

puisque

$$[2, 1] = -[1, 2].$$

On voit par là qu'en écrivant dans les crochets les indices dans le même ordre que dans le premier membre, le second membre prend de lui-même le signe convenable.

6. Maintenant, si l'on suppose que les axes primitifs tournent d'un angle α, le second membre conservera la même valeur, comme on s'en assurera sans peine en mettant à la place des nouvelles coordonnées leurs valeurs en fonction des anciennes, d'où résulte que la formule démontrée pour une position particulière des axes est vraie pour une position quelconque.

7. Considérons actuellement un polygone A_1, A_2, A_3,..., A_n. Des rayons vecteurs étant menés à tous les sommets, on aura

$$PA_1A_2 = \frac{1}{2}[1, 2],$$

$$PA_2A_3 = \frac{1}{2}[2, 3],$$

. . . .

$$PA_{n-1}A_n = \frac{1}{2}[n-1, n],$$

$$PA_nA_1 = \frac{1}{2}[n, 1],$$

d'où

$$PA_1A_2 + PA_2A_3 + PA_3A_4 + \ldots + PA_nA_1$$
$$= \frac{1}{2}[1, 2] + \frac{1}{2}[2, 3] + \ldots + \frac{1}{2}[n, 1].$$

Le premier membre (en ayant égard aux rotations indiquées par l'ordre des lettres) est ce que nous nommons l'aire du polygone relative au sens A_1, A_2,..., A_n. On a donc en désignant l'aire par S,

$$S = \frac{1}{2}\sum[1, 2].$$

lle est donc l'expression de l'aire dans le cas le plus
al possible. Le second membre, que nous savons
être indépendant de la direction des axes, est, en
, indépendant de leur origine, comme on s'en as-
en transportant cette origine en un point quelcon-
Les dénominations adoptées plus haut se trouvent
complétement justifiées.

La formule que nous venons de démontrer exige seu-
nt que le polygone soit fermé. Les côtés peuvent
eurs se couper d'une manière quelconque, plusieurs
nets peuvent se réunir en un seul sans que la formule
d'être applicable, pourvu que le périmètre puisse
onsidéré comme un fil non interrompu qui, partant
int A_1 et passant successivement par les points A_2,
tc., finit par revenir au point de départ.

près cela, un polygone de n sommets pourra être
déré comme ayant $2n$, $3n$,..., kn côtés. Il suffira
ncevoir que le fil revenu en A_1 recommence à passer,
ns le même ordre, par les points A_2, A_3, etc., et cela
ombre quelconque de fois, pourvu qu'il finisse par
ter au point de départ.

L'emploi des signes + et — pour distinguer les
engendrées par des rotations directes ou inverses
avoir l'utilité de ces sortes de conventions qui est
unir dans un même énoncé un nombre souvent con-
able de théorèmes du même genre. En voici quelques
ples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

B, C, etc., désignant des points distribués comme
oudra dans un plan et ABC l'aire du triangle dont
mmets sont A, B, C, on aura :

ur cinq points :

$$\text{ACE.ABD} = \text{ABE.ACD} + \text{ABC.ADE}.$$

(Théorème de Fontaine.)

$$(ABCDE)^2 - (ABC + BCD + CDE + DEA + EAB).ABCD\ldots$$
$$+ ABC.BCD + BCD.CDE + CDE.DEA$$
$$+ DEA.EAB + EAB.ABC = 0.$$

(Théorème de Gauss.)

Pour sept points :

$$ABE.ACF.ADG = ABE.ACD.AFG + ABC.ADE.AFG$$
$$+ ACF.ADE.ABG + ACD.AEF.ABG$$
$$+ ADG.ABC.AEF.$$

(Théorème nouveau.)

Il suffira de démontrer ces égalités dans le cas fo… étendu où le polygone ayant pour sommets les points co… sidérés est convexe. Démontrées pour ce cas, elles devro… se réduire à de véritables identités quand on y substitue… les valeurs des aires en fonction des coordonnées, et d… lors elles auront lieu quelle que soit la disposition d… points considérés.

SOLUTION DE LA QUESTION SUR UN JEU DE CARTES

(voir t. XIV, p. 168);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN.

Réponse. Soit t le plus petit nombre entier qui satis… fasse à l'inégalité

$$\frac{m}{n^{t-1}} \leqq 1,$$

ce nombre t sera le nombre demandé.

Solution. Après la première distribution, la carte dé… signée pourra occuper un rang quelconque dans le paquet…

lle se trouve; mais après la seconde distribution, les es provenant des q paquets situés au-dessous ou au-us du paquet r_1 occuperont les l_2 premières et les l_2 ières places de chaque paquet, l_2 étant égal à la par-ntière de la fraction $\frac{q.m}{n}$, c'est-à-dire

$$l_2 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n}\right).$$

i le rang s_2 occupé par la carte désignée dans le pa- r_2 sera compris entre les deux nombres

$$l_2 \quad \text{et} \quad m - l_2 + 1.$$

énéralement, désignons par l_t le nombre des cartes se trouvent au-dessus et au-dessous de la carte dési- après t distributions dans le paquet r_t. On aura évi-ment

$$l_{t+1} = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_t}{n}\right);$$

rang s_{t+1} qu'elle occupera dans le paquet r_{t+1} sera pris entre les deux nombres l_{t+1} et $m - l_{t+1} + 1$.
formule (2) donnera successivement

$$l_3 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_2}{n}\right), \quad l_4 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + l_3}{n}\right), \ldots$$

si l'on observe que la partie entière du quotient e division ne change pas quand on remplace le divi-e par un nombre qui n'en diffère en plus que d'une ntité plus petite que l'unité, on aura

$$l_3 = \mathrm{E}\left(\frac{q.m + \frac{qm}{n}}{n}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^2} \cdot \frac{n^2 - 1}{n - 1}\right),$$

$$l_4 = \mathrm{E}\left[\frac{q.m + \frac{q.m(n^2 - 1)}{n^2(n - 1)}}{n}\right] = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^3} \cdot \frac{n^3 - 1}{n - 1}\right),$$

et généralement

$$l_t = \mathrm{E}\left(\frac{q.m}{n^{t-1}} \cdot \frac{n^{t-1}-1}{n-1}\right);$$

or le rang s_t étant compris entre les deux nombres l_t et $m - l_t + 1$, si l'on veut qu'il soit égal à $p+1$, il faut et il suffit que l'on ait $l_t = p$; car alors on aura

$$m - l_t + 1 = p + 2,$$

et le nombre entier s_t compris entre p et $p+2$ ne pourra être que le nombre $p+1$.

Le nombre t devra donc satisfaire à l'inégalité

$$0 \leqq \frac{q.m}{n^{t-1}} \cdot \frac{n^{t-1}-1}{n-1} - p < 1.$$

En remplaçant $n-1$ par $2q$, p par $\frac{m-1}{2}$, et réduisant, cette inégalité peut se mettre sous la forme suivante :

$$0 \leqq \frac{1 - \frac{m}{n^{t-1}}}{2} < 1.$$

D'ailleurs il est évident que cette inégalité est équivalente à la suivante

(3) $$\frac{m}{n^{t-1}} \leqq 1.$$

Le nombre demandé t est donc le plus petit nombre entier qui satisfasse à la formule (3). C. Q. F. D.

TRISECTION DE L'ANGLE;

PAR M. POUDRA.

. Chasles, dans son Cours à la Sorbonne, a donné solution fort élégante de l'ancien problème de la ction de l'angle.

it l'arc ab pris sur un cercle dont le centre est o. porté sur cet arc, de a vers b, un arc quelconque am, b vers a un arc $bm_1 = 2.am$. Prenons sur la circon- ce un point fixe c quelconque et menons les droites cm_1. Il est évident qu'il en résultera l'angle

$$aom = bcm_1.$$

diverses positions du point m sur la circonférence, résultera autant de points m_1 correspondants, et, suite, à chaque rayon om correspondra une autre e cm_1 telle, que les angles aom, bcm_1 seront tou- égaux; donc les points o et c seront les centres de faisceaux homographiques tels, que les rayons ho- gues se couperont en des points n dont le lieu géo- ique sera, par conséquent, une section conique cou- la circonférence au point α, tiers de l'arc ab.

peut ajouter quelques détails à cette solution.

enons pour le point C celui qui est diamétralement sé au point b. En construisant la courbe des points n, a facile de voir que:

. Le côté ao de l'angle est une tangente à la courbe;

. Une parallèle à ao menée par c est une seconde ente;

. Il en résulte que co est un diamètre et le point C, eu de co, sera le centre;

4°. La droite ca est une parallèle à une asymptote;

5°. Une perpendiculaire en c à cette droite ca est une parallèle à l'autre asymptote;

6°. Les droites Cx, Cy menées par le centre, parallèlement à ces droites, seront les asymptotes;

7°. Les bissectrices CA, CB des asymptotes seront les axes de la courbe;

8°. Cette courbe est une hyperbole équilatère dont on connaît de suite le centre et les axes, etc.;

9°. Cette courbe coupe la circonférence en quatre points dont l'un est celui c connu, les trois autres seront α_1, α_2, α_3 qui seront tels, que $a\alpha_1 = \frac{1}{3}$ de l'angle aob; $a\alpha_2$ sera le tiers d'une circonférence plus aob, et enfin $a\alpha_3$ sera le tiers de l'angle $360° - aob$.

Puisqu'on connaît de suite le centre et les axes de l'hyperbole équilatère qui résout le problème de la trisection de l'angle, on peut employer toutes les méthodes connues pour tracer cette courbe, sans avoir besoin de recourir à la construction des deux faisceaux ci-dessus.

Note du Rédacteur.

1°. *Compas trisecteur.* M. Répécaud, colonel du génie en retraite, a inventé cet instrument. Il est fondé sur ce principe. Soit l'arc ABC moindre que 180 degrés et O le centre. Si le rayon OB coupe la corde AC en un point E tel que l'on ait

$$AE = AB,$$

alors

$$\text{arc } AB = \frac{1}{3} \text{ arc } AC.$$

Si l'on prolonge le rayon BO jusqu'à ce qu'il coupe de nouveau la circonférence en D, on aura aussi

$$DE = DC;$$

il est facile de trouver un tel point D à l'aide d'un com-

dont une branche passe constamment par C et dont ête se meut sur la circonférence jusqu'à ce que la ition DE = DC soit satisfaite : les deux branches ant des divisions égales, cette égalité se vérifie à vue. ipposons que le point B soit quelconque. Portons la e AB sur la corde AC, de A en E, et menons BE; la endiculaire abaissée du centre *c* sur la corde AC renre BE en un point I; il serait curieux de connaître le de ce point I; lorsqu'il coïncide avec C, il sert à opéa trisection.

. M. le docteur Toscani, professeur de physique au de Sienne (Toscane), fonde la trisection sur le lieu nétrique d'un *podaire* du cercle. Soit C le centre et n point fixe, extrémité de l'arc à trisecter. Prolons le rayon OV d'une longueur VP = OV; projetons int P sur toutes les tangentes au cercle; T étant le de contact et P′ la projection correspondante de P, u'on aura

$$VP' = VT,$$

$$\text{angle } VP'P = \frac{1}{3} \text{angle } CVP'.$$

QUESTIONS.

4. Un point fixe O est donné dans un angle plan du net A; par O on mène une transversale rencontrant ôtés de l'angle en B et C; s et s_1 étant les aires des gles OBA, OCA, la somme $\frac{1}{s}+\frac{1}{s_1}$ est constante, de que manière qu'on mène la transversale. (MANNHEIM.)

5. $f(x) = 0$ est une équation algébrique à coeffis *entiers*; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, ation n'a aucune racine *entière*. (GAUSS.)

DEUX PROBLÈMES SUR LES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ;

PAR M. POUDRA.

PROBLÈME I. Une surface du second degré étant donnée par neuf points, on demande de lui mener : 1° un plan tangent par un de ces points; 2° par une droite extérieure.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les neuf points donnés. On veut avoir le plan tangent à la surface au point 9.

On détermine d'abord la courbe gauche du quatrième degré qui passe par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Par 9, on fait passer deux plans qui coupent cette courbe chacun en quatre points, lesquels avec le point 9 déterminent deux sections coniques. Le plan passant par les deux tangentes au point 9 à ces deux coniques sera le plan cherché.

Remarque. Il n'est pas nécessaire de tracer les deux coniques. Car soient m, n, p, q et 9 les cinq points qui déterminent une de ces coniques. On sait que la tangente en 9 à cette conique, plus les trois droites $9n$, $9p$, $9q$, forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre droites $m9$, mn, mp, mq. Donc, etc.

Pour mener à la surface du deuxième degré un plan tangent par une droite extérieure L, il faut prendre sur cette droite deux points a et b; par la droite $a9$ mener trois plans sécants qui détermineront trois coniques, à chacune desquelles par a on mènera deux tangentes; on déterminera ainsi six points de tangence qui appartiendront ainsi à la section conique, courbe de contact de

ace du deuxième degré et du cône circonscrit dont e sommet. On déterminerait de même la courbe de t d'un autre cône circonscrit dont b serait le som- Ces deux sections coniques se couperont en deux Les plans passant par la droite L et ces deux seront les plans tangents cherchés.

BLÈME II. Deux surfaces du deuxième degré étant es par 9 points, on demande de déterminer leur une intersection.

nt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les neuf points de la ère et 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', 9' ceux de la se- surface. On commence par déterminer dans chacune surfaces la courbe du quatrième ordre qui passe par t points 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', is par la droite 99' qui joint les points restants, on sser une suite de plans sécants; chacun d'eux dé- e dans les surfaces deux sections coniques dans me plan, qui se coupent généralement en quatre appartenant à la courbe cherchée qui sera ainsi mment du quatrième ordre. Donc, etc.

---

les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 on peut faire $\frac{8.7}{2} = 28$ hyperboloïdes ayant la même courbe rsection.

r déterminer cette courbe, on fait passer un hyper- e par la droite (1, 2) et par les six points restants 5, 6, 7, 8, puis un second par la droite (7.8) et s six autres points 1, 2, 3, 4, 5, 6. On peut ainsi re $\frac{8.7}{2} = 28$ droites différentes qui, prises chacune forment avec les six points restants un hyperboloïde.

Donc ce nombre est de 28. Remarquons que chacun de ces hyperboloïdes contient deux des points donnés *sur une même génératrice.*

DISCUSSION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES (Suite d'une première Note)

(voir page 322).

Dans la discussion de l'équation du second degré à trois variables, nous avons admis l'existence d'un centre unique; on a vu comment la nature de la surface se détermine, alors, au moyen des signes des invariants

$$AA' - B''^2,\quad AA'' - B'^2,\quad A'A'' - B^2,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

Quand il n'y a pas de centre, la valeur de

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

est nulle, mais, dans ce cas, les signes des valeurs de $AA' - B''^2$, $AA'' - B'^2$, $A'A'' - B^2$ font immédiatement savoir de quel genre est la surface considérée.

En effet, dans le cas dont il s'agit, l'équation proposée ne peut représenter que l'un des deux paraboloïdes ou un cylindre parabolique.

Si la surface est un paraboloïde hyperbolique, il faut que parmi les trois sections par les trois plans coordonnés il y en ait au moins une du genre des hyperboles, puisque les trois plans coordonnés ne peuvent être à la fois parallèles à l'axe de la surface. Donc, parmi les trois différences $AA' - B''^2$, $AA'' - B'^2$, $A'A'' - B^2$ il y en aura

oins une dont la valeur sera négative. Cette condi-est d'ailleurs suffisante pour que l'équation proposée ésente un paraboloïde hyperbolique, car l'autre pa-loïde et le cylindre parabolique ne peuvent donner à une section du genre des hyperboles.

la surface est un paraboloïde elliptique, l'une des ons par les plans coordonnés sera une ellipse réelle naginaire; par conséquent, l'un des binômes $AA' - B''^2$, $- B'^2$, $A'A'' - B^2$ sera positif. Et c'est là une con-n suffisante pour que l'équation proposée représente araboloïde elliptique.

fin, lorsque la surface est un cylindre parabolique, aleurs des expressions $AA' - B''^2$, $AA'' - B'^2$, $' - B^2$ sont nulles toutes trois.

us ne dirons rien du cas particulier où l'on trouve nfinité de centres, la discussion de l'équation ne , dans ce cas, offrir aucune difficulté. G.

QUESTIONS.

3. Dans le premier quadrant la somme des sinus nombre quelconque d'arcs, divisée par la somme des us de ces mêmes arcs, donne un quotient compris la tangente du plus grand de ces arcs et la tangente us petit de ces arcs.

7. Soit donnée l'équation

$$x^{2m+1} + ax^{2m-1} + bx^{2m-3} + \ldots + lx + k = 0$$

e renferme que des puissances impaires; il y a une

e réelle comprise entre $2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}}$ et $-2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}}$.

(TCHEBICHEF).

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL

II.

Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une napp[e] et du paraboloïde hyperbolique.

Hyperboloïde à une nappe. — Le centre de la surfa[ce] étant pris pour origine, l'équation sera de la forme

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = [0]$$

1. Quand l'une des trois différences

$$B''^2 - AA', \quad B'^2 - AA'', \quad B^2 - A'A''$$

est nulle, ou, ce qui revient au même, lorsqu'une d[es] trois sections par les plans coordonnés est du genre d[es] paraboles, on tire immédiatement de l'équation (1) d[e] la surface les équations de ses génératrices rectilignes.

Soit, par exemple,

$$B''^2 - AA' = 0,$$

on aura identiquement :

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 = \frac{(Ax + B''y)^2}{A},$$

et l'équation (1) deviendra

$$A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + \frac{(Ax + B''y)^2}{A} + F = 0,$$

d'où

$$Az(A''z + 2By + 2B'x) = -AF - (Ax + B''y)^2.$$

produit AF est nécessairement négatif, autrement
n $z = 0$ qui passe par le centre ne couperait pas la
ce, ce qui ne peut avoir lieu puisque cette surface
n hyperboloïde à une nappe. Donc

$$- AF - (Ax + B''y)^2$$

produit des facteurs *réels*

$$\sqrt{- AF} + Ax + B''y, \quad \sqrt{- AF} - Ax - B''y.$$

onséquent, en nommant α, β deux constantes arbi-
es, les équations des génératrices rectilignes seront,
l'un des deux systèmes :

$$Az = \alpha\left(\sqrt{- AF} + Ax + B''y\right),$$

$$'z + 2By + 2B'x = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{- AF} - Ax - B''y\right).$$

, pour l'autre :

$$Az = \beta\left(\sqrt{- AF} - Ax - B''y\right),$$

$$''z + 2By + 2B'x = \frac{1}{\beta}\left(\sqrt{- AF} + Ax + B''y\right).$$

mme exemple, considérons l'équation

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 2yz - xz + 4xy - 1 = 0.$$

isant

$$z = 0,$$

$$x^2 + 4y^2 + 4xy - 1 = 0$$

$$(x + 2y)^2 - 1 = 0,$$

ion qui représente le système de deux droites paral-

ur déterminer toutes les autres génératrices recti-
s de la surface, on remarquera que l'équation pro-

posée revient à

$$z^2 + 2yz - xz = 1 - (x + 2y)^2,$$

d'où

$$z(z + 2y - x) = (1 + x + 2y)(1 - x - 2y).$$

De sorte que les génératrices rectilignes de l'un des deu
systèmes seront représentées par

$$z = \alpha(1 + x + 2y),$$

$$z + 2y - x = \frac{1}{\alpha}(1 - x - 2y).$$

Pour les génératrices appartenant au second systèm
on aura

$$z = 6(1 - x - 2y),$$

$$z + 2y - x = \frac{1}{6}(1 + x + 2y).$$

2. Si aucune des trois différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA'$
$B^2 - A'A''$ n'est nulle, on pourra déterminer les équa
tions générales des génératrices rectilignes en transfor
mant l'équation (1) proposée, comme nous allons l'indi
quer.

Remarquons d'abord que cette équation revient à

$$(2) \qquad xf_x' + yf_y' + zf_z' + 2F = 0,$$

en posant

$$(3) \qquad f_x' = 2Ax + 2B''y + 2B'z,$$

$$(4) \qquad f_y' = 2B''x + 2A'y + 2Bz,$$

$$(5) \qquad f_z' = 2B'x + 2By + 2A'z.$$

Les dérivées f_x', f_y', f_z' peuvent être considérées comm
trois nouvelles variables liées aux anciennes x, y, z pa

lations (3), (4), (5), et il est clair que ces relations ettent d'obtenir l'équation de la surface en fonction ois quelconques des six variables $f'_x, f'_y, f'_z, x, y, z$; fit pour cela d'éliminer les trois autres entre les e équations (2),..., (5).

rmi les différentes formes que l'on peut ainsi donner uation de la surface, il en est une qui se prête facile- à la détermination des génératrices rectilignes parce e ne contient que les carrés des variables et un seul rois rectangles. Cette équation s'obtient en prenant variable une seule des trois anciennes coordonnées, exemple, et les dérivées f'_x, f'_y relatives aux deux s x, y.

s quantités à éliminer sont x, y, f'_z; l'élimination e pour résultat l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} A f_y'^2 - 2B'' f'_x f'_y + A' f_x'^2 + 4Dz^2 \\ \qquad + 4(AA' - B''^2)F = 0, \end{array}\right.$$

laquelle D représente l'invariant

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

à remarquer que cette équation se déduit, par une très-simple, de l'équation proposée

$$x^2 + 2B''xy + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + F = 0.$$

a partie $A f_y'^2 - 2B'' f'_x f'_y + A' f_x'^2$ qui renferme érivées f'_y, f'_x relatives à y et x s'obtient en rempla- x par f'_y et y par $-f'_x$ dans le trinôme

$$Ax^2 + 2B''^2 xy + A'y^2,$$

dans l'équation (1) proposée, représente l'assemblage ermes contenant seulement y et x. Le terme indépen- $4(AA' - B''^2)F$ se forme en multipliant le terme pendant des variables de l'équation proposée par le

quadruple de l'invariant $(AA' - B''^2)$ du même trinôme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2.$$

L'application de cette règle montre que la surface peut être aussi représentée par chacune des deux équations :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A''f_x'^2 - 2B'f_x'f_z' + Af_z'^2 + 4Dy^2 \\ \qquad + 4(AA'' - B'^2)F = 0, \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A''f_y'^2 - 2Bf_y'f_z' + A'f_z'^2 + 4Dx^2 \\ \qquad + 4(A'A'' - B^2)F = 0, \end{array} \right.$$

lorsque les invariants $AA'' - B'^2$, $A'A'' - B^2$ ne sont pas nuls.

3. Au moyen de l'une quelconque des équations transformées (7), (8), (9), il est facile d'obtenir les équations générales des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

En considérant, par exemple, l'équation (7), nous distinguerons deux cas, suivant que $B''^2 - AA'$ sera positif ou négatif.

1°. Supposons qu'on ait $B''^2 - AA' > 0$ et que les coefficients A, A' ne soient pas nuls.

Le trinôme $Af_y'^2 - 2B''f_x'f_y' + A'f_x'^2$ se décompose alors en deux facteurs réels du premier degré qui sont

$$Af_y' - (B'' + \sqrt{B''^2 - AA'})f_x'$$

et

$$\frac{Af_y' - (B'' - \sqrt{B''^2 - AA'})f_x'}{A}.$$

De plus D et $(AA' - B''^2)$ F ont des signes contraires, car autrement le plan

$$Af_y' - (B'' + \sqrt{B''^2 - AA'})f_x' = 0,$$

qui passe par le centre de l'hyperboloïde, couperait la sur-

e suivant une ligne imaginaire dont l'équation se-
t

$$4Dz^2 + 4(AA' - B''^2)F = 0.$$

Donc le binôme

$$4Dz^2 + 4(AA' - B''^2)F$$

aussi décomposable en deux facteurs réels du premier
gré. Si, pour fixer les idées, on suppose F positif, ces
teurs seront

$$4\left[z\sqrt{D} + \sqrt{(B''^2 - AA')F}\right]$$

$$\left[z\sqrt{D} - \sqrt{(B''^2 - AA')F}\right].$$

De là on peut conclure qu'en nommant α, $\mathit{6}$ deux con-
ntes arbitraires, les génératrices rectilignes auront
ur équations

$$\ldots' - (B'' - \sqrt{B''^2 - AA'})f_z' = 4\alpha\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} + z\sqrt{D}\right],$$

$$\frac{\ldots' - (B'' - \sqrt{B''^2 - AA'})f_z'}{A} = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} - z\sqrt{D}\right],$$

$$\ldots' - (B'' + \sqrt{B''^2 - AA'})f_z' = 4\mathit{6}\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} - z\sqrt{D}\right],$$

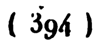
$$\frac{\ldots' - (B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}\,f_z'}{A} = \frac{1}{\mathit{6}}\left[\sqrt{(B''^2 - AA')F} + z\sqrt{D}\right].$$

Lorsque $A = 0$, l'équation (7) devient

$$A'f_z'^2 - 2B''f_z'f_y' + 4Dz^2 - 4B''^2F = 0,$$

, en supposant toujours F positif,

$$[A'f_z' \quad 2B''f_y'] = 4\left[B''\sqrt{F} + z\sqrt{D}\right]\left[B''\sqrt{F} - z\sqrt{D}\right];$$



on en tire immédiatement les équations des génératrices rectilignes.

2°. Lorsque $B''^2 - AA' < 0$, le trinôme

$$Af_y'^2 - 2B''f_z'f_y' + A'f_z'^2$$

n'est plus décomposable en facteurs réels du premier degré, mais on peut alors le remplacer par la somme des deux carrés

$$\frac{(Af_y' - B''f_z')^2}{A}, \quad \frac{(AA' - B''^2)f_z'^2}{A},$$

et l'équation (7) deviendra

$$(Af_y' - B''f_z')^2 + (AA' - B''^2)f_z'^2$$
$$+ 4ADz^2 + 4(AA' - B''^2)AF = 0.$$

Les deux premiers termes

$$(Af_y' - B''f_z')^2, \quad (AA' - B''^2)f_z'^2$$

sont évidemment positifs; quant aux deux derniers $4ADz^2, 4(AA' - B'')^2 AF$, ils doivent être négatifs puisque l'équation représente un hyperboloïde à une nappe (*). Il s'ensuit que chacune des deux expressions

$$(Af_y' - B''f_z')^2 + 4ADz^2$$

et

$$(AA' - B''^2)f_z'^2 + 4(AA' - B''^2)AF$$

est décomposable en deux facteurs réels du premier degré. Cette décomposition donne, comme on sait, les équations des génératrices rectilignes.

4. *Paraboloïde hyperbolique.* Nous supposerons main-

(*) Il faut que AF soit négatif pour que le plan $z = 0$ coupe l'hyperboloïde suivant une ligne réelle, et AD doit être négatif parce que l'hyperboloïde à une nappe est une surface illimitée dans tous les sens.

t que l'équation générale

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ \qquad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \end{array} \right.$$

sente un paraboloïde hyperbolique. Ainsi $D = 0$, plus l'une des trois sections de la surface par les des coordonnées étant nécessairement du genre bolique, l'une des trois différences $B''^2 - AA'$, AA'', $B^2 - A'A''$ sera positive. On aura, par le,

$$B''^2 - AA' > 0.$$

r déterminer dans ces deux conditions les généra- rectilignes de la surface que l'équation (1) repré- nous allons donner une autre forme à cette équa-

ons

$$2Cx + 2C'y + 2C''z + F = \varphi$$

ignons par F'_x, F'_y, F'_z les dérivées du polynôme gène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy.$$

ra

$$F'_x = 2A\,x + 2B''y + 2B'z,$$

$$F'_y = 2B''x + 2A'y + 2Bz,$$

$$F'_z = 2B'x + 2B\,y + 2A''z.$$

l'équation (1) pourra d'abord s'écrire ainsi :

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z + 2\varphi = 0.$$

entre les quatre équations (2), (3), (4), (5), on

élimine x, y, F'_z en ayant égard à la condition $D = 0$, i viendra

$$(6) \qquad AF'^2_y - 2B''F'_xF'_y + A'F'^2_x = 4(B''^2 - AA')\varphi.$$

Le premier membre de cette dernière équation se dé duit immédiatement du trinôme

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2$$

par l'application de la règle énoncée (n° 2, page 391); quant au second membre, on voit qu'il s'obtient en mul tipliant l'assemblage des termes du premier degré et d terme indépendant de l'équation proposée (1) par le qua druple de la différence $B''^2 - AA'$.

Cette différence étant positive, le trinôme

$$AF'^2_y - 2B''F'_xF'_y + A'F'^2_x$$

est décomposable en deux facteurs *réels* du premier de gré, qui sont, lorsque A n'est pas nul,

$$AF'_y - (B'' + \sqrt{B''^2 - AA'})F'_x$$

et

$$\frac{AF'_y - (B'' - \sqrt{B''^2 - AA'})F'_x}{A}.$$

Et, par conséquent, on a pour les équations des géné ratrices rectilignes :

$$AF'_y - (B'' + \sqrt{B''^2 - AA'})F'_x = \alpha\varphi,$$

$$\frac{AF'_y - (B'' - \sqrt{B''^2 - AA'})F'_x}{A} = \frac{4(B''^2 - AA')}{\alpha};$$

ou

$$F'_y - (B'' + \sqrt{B''^2 - AA'})F'_x = 6(B''^2 - AA'),$$

$$\frac{AF'_y - (B'' - \sqrt{B''^2 - AA'})F'_x}{A} = \frac{4\varphi}{6};$$

ésignant toujours par α et 6 deux constantes arbi-
es.

orsque

$$A = 0,$$

$$AF_y'^2 - 2B'' F_x' F_y' + A' F_x'^2 = F_x' [A' F_x' - 2B'' F_y']$$

$$4(B''^2 - AA')\varphi = 4B''^2\varphi.$$

génératrices rectilignes ont alors pour équations

$$F_x' = \alpha\varphi, \quad A' F_x' - 2B'' F_y' = \frac{4B''^2}{\alpha},$$

$$F_x' = 46B''^2, A' F_x' - 2B'' F_y' = \frac{\varphi}{6}.$$

Prenons pour exemple l'équation complète

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 + 4z^2 + 2yz + 6xz + 4xy \\ \quad + 8x - 4y - 2z + 1 = 0, \end{array} \right.$$

représente un paraboloïde hyperbolique.

intersection de la surface par le plan des xy est l'hy-
ole

$$x^2 - y^2 + 4xy + 8x - 4y + 1 = 0.$$

n a

$$A = 1, \quad A' = -1, \quad B'' = 2, \quad B''^2 - AA' = 5.$$

c, en nommant F_x', F_y' les dérivées par rapport à x
de l'assemblage des termes du second degré de l'é-
ion numérique proposée, cette équation pourra s'é-
e ainsi

$$F_y'^2 - 4F_x' F_y' - F_x'^2 = 20\,(8x - 4y - 2z + 1).$$

e trinôme

$$F_y'^2 - 4F_x' F_y' - F_x'^2$$

est le produit des facteurs réels

$$F'_y - (2 + \sqrt{5}) F'_z$$

et

$$F'_y - (2 - \sqrt{5}) F'_z :$$

par conséquent, les génératrices rectilignes de la surface ont pour équations

$$F'_y - (2 - \sqrt{5}) F'_z = \frac{20}{\alpha},$$

$$F'_y - (2 + \sqrt{5}) F'_z = \alpha (8x - 4y - 2z + 1);$$

ou

$$F'_y - (2 - \sqrt{5}) F'_z = 6 (8x - 4y - 2z + 1),$$

$$F'_y - (2 + \sqrt{5}) F'_z = \frac{20}{6}.$$

6. Considérons encore l'équation

$$4y^2 + z^2 + 4yz + 2xz + 4xy + x - y + 3z - 2 = 0,$$

qui se rapporte de même au paraboloïde hyperbolique.

En coupant la surface par le plan des xy on obtient l'hyperbole

$$4y^2 + 4xy + x - y - 2 = 0.$$

Les coefficients A, A', B″ ont pour valeurs 0, 4, 2; d'où

$$B''^2 - AA' = 4.$$

Donc l'équation proposée revient à

$$4F'^2_z - 4F'_z F'_y = 16 (x - y + 3z - 2)$$

ou

$$F'_z [F'_z - F'_y] = 4 (x - y + 3z - 2).$$

n conclura que les équations des génératrices recti-
s sont

$$F'_x = \alpha(x - y + 3z - 2), \quad F'_z - F'_y = \frac{4}{\alpha}$$

$$F'_x = 4\beta, \quad F'_z - F'_y = \frac{1}{\beta}(x - y + 3z - 2).$$

G.

DESCRIPTION DU CADRAN SOLAIRE DE DIJON;

PAR M. ALEXIS PERRET,
Professeur à la Faculté de Dijon (*).

---

cadran se compose :

De deux dalles rectangulaires *abcd*, *cdef* chacune
nètres de long, de 1 mètre de large et placées bout à
la ligne de contact *cd* a la direction est-ouest ; la
lienne est tracée au milieu par une ligne gravée. *ab*
côté sud et *ef* au côté nord ;

De vingt-quatre blocs distribués sur la circonfé-
d'une ellipse qui entoure les dalles et sur lesquels
gravées les heures en chiffres romains;

Enfin, de quatre blocs octogonaux placés en de-
les heures XII et VI marquant les points cardinaux
s initiales N, E, S, O. Ainsi entre N et E sont les
s I, II, III, etc., et entre E et S sont les heures
VIII, IX, etc.

douze signes du zodiaque sont gravés sur les dalles.
distances du milieu des lettres et des signes à la

---

e célèbre inventeur du système des marées souterraines. TM.

ligne inférieure *ab* sont pour

	m		m
J = Janvier . . .	0,10	D = Décembre .	0,25
F = Février . . .	0,60	N = Novembre.	0,85
M = Mars	1,40	O = Octobre . . .	1,70
A = Avril	2,30	S = Septembre.	2,60
M = Mai	3,15	A = Août	3,35
J = Juin	3,70	J = Juillet	3,85

pour les signes ♑ au bas, ♒ et ♐ $0^m,45$, ♓ et
$1^m,05$, ♈ et ♎ 2 mètres, ♉ et ♍ $2^m,90$, ♊ et ♌ 3^m,
♋ $3^m,90$.

Les signes équinoxiaux sont sur la ligne *cd*.

Quant aux blocs sur lesquels sont marquées les heures
dont les bords intérieurs sont sur une ellipse dont le dem
grand axe EO = $5^m,70$ et le demi-petit axe SN = $3^m,7$
leurs dimensions sont à peu près les mêmes. Le bord in
rieur varie de $0^m,50$ et $0^m,52$, le bord externe est de 0^m,
et les bords latéraux de $0^m,52$.

Ces blocs ne sont pas également espacés. En mesura
l'espace qui sépare deux sommets intérieurs voisins,
trouve pour la distance de

	m
XII à XI	0,90
XI à X	0,83
X à IX	0,76
IX à VIII	0,71
VIII à VII	0,60
VII à VI	0,60
VI à V	0,65
V à IV	0,60
IV à III	0,60
III à II	0,81
II à I	0,86
I à XII	0,90

utre côté n'est pas symétrique, car on trouve de XI, de XI à X, de X à IX, etc., les nombres , $0^m,87$, $0^m,68$, $0^m,66$, $0^m,61$, $0^m,62$, etc.

s observateurs placent une canne verticalement sur ridienne vis-à-vis la lettre initiale du mois dans le- on est. L'ombre de cette canne se projette sur re.

st bien entendu que ces dalles et ces blocs de pierre enfoncés dans le sol, qu'ils affleurent d'une manière ensible.

ant à l'historique de ce cadran, deux mots suffisent. été construit, il y a une trentaine d'années, sur le plein en face de la porte Guillaume, par M. Cau- , architecte. Ce terrain ayant été bouleversé vers pour y établir le château, le cadran fut enlevé; il a placé, il y a deux ans, à l'extrémité de la grande de notre belle promenade du Parc et sur le bord de ière d'Ouche.

RIE DU CADRAN SOLAIRE DE DIJON, SA GÉNÉRALISATION;

PAR M. PEAUCELLIER.

ncevons un cercle placé dans le plan de l'équateur e et une droite passant par son centre et dirigée sui- l'axe du monde. Il est visible que la position du So- un instant quelconque est déterminée par une droite nt par deux points : le premier situé sur l'axe du e et à une distance du centre égale au rayon mul- par la tangente de la déclinaison; le second situé circonférence à l'extrémité de l'arc qui répond à le horaire et compté à partir du méridien.

Si l'on perspective la figure précédente d'un point p
d'une manière quelconque dans l'espace, on voit q
l'ombre du style passant par ce point fixe et la perspe
tive du point de déclinaison, passe par celle du poi
horaire. S'il s'agit d'un plan comme surface du cadra
les points de déclinaison sont sur une droite, perspecti
du trigone; les points horaires ont pour lieu une secti
conique. On lira l'heure par l'intersection de cette cour
avec l'ombre d'un style passant par le point fixe et
point de déclinaison correspondant à l'époque de l'ann

Dans le cas particulier où le point précédent est suppo
à l'infini dans le sens vertical, la projection conique d
vient cylindrique et orthogonale si elle se fait sur
plan horizontal. C'est le cas du cadran de Dijon;
ligne horaire est une ellipse dont le demi-grand a
étant égal à A, le demi-petit axe est A sinL; L étant
latitude du lieu. Les points de déclinaison sont sur
petit axe dirigé suivant le méridien et distants du cen
d'une quantité égale à A tang D cosL, en appelant D
déclinaison. Enfin les abscisses des points horaires sit
sur l'ellipse sont représentées par A cosP, P désigna
l'angle horaire du Soleil.

On s'assure aisément que le coucher du Soleil répo
à une normale menée à l'ellipse par le point de déc
naison.

SUR UN THÉORÈME DES NOMBRES;

PAR M. LEBESGUE.

LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 144.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

PROBLÈME. *Dans un carré divisé en seize cases suivant la figure ci-jointe, inscrire seize nombres* A, B, C,... Q, *qui satisfassent aux conditions suivantes :*

1°. Que la somme des carrés des nombres soit égale dans chacune des quatre lignes horizontales, égale aussi dans chacune des quatre lignes verticales et dans les deux diagonales, ce qui fait dix conditions;

2°. Que la somme des produits deux à deux, tels que AE, BF, CG, DH, soit nulle à l'égard des deux premières horizontales, comme à l'égard de deux horizontales quelconques, et qu'il en soit de même à l'égard de deux lignes verticales, ce qui fait douze conditions.

On aurait donc en tout vingt-deux conditions à remplir et seize inconnues seulement. Cependant Euler remarque qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à ce problème et qu'il en possède la solution générale, et il a donné pour exemple le carré suivant :

68,	−29,	41,	−37,
−17,	31,	79,	32,
59,	28,	−23,	61,
−11,	77,	8,	49.

L'analyse de ce problème n'a pas été publiée et il est

fort à désirer qu'elle le soit, si on peut la trouver dans les manuscrits de l'auteur non encore imprimés, car on voit qu'il serait fort difficile de la restituer.

Note de Legendre. Ce problème se trouve dans la correspondance d'Euler avec Lagrange. (*Voir* les manuscrits de Lagrange déposés à la bibliothèque de l'Institut.)

Dans le tome Ier des *Comm. arith Collectæ,* p. 427, se trouve un Mémoire intitulé : ***Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*** (N. com. XV, 1770, p. 75, exhibuit 1775, Mart. 5).

Ce Mémoire renferme 16 pages in-folio. Voici la fin du Mémoire.

Solution du problème énoncé plus haut.

« Il y a ici vingt-deux conditions auxquelles il faut satisfaire. Laissant de côté celles qui concernent les diagonales, toutes les autres sont remplies par la formule générale suivante :

$$(A)\left\{\begin{array}{c|c|c|c}
+ap+bq+cr+ds & +ar-bs-cp+dq & -as-br+cq+dp & +aq-bp+cs-dr \\
-aq+bp+cs-dr & +as+br+cq+dp & +ar-bs+cp-dq & +ap+bq-cr-ds \\
+ar+bs-cp-dq & -ap+bq-cr+ds & +aq+bp+cs+dr & +as-br-cq+dp \\
-as+br-cq+dp & -aq-bp+cs+dr & -ap+bq+cr-ds & +ar+bs+cp+dq
\end{array}\right.$$

où la somme des carrés des nombres compris dans les colonnes, soit horizontales, soit verticales, est égale à

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2).$$

r que ces sommes soient égales à la somme des carrés
liagonales, il faut joindre ces deux équations

$$+ abpq + abrs + acpr + acqs$$
$$+ adps + adqr + bcqr + bcps$$
$$+ bdqs + bdpr + cdrs + cdpq = 0,$$
$$- abpq - abrs + acpr + acqs$$
$$- adps - adqr - bcqr - bcps$$
$$+ bdqs + bdpr - cdrs - cdpq = 0,$$

se tirent les deux suivantes :

$$(ac + bd)(pr + qs) = 0,$$
$$(ab + cd)(pq + rs) + (ad + bc)(ps + qr) = 0.$$

à deux déterminations qui laissent encore six lettres
traires

$$pr + qs = 0,$$
$$\frac{a}{c} = \frac{-d(pq + rs) - b(ps + qr)}{b(pq + rs) + d(ps + qr)}.$$

Développons un exemple en posant

$$p = 6, \quad q = 3, \quad r = 1, \quad s = -2.$$

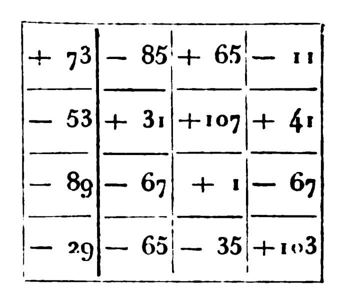
nme il vient

$$\frac{a}{c} = \frac{-16d + 9b}{16b - 9d},$$

nt

$$d = 0, \quad b = 1, \quad a = 9, \quad c = 16,$$

carré qui satisfait à toutes les conditions sera



+ 73	− 85	+ 65	− 11
− 53	+ 31	+ 107	+ 41
− 89	− 67	+ 1	− 67
− 29	− 65	− 35	+ 103



La somme des carrés en colonnes horizontales ou ve ticales est 16900, et si les nombres étoient divisés par 13 les sommes se réduiraient à l'unité.

» Pour ceux qui verraient avec peine la répétition d deux nombres 65 et 67, j'ajouterai un autre carré nombres encore plus petits,

+ 68	− 29	+ 41	− 37
− 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	− 23	+ 61
− 11	− 77	+ 8	+ 49

où la somme des quatre carrés est 8515.

» Noter que dans ces figures les quatre carrés des a gles et les quatre carrés moyens produisent encore même somme (*Com. coll.*, t. Ier, p. 441). »

À la page 450 du même volume, à propos d'une aut question d'analyse indéterminée, on lit ceci :

Non dubito fore plerosque, qui mirabuntur, me hujusmodi quæstionibus evolvendis, quas nunc quide summi geometræ aversari videntur, operam consumer

*n equidem fateri cogor, me ex hujusmodi investi-
nibus tantumdem fere voluptatis capere, quam ex
ndissimis geometriæ sublimioris speculationibus.
plurimum studii et laboris impendi in quæstionibus
oribus evolvendis, hujusmodi variatio argumenti,
dam mihi haud ingratam recreationem afferre solet.
um analysis sublimior tantum debet methodo Dio-
cæ, ut nefas videatur eam penitus repudiare* (*).

QUESTIONS.

. Étant donnés une conique dont les foyers sont F
et un point quelconque M dans l'intérieur de cette
e; si l'on mène MF rencontrant la conique en A
t MF′ rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MC}+\frac{1}{MD}.$$

ue le point M est extérieur, les sommes sont rem-
s par des différences. (MANNHEIM.)

. Si une équation du troisième degré et sa dérivée
utes leurs racines rationnelles, les racines a, b, c
première équation seront données par les formules

$$a=m+h,\quad b=mu^2+h,\quad c=2mu+h,$$

et u étant des nombres rationnels. (PROUHET.)

. Etant donnée une fonction homogène *complète* de
p entre n variables, racines d'une équation de degré
lement donnée, les coefficients numériques de la
on étant tous égaux à l'unité; trouver la valeur de
ction exprimée en fonction des coefficients de l'équa-
(WRONSKI.)

eflexions à mediter par certains geomètres. TM.



SOLUTION DE LA QUESTION IX.

(voir p. 258);

PAR M. MORIN,
Ancien notaire (*).

Prenons $\left(\frac{1}{n}\right)^{ième}$ d'année pour unité de temps. On a, d'après la formule connue et conservant la notation adoptée (p. 258) :

1°.

$$a\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = b\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n-2}+\ldots+\left(1+\frac{r}{n}\right)+1\right].$$

$$b=\frac{ar\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}{n\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n-1\right]}.$$

2°

$$\frac{nb}{a}=\frac{r\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n-1}.$$

3°.

$$\text{limite}\,\frac{nb}{a}=\frac{re^r}{e^r-1}.$$

4°. La dérivée de cette fonction est positive ; ainsi elle croît avec r.

(*) Il s'est glissé une faute typographique. Il faut lire $\frac{r}{n}$ au lieu de $\frac{s}{n}$.

5°. La limite pour $r = 0$ est

$$\frac{e^r + re^r}{e^r} = 1 + r = 1.$$

UVEAUX THÉORÈMES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR ÉMILE MATHIEU,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

upposons donnée une équation algébrique de degré m, $= 0$ ou $F(x) = 0$, et donnons à la variable x des va-rs croissant en progression par différence dont la rai-soit h

$$\ldots, x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + mh, \ldots.$$

polynôme $F(x)$ prendra les valeurs

$$\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots, u_m, \ldots.$$

ormons ensuite les différences premières, deuxiè-, troisièmes,..., $m^{\text{ièmes}}$ correspondantes aux valeurs prend $F(x)$, l'objet principal de ce Mémoire est de ontrer que :

°. L'équation

$$F(x) = 0$$

pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0, \Delta u_{-1}, \Delta^2 u_{-2}, \ldots, \Delta^m u_{-m}$$

de variations. Si le nombre des variations est plus d que ce nombre de racines, la différence de ces bres est un nombre pair.





2°. L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus petites que x_0, que la suite

$$u_0,\ -\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ -\Delta^3 u_0, \ldots,\ \pm \Delta^m u_0$$

n'a de variations. Si le nombre des variations est plus grand que ce nombre de racines, la différence de ces nombres est un nombre pair.

Je déduirai aussi de la théorie des différences le théorème de Budan, et je montrerai qu'avec les différences on peut résoudre le même problème qu'avec les dérivées qui entrent dans le théorème de Budan.

INTRODUCTION.

I. Indiquons une fois pour toutes les notations que nous emploierons.

Le polynôme algébrique que nous considérerons dans tout ce Mémoire sera du $m^{ième}$ degré et sera appelé tantôt u, tantôt $F(x)$.

Les dérivées premières, deuxièmes,..., $m^{ièmes}$ de ce polynôme seront ainsi désignées

$$F'(x),\ F''(x), \ldots, F^{(m)}(x).$$

Substituons dans le polynôme $F(x)$ les termes de la progression suivante par différence dont la raison est h :

$$\ldots,\ x_0 - 2h,\ x_0 - h,\ x_0,\ x_0 + h, \ldots,\ x_0 + ph, \ldots,$$

le polynôme $F(x)$ prendra les valeurs

$$\ldots,\quad F(x_0 - 2h),\ F(x_0 - h),\ F(x_0),\ F(x_0 + h), \ldots,\ F(x_0 + ph), \ldots,$$

e nous désignerons aussi par les notations

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ldots,\ u_p,\ \ldots$$

nsi

$$u_p = \mathrm{F}(x_0 + ph)$$

$$u_{-p} = \mathrm{F}(x_0 - ph).$$

Formons les différences premières des termes de la ite

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ldots,\ u_p,\ldots;$$

us les écrirons ainsi

$$\ldots,\quad u_0 - u_{-1} = \Delta u_{-1},\quad u_1 - u_0 = \Delta u_0,\ldots,$$
$$u_{p+1} - u_p = \Delta u_p\ldots.$$

nsi en général

$$\Delta u_p = u_{p+1} - u_p$$

$$\Delta u_{-p} = u_{-p+1} - u_{-p};$$

même

$$\Delta^2 u_p = \Delta u_{p+1} - \Delta u_p$$

$$\Delta^2 u_{-p} = \Delta u_{-p+1} - \Delta u_{-p};$$

ainsi de suite.

Nous aurons souvent à considérer les deux suites

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ldots,\ \Delta^m u_0$$

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ldots,\ \Delta^m u_{-m}.$$

s termes de la première suite sont donnés par les for- ules

$$\Delta u_0 = \mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0) = \theta(x_0),$$
$$\Delta^2 u_0 = \theta(x_0 + h) - \theta(x_0) = \chi(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et les termes de la deuxième suite sont donnés par le
formules

$$\Delta u_{-1} = F(x_0) - F(x_0 - h) = \varphi(x_0),$$
$$\Delta^2 u_{-2} = \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - h) = \psi(x_0),$$
$$\Delta^3 u_{-3} = \psi(x_0) - \psi(x_0 - h) = \ldots,$$
. . . .

II. Rappelons les formules

$$(A)\quad \begin{cases} u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m u_0, \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} \Delta^n u_0 = u_n - nu_{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} + \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p} u_{n-p} \ldots \pm u_0 \end{cases}$$

$$(C)\quad \begin{cases} u = u_0 + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\Delta u_0 \\ \quad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h}-1\right)\dfrac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\dfrac{x-x_0}{h}-m+1\right)\dfrac{\Delta^m u_0}{1.2.\ldots m} \end{cases}$$

III. u est aussi donné par la formule

$$(D)\quad \begin{cases} u = u_0 + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\Delta u_{-1} \\ \quad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h}+1\right)\dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h}+1\right)\ldots\left(\dfrac{x-x_0}{h}+m-1\right)\dfrac{\Delta^m u_{-m}}{1.2.\ldots m} \end{cases}$$

ur démontrer cette formule, on démontrera d'abord
néralité de celle-ci :

$$u_n = u_0 + n\,\Delta u_{-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\,\Delta^2 u_{-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}\,\Delta^p u_{-p} + \ldots.$$

tte formule peut être écrite symboliquement

$$u_n = (1 - \Delta u^{-1})^{-n},$$

ourra se démontrer d'une manière tout à fait ana-
e à la formule (A). Cette formule démontrée, on en
ira la formule (D) de la même manière qu'on a
it la formule (C) de la formule (A).

. Etant donné le polynôme F (x), proposons-nous
rimer les dérivées

$$F'(x_0),\ F''(x_0),\ldots,\ F^{(m)}(x_0)$$

nction des différences

$$\Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ldots,\ \Delta^m u_{-m}.$$

us avons

$$F(x + x_0) = F(x_0) + x\,F'(x_0) + \frac{x^2}{1.2}\,F''(x_0) + \ldots.$$

us avons aussi

$$F(x) = F(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_{-1}$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots.$$

hangé dans cette formule x en $x + x_0$, il vient

$$F(x + x_0) = F(x_0) + \frac{x}{h}\,\Delta u_{-1} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} + 1\right)\left(\frac{x}{h} + 2\right)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + \ldots.$$



Ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, nous avons

$$
(\mathrm{N}) \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{F}(x + x_0) = \mathrm{F}(x_0) \\
&+ \frac{x}{h}\left(\frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \ldots + \frac{\Delta^m u_{-m}}{m}\right) \\
&+ \frac{x^2}{h^2}\left[\begin{aligned}&\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (1+2)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} \\ &+ (1.2 + 1.3 + 2.3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} + \ldots\end{aligned}\right] \\
&+ \frac{x^3}{h^3}\left[\begin{aligned}&\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (1+2+3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} \\ &+ \left(\begin{matrix}1.2+1.3+1.4\\+2.3+2.4+3.4\end{matrix}\right)\frac{\Delta^5 u_{-5}}{1.2.3.4.5} + \ldots\end{aligned}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

En égalant les coefficients des termes de même degré dans les expressions (M) et (N) de $\mathrm{F}(x + x_0)$, il vient

$$
\begin{aligned}
&h\,\mathrm{F}'(x_0) = \frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \ldots + \frac{\Delta^m u_{-m}}{m}, \\
&\frac{h^2\,\mathrm{F}''(x_0)}{1.2} = \frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (1+2)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} \\
&\qquad\qquad + (1.2 + 1.3 + 2.3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} + \ldots, \\
&\frac{h^3\,\mathrm{F}'''(x_0)}{1.2.3} = \frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (1+2+3)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} \\
&\qquad\qquad + \left(\begin{matrix}1.2+1.3+1.4\\+2.3+2.4+3.4\end{matrix}\right)\frac{\Delta^5 u_{-5}}{1.2.3.4.5} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Nous pouvons maintenant procéder à la démonstration des théorèmes qui font l'objet de ce Mémoire.

PROPOSITION I.

Théorème.

La suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2}, \ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

a moins autant de variations que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F''(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

e nombre des variations de la première suite est plus nd que le nombre des variations de la deuxième, la férence de ces deux nombres est un nombre pair.

Nous commencerons par établir deux lemmes.

Lemme I. — A, B, C,..., T, U étant des nombres lconques positifs ou négatifs, la suite

$$A,\ B,\ C, \ldots,\ T,\ U$$

a moins autant de variations que la suite

$$- B + \ldots + T + U,\quad B + C + \ldots + U, \ldots,\ T + U,\ U,$$

e nous appellerons *suite dérivée de la première.*

En effet, posons

$$A + B + C + \ldots + T + U + \alpha = 0.$$

polynôme

$$Ux^m + Tx^{m-1} + \ldots + Bx^2 + Ax + \alpha$$

a divisible par $x - 1$, et le quotient de ce polynôme par $- 1$ sera

$$\begin{array}{l|l|l} Ux^{m-1} + U & x^{m-2} + \ldots + U & x + U \\ \quad\quad\quad\ + T & \quad\quad\quad\quad\ + T & \ \ + T \\ & \quad\quad\quad\quad\ \ldots & \ \ \ldots \\ & \quad\quad\quad\quad\ + B & \ \ + B \\ & & \ \ + A \end{array}$$



Si l'on multiplie le polynôme (2) par $x - 1$, on au polynôme (1); donc le polynôme (1) a au moins une riation de plus que le polynôme (2). Donc dans le ca plus défavorable où α serait de signe contraire à A suite

$$A, B, C, .., U$$

aura au moins autant de variations que sa suite déri

Lemme II. — Soit la suite composée de m termes

(a) $$A, B, C, \ldots, I, K, \ldots, T, U$$

et sa suite dérivée

(b) $$\begin{cases} A + B + \ldots + U, \ldots, I + K + \ldots + U, \\ K + L + \ldots + U, \ldots, T + U, U; \end{cases}$$

je pose la suite

(c) $$A, B, \ldots, I, K + L + \ldots + U, \ldots, T + U, U,$$

formée des n premiers termes de la suite (a) et des m - derniers termes de la suite (b), et je dis que la suite a au moins autant de variations que la suite (c).

En effet, soit s le nombre des variations de la suite

$$A, B, C, \ldots, I, K,$$

et t le nombre des variations de la suite

$$K, \ldots, T, U;$$

la suite (a) aura $s + t$ variations. D'après le lemme la suite

$$K + L + \ldots + U, \ldots, T + U, U$$

n'a pas plus de t variations. Alors considérons les d hypothèses:

1°. Si les quantités K et $K + L + \ldots + U$ sont

e signe, la suite

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K$$

nême nombre de variations que la suite

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K+T+\ldots+U;$$

la suite (c) n'a pas plus de $s+t$ variations.

Si K et $K+L+\ldots+U$ sont de signe contraire, te

$$K+L+\ldots+U,\ldots,\ L+U,\ U$$

ut pas avoir t variations, elle en a au plus $t-1$, la

$$A,\ B,\ldots,\ I,\ K+L+\ldots+U$$

$s-1$ ou $s+1$ variations. Donc la suite (c) n'a pas le $(s+1)+(t-1)$ variations ou $s+t$ variations, emme est démontré.

s deux lemmes établis, démontrons la proposition ous occupe sur un polynôme d'un degré déterminé, atrième par exemple; il sera facile de reconnaître a démonstration s'étend à un polynôme d'un degré onque.

ltiplions $\Delta u_{-1}, \Delta^2 u_{-2}, \Delta^3 u_{-3}, \Delta^4 u_{-4}$ par les nombres $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ et écrivons la suite

$$u_0,\quad \frac{\Delta u_{-1}}{1},\quad \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2},\quad \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3},\quad \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}.$$

rmons les quatre derniers termes de la suite dérivée suite (A), et les plaçant sous les termes de même de la suite (A), nous avons le tableau

	$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}$	$\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}$	$\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$
$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$	$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2}+\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$	$\frac{\Delta^3 u_{-3}}{3}+\frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}$	$\frac{\Delta^4 u_{-5}}{4}$

Il est évident que la suite

$$(1) \qquad u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ \Delta^3 u_{-3},\ \Delta^4 u_{-4}$$

présente le même nombre de variations que la suite (A
donc, d'après le lemme II, la suite (1) a au moins auta
de variations que la suite

$$u_0,\quad \frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4},$$

$$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4},\quad \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4},\quad \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4}.$$

Multiplions les trois derniers termes de cette suite r
pectivement par $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ et remarquant que l'on a

$$\frac{\Delta u_{-1}}{1} + \frac{\Delta^2 u_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 u_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 u_{-4}}{4} = h\,\mathrm{F}'(x_0),$$

nous aurons cette autre suite

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0,\quad h\,\mathrm{F}'(x_0),\quad \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.4}, \\ \qquad \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.4},\quad \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4}. \end{array} \right.$$

Formons les trois derniers termes de la suite dériv
de la suite (B), et les plaçant sous les termes de mê
ordre de la suite (B), nous aurons le tableau

$$u_0,\ h\,\mathrm{F}'(x_0) \left| \begin{array}{l} \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.4} \\ \dfrac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (2+1)\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (2.3+1.3+1.2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} \end{array} \right| \begin{array}{l} \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.4} \\ \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + (3+2)\ldots \end{array}$$

Remarquons que l'on a

$$\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + (2+1)\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (2.3+1.3+1.2)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}$$
$$= \frac{h^2 \mathrm{F}''(x_0)}{1.2};$$

nc, d'après le lemme II, la suite (B) et à fortiori la te (1) ont au moins autant de variations que la suite

$$\left\{\begin{array}{l} u_0,\quad \dfrac{h\,F'(x_0)}{1},\quad \dfrac{h^2\,F''(x_0)}{1.2},\\[2ex] \dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{2.3} + (3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4},\qquad \dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{3.4}. \end{array}\right.$$

ltiplions les deux derniers termes de la suite (C) par $\frac{1}{2}$, et agissant comme précédemment, nous formons le leau

$h\,F'(x_0)$	$\dfrac{h^2 F''(x_0)}{1.2}$	$\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}$	$\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4}$
		$\dfrac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2+1)\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4}$	$\dfrac{\Delta^4 u_{-4}}{2.3.4}$

Or on a

$$\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2.3} + (3+2+1)\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} = \frac{h^3 F'''(x_0)}{1.2.3},$$

$$\frac{\Delta^4 u_{-4}}{1.2.3.4} = \frac{h^4 F^{\text{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}.$$

nc la suite (C) et à fortiori la suite (B) et la suite (1) au moins autant de variations que la suite

$$u_0,\quad \frac{h\,F'(x_0)}{1},\quad \frac{h^2 F''(x_0)}{1.2},\quad \frac{h^3 F'''(x_0)}{1.2.3},\quad \frac{h^4 F^{\text{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}.$$

nc enfin la suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2},\ \Delta^3 u_{-3},\ \Delta^4 u_{-4}$$

moins autant de variations que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F''(x_0),\ F'''(x_0),\ F^{\text{IV}}(x_0).$$

De plus, si le nombre de variations de la première su
est plus grand que le nombre de variations de la deuxièn
la différence de ces deux nombres est un nombre pa
Car ces deux suites commencent et finissent par le mên
signe.

PROPOSITION II.

Théorème.

L'équation

$$F(x) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la sui

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\ \Delta^2 u_{-2}, \ldots,\ \Delta^m u_{-m}$$

n'a de variations. Si ce nombre de variations est pl
grand que ce nombre de racines, leur différence est
nombre pair.

Soient ν le nombre des variations de la suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1}, \ldots,\ \Delta^m u_{-m},$$

ν' celui des variations de la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0),$$

r le nombre des racines plus grandes que x_0. On aura

$$F(x + x_0) = F(x_0) + x F'(x_0) + \frac{x^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots.$$

D'après le théorème de Descartes,

$$F(x + x_0) = 0$$

n'a pas plus de racines positives, que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0)$$

n'a de variations; donc

$$F(x) = 0$$

pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\dots,\ F^{(m)}(x_0)$$

de variations, et, d'après le même théorème, $\nu' - r$ un nombre pair. D'après le théorème précédent, ν t pas plus petit que ν'; donc l'équation

$$F(x) = 0$$

pas plus de racines plus grandes que x_0, que la suite

$$u_0,\ \Delta u_{-1},\dots,\ \Delta^m u_{-m}$$

de variations. De plus, si ce nombre de variations est grand que ce nombre de racines, leur différence est nombre pair. Car nous venons de remarquer que $- r$ est un nombre pair; d'après le théorème précé- $\nu - \nu'$ est un nombre pair, donc la somme de ces nombres $\nu - r$ est un nombre pair.

PROPOSITION III.

Théorème.

a suite

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\dots,\ \Delta^m u_0$$

moins autant de permanences que la suite

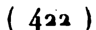
$$F(x_0),\ F'(x_0),\dots,\ F^{(m)}(x_0).$$

n effet, posons

$$F(x) = f(x - x_0),$$

s aurons

$$f(x - x_0) = u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1 . 2} + \dots$$



Changeons $x - x_0$ en $-x + x_0$, nous aurons

$$f(-x + x_0) = u_0 - \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta u_0$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} - \ldots$$

Soient $\Delta' u_{-1}$, $\Delta'^2 u_{-2}, \ldots, \Delta'^m u_{-m}$ les différences de
fonction $f(-x + x_0)$ analogues aux différences Δu_{-}
$\Delta^2 u_{-2}, \ldots, \Delta^m u_{-m}$ de la fonction $f(x - x_0)$, il viendr

$$f(-x + x_0) = u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\Delta' u_{-1}$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta'^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots$$

En comparant ces deux expressions de $f(-x + x_0)$
j'aurai

$$\Delta' u_{-1} = -\Delta u_0, \quad \Delta'^2 u_{-2} = \Delta^2 u_0, \quad \Delta'^3 u_{-3} = -\Delta^3 u_0, \ldots$$

Or la suite

$$u_0, \ \Delta' u_{-1}, \ \Delta'^2 u_{-2}, \ \Delta'^3 u_{-3}, \ldots$$

a au moins autant de variations que la suite

$$f(0), \ -f'(0), \ f''(0), \ -f'''(0), \ldots, \ \pm f^{(m)}(0).$$

Donc la suite

$$(a) \qquad u_0, \ -\Delta u_0, \ \Delta^2 u_0, \ -\Delta^3 u_0, \ldots \ \pm \Delta^m u_0$$

a au moins autant de variations que la suite

$$(b) \qquad F(x_0), \ -F'(x_0), \ F''(x_0), \ldots, \ \pm F^{(m)}(x_0).$$

Alors, si aucun terme n'est nul ni dans la suite (a) ni
dans la suite (b), il est clair que la suite

$$u_0, \ \Delta u_0, \ \Delta^2 u_0, \ldots, \ \Delta^m u_0.$$

moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F''(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

elques termes étaient nuls, on remplacerait dans les s (a) et (b) ces termes nuls par des signes, de ma- à avoir le plus de permanences possibles, ce qui ne gerait pas le nombre de variations de ces deux suites, rs il est clair que la suite

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0, \ldots,\ \Delta^m u_0$$

moins autant de permanences que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0),$$

que l'on a remplacé les termes nuls par des signes nière à avoir le plus de variations possibles.

PROPOSITION IV.
Théorème.

équation

$$F(x) = 0$$

s plus de racines plus petites que x_0, que la suite

$$u_0,\ -\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ -\Delta^3 u_0, \ldots$$

e variations. Si le nombre des variations est plus que ce nombre de racines, leur différence est un re pair.

nsidérons comme dans le théorème précédent l'équa-

$$f(-x + x_0) = 0.$$

ès la proposition II, l'équation

$$f(-x + x_0) = 0$$

n'a pas plus de racines plus grandes que x_0, que la s

$$u_0,\ \Delta' u_{-1},\ \Delta'^2 u_{-2}, \ldots$$

n'a de variations. Si ce nombre de variations est plus g
que ce nombre de racines, leur différence est un nom
pair.

Or il est clair que l'équation

$$f(-x+x_0)=0$$

a autant de racines plus grandes que x_0, que l'équatio

$$f(x-x_0)=0$$

ou

$$F(x)=0$$

a de racines plus petites que x_0, et la suite

$$u_0,\ \Delta' u_{-1},\ \Delta'^2 u_{-2}, \ldots$$

n'est autre que la suite

$$u_0,\ -\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ -\Delta^3 u_0, \ldots.$$

Donc la proposition est démontrée.

PROPOSITION V.

Théorème de Budan.

Étant donnée une équation

$$F(x)=0$$

de degré m, si a est plus grand que b, la différence entr
le nombre des variations des deux suites

$$F(a),\ F'(a),\ F''(a), \ldots,\ F^{(m)}(a),$$
$$F(b),\ F'(b),\ F''(b), \ldots,\ F^{(m)}(b),$$

n'est pas plus petite que le nombre des racines comprises

re a et b. Si le premier nombre est plus grand que le
ond, leur différence est un nombre pair.

oit θ la différence $b - a$, posons

$$\theta = nh,$$

ant un nombre entier; afin de ne pas contrarier nos
ations, posons aussi

$$a = x_0,$$

ubstituons dans $F(x)$ les nombres croissant en pro-
sion par différence

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ldots,$$
$$x_n = b = x_0 + nh.$$

upposons h assez petit pour que deux racines consé-
ves de l'équation

$$F(x) = 0$$

èrent de plus de h; il y aura au plus une racine com-
e entre deux termes consécutifs quelconques de cette
gression par différence.

'ormons ensuite les différences premières, deuxièmes,
sièmes, etc., et disposons-les ainsi :

u_0	Δu_{-1}	$\Delta^2 u_{-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{-(m-1)}$	$\Delta^m u_{-m}$
u_1	Δu_0	$\Delta^2 u_{-1}$	......	$\Delta^{m-1} u_{-(m-2)}$	$\Delta^m u_{-(m-1)}$
.....	.....	......	......	....	....
u_p	Δu_{p-1}	$\Delta^2 u_{p-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{p-m+1}$	$\Delta^m u_{p-m}$
u_{p+1}	Δu_p	$\Delta^2 u_{p-1}$	......	$\Delta^{m-1} u_{p-m+2}$	$\Delta^m u_{p-m+1}$
.....	.....	......	......	....	....
u_n	Δu_{n-1}	$\Delta^2 u_{n-2}$	......	$\Delta^{m-1} u_{n-m+1}$	$\Delta^m u_{n-m}$

'appellerai suite (x_0) l'ensemble des termes formé par

la première ligne horizontale, suite (x_1) celui des te[...] mes formé par la deuxième, et ainsi de suite.

Il est facile de reconnaître que chacune de ces suit[...] est la suite dérivée de la précédente; par conséquent (pr[...] position I, lemme I) la suite (x_{p+1}) a au plus autant d[...] variations que la suite (x_p). Désignons par ν_p le nomb[...] des variations de la suite (x_p) et par ν_{p+1} celui de la sui[...] (x_{p+1}), nous aurons

$$\nu_p - \nu_{p+1} \geqq 0.$$

S'il y avait une racine entre x_p et x_{p+1}, u_p et u_{p+1} seraie[...] de signe contraire: donc la suite (x_p) et la suite (x_{p+1}) commençant par des signes contraires et finissant par l[...] même signe, on ne pourrait avoir

$$\nu_p - \nu_{p+1} = 0,$$

donc on aurait

$$\nu_p - \nu_{p+1} \geqq 1.$$

Soit μ le nombre des racines comprises entre a et [...] et supposons que la première soit comprise entre x_i e[...] x_{i+1}, la deuxième entre x_r et $x_{r+1}, \ldots$, la $\mu^{\text{ième}}$ entr[...] x_t et x_{t+1}; nous aurons

$$\nu_0 - \nu_1 \geqq 0, \quad \nu_1 - \nu_2 \geqq 0, \ldots, \quad \nu_k - \nu_{k+1} \geqq 1, \ldots,$$
$$\nu_t - \nu_{t+1} \geqq 1, \ldots, \quad \nu_{n-1} - \nu_n \geqq 0.$$

En ajoutant ces égalités et inégalités membre à membre nous aurons

$$\nu_0 - \nu_n \geqq \mu.$$

Or nous avons

$$\Delta u_{p-1} = \mathrm{F}(x_p) - \mathrm{F}(x_p - h)$$
$$= h\mathrm{F}'(x_p) - \frac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x_p) + \ldots = \varphi(x_p).$$

$$\Delta^2 u_{p-2} = \varphi(x_p) - \varphi(x_p - h)$$

$$\varphi'(x_p) - \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_p) + \ldots = h^2 F''(x_p) - \ldots = \psi(x_p),$$

. . . .

s pouvons écrire ainsi les valeurs de ces différences :

$$\Delta u_{p-1} = h\,[F'(x_p) + h\rho],$$
$$\Delta^2 u_{p-2} = h^2[F''(x_p) + h\sigma],$$
$$\Delta^3 u_{p-3} = h^3[F'''(x_p) + h\tau],$$

. . . .

onc si nous supposons h suffisamment petit, Δu_{p-1}, $_{-2}$,..., $\Delta^m u_{p-m}$ seront de même signe que $F'(x_p)$, $x_p)$,..., $F^{(m)}(x_p)$. Donc aussi, en supposant h suffiment petit, ν_0 sera le nombre de variations de la

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ldots,\ F^{(m)}(x_0),$$

le nombre des variations de la suite

$$F(x_n),\ F'(x_n),\ldots,\ F^{(m)}(x_n).$$

enfin la différence entre le nombre des variations des suites

$$F(a),\ F'(a),\ F''(a),\ldots,\ F^{(m)}(a),$$
$$F(b),\ F'(b),\ F''(b),\ldots,\ F^{(m)}(b),$$

pas plus petite que le nombre des racines comprises a et b.

plus, si le nombre des variations de la première est plus grand que le nombre des variations de la ième, la différence de ces deux nombres est un bre pair.

effet, remarquons que

$$F^{(m)}(a) = F^{(m)}(b).$$

D'après cela, si le nombre μ des racines comprises entr
a et b est pair, $F(a)$ et $F(b)$ seront de même signe
et les suites (1) et (2) commenceront et finiront pa
le même signe; donc $\nu_0 - \nu_n$ est pair, donc enfi
$\nu_0 - \nu_n - \mu$ est un nombre pair.

On voit de même que si μ est impair, $\nu_0 - \nu_n$ est u
nombre impair, et $\nu_0 - \nu_n - \mu$ est un nombre pair.

Dans la démonstration précédente, on n'a suppos
nulle aucune dérivée de $F(x)$ pour $x = a$ et $x = b$. Sup
posons maintenant que dans la suite

$$F(a),\ F'(a),\ldots,\ F^{(n-1)}(a),\ F^{(n)}(a),\ldots,$$
$$F^{(n-p)}(a),\ F^{(n-p+1)}(a),\ldots,\ F^{(m)}(a),$$

tous les termes compris entre $F^{(n-1)}(a)$ et $F^{(n-p+1)}(a$
s'annulent. Au lieu de substituer a dans la suite

$$F(x),\ F'(x),\ldots,\ F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x),\ldots,$$
$$F^{(n-p)}(x),\ F^{(n-p+1)}(x),\ldots,\ F^{(m)}(x),$$

on substituera $a - h$ et $a + h$, et si l'on suppose h suffi
samment petit, les signes de cette suite ne pourront êtr
altérés dans le passage de $x = a - h$ à $x = a + h$ qu
dans la partie qui se trouve entre $F^{(n-1)}(x)$ et $F^{(n-p+1)}(x$
Il suffira donc de comparer les signes des deux suites

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} F^{(n-1)}(a-h),\ F^{(n)}(a-h),\ F^{(n+1)}(a-h),\ldots,\\ \qquad F^{(n-p+1)}(a-h),\end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} F^{(n-1)}(a+h),\ F^{(n)}(a+h),\ F^{(n+1)}(a+h),\ldots,\\ \qquad F^{(n-p+1)}(a+h).\end{array}\right.$$

En développant ces fonctions, il sera facile de reconnaîtr
que $F^{(n)}(a+h)$, $F^{(n+1)}(a+h)$,..., $F^{(n-p)}(a+h)$ son
tous de même signe que $F^{(n-p+1)}(a)$ si h est suffisammen
petit. On reconnaîtra aussi que si h est suffisammen
petit, $F^{(n-p)}(a-h)$ est de signe contraire à $F^{(n-p+1)}(a)$

$^{p-1)}(a-h)$ est de même signe, $F^{(n-p-2)}(a-h)$ de e contraire, et ainsi de suite.

ous ne nous arrêterons pas davantage sur ce cas partier; nous nous bornerons à dire que si la suite (3) a riations de plus que la suite (4), l'équation

$$F(x) = 0$$

racines imaginaires.

Proposition VI.

Théorème.

upposons que les deux suites

$$\begin{cases} u_0, & \Delta u_{-1}, & \Delta^2 u_{-2}, \ldots, & \Delta^m u_{-m}, \\ u_0, & \Delta u_0, & \Delta^2 u_0, \ldots, & \Delta^m u_0, \end{cases}$$

entent les mêmes signes ou même seulement le même bre de variations; je dis que ce nombre de variations le même que celui de la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0), \ldots,\ F^{(m)}(x_0).$$

oient p le nombre des variations, q le nombre des manences de chaque suite (α). Soient p' le nombre des ations, q' le nombre des permanences de la suite (a). oposition I), p n'est pas plus petit que p'; (proposi- III), q n'est pas plus petit que q'; donc, puisque

$$p + q = p' + q',$$

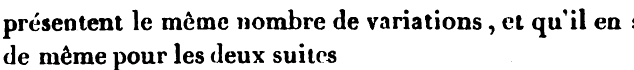
a

$$p = p' \quad \text{et} \quad q = q'.$$

Corollaire. — En se rappelant la proposition V, on voit si h est suffisamment petit pour que les deux suites

$$\begin{cases} u_0, & \Delta u_{-1}, & \Delta^2 u_{-2}, \ldots, & \Delta^m u_{-m}, \\ u_0, & \Delta u_0, & \Delta^2 u_0, \ldots, & \Delta^m u_0, \end{cases}$$

présentent le même nombre de variations, et qu'il en s
de même pour les deux suites



$$(\beta)\qquad \begin{cases} u_n, & \Delta u_{n-1}, & \Delta^2 u_{n-2}, \ldots, & \Delta^m u_{n-m}, \\ u_n, & \Delta u_n, & \Delta^2 u_n, \ldots, & \Delta^m u_n, \end{cases}$$

la différence entre le nombre des variations des suites
et des suites (β) n'est pas plus petite que le nombre
racines de $F(x) = 0$ comprises entre x_0 et x_n. Si la di
rence entre le nombre des variations des suites (α) et
suites (β) est plus grande que le nombre des racines co
prises entre x_0 et x_n, la différence de ces deux nomb
est un nombre pair.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICI

III.

Simplification de l'équation générale du second deg
par la transformation des coordonnées.

La réduction de l'équation générale du second degr
trois variables, telle qu'elle est ordinairement exposé
dépend de la théorie des *plans principaux*. Pour parve
à cette réduction, on a fait un raisonnement qui contie
à la fois les deux assertions suivantes : « Dans toute su
» face du second degré il y a au moins un système
» cordes *principales*; — le plan qui divise ces cordes
» parties égales peut être *à une distance infinie.* » No
n'avons aucune objection à faire contre une manière
parler dont le sens est connu de ceux qui s'en serven
nous dirons seulement que la forme qu'on a donnée a

isonnement dont il s'agit met, assez mal à propos, en ute l'existence d'un plan principal, puisqu'en réalité ce an existe et que c'est précisément en le prenant pour an de coordonnées qu'on arrive par le moyen le plus aple et le plus direct aux simplifications proposées.

Il nous a donc semblé utile d'établir à priori cette prosition fondamentale :

Dans toute surface du second degré il y a au moins plan diamétral perpendiculaire aux cordes qu'il die en parties égales.

Nous prévenons que par cette dénomination de *corde*, us entendons une droite *limitée*, dont les deux extrétés se trouvent sur la surface que l'on considère. Il est ir qu'un plan qui divise en parties égales un système cordes ne peut jamais être *à une distance infinie*.

De plus, il sera supposé que l'équation générale

$$\left\{\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \end{array}\right.$$

présente une surface réelle et du second degré; ainsi coefficients A, A', A'', B, B', B'' ne seront pas nuls à la s.

1. Pour que la surface représentée par l'équation (1) mette des cordes parallèles à une direction définie par équations

$$x = mz, \quad y = nz,$$

suffit que la substitution de mz et nz à x et y dans les mes du second degré de l'équation (1) donne à z^2 un efficient autre que zéro. Car si le coefficient de z^2 n'est s nul, les équations du second degré qui déterminent points d'intersection de la surface et des droites parales à la direction $[x = mz, y = nz]$ n'auront aucune cine infinie. Et par conséquent, en menant par les dif-

férents points de la surface des parallèles à

$$[x = mz,\ y = nz],$$

ces droites rencontreront chacune la surface en un secon point (*) ; donc, elles détermineront un système de co des. .

On voit de même que si le coefficient de z^2 était nul, surface n'admettrait pas de cordes parallèles à la directi définie par les valeurs de m et de n.

La substitution de mz, nz à x, y dans l'équation (donne à z^2 le côefficient

$$\mathrm{A}m^2 + \mathrm{A}'n^2 + \mathrm{A}'' + 2\mathrm{B}n + 2\mathrm{B}'m + 2\mathrm{B}''mn$$

ou

$$(\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}')m + (\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B})n + (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'');$$

ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que la su face admette des cordes parallèles à la droite $[x = m$ $y = nz]$ consiste dans l'inégalité

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}')m + (\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B})n \\ \qquad + (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'') \gtrless 0. \end{array} \right.$$

Quand cette inégalité a lieu, le plan diamétral qui e représenté par l'équation

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}')x + (\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B})y \\ + (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'')z + \mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}'' = 0, \end{array} \right.$$

ne peut être *à une distance infinie;* cela résulte éviden ment de ce que les milieux des cordes sont à des distanc finies, et d'ailleurs l'inégalité (2) montre qu'on n'a pas

---

(*) Il y a toutefois exception pour les points où les droites considéré seraient tangentes à la surface.

is

$$Am + B''n + B' = o,$$
$$B''m + A'n + B = o,$$
$$B'm + Bn + A'' = o.$$

Occupons-nous maintenant des plans principaux.
uand les coordonnées sont rectangulaires, pour que lan diamétral (3) soit perpendiculaire aux cordes divise en parties égales, il faut qu'on ait

$$(Am + B''n + B') = (B'm + Bn + A'')m$$

$$(B''m + A'n + B) = (B'm + Bn + A'')n;$$

en posant $B'm + Bn + A'' = s$, il faut qu'on ait :

$$Am + B''n + B' = sm$$

$$B''m + A'n + B = sn.$$

lernières équations reviennent à

$$(s - A)m - B''n - B' = o,$$
$$(s - A')n - B''m - B = o$$

onnent

$$m = \frac{B'(s - A') + BB''}{(s - A)(s - A') - B''^2},$$

$$n = \frac{B(s - A) + B'B''}{(s - A)(s - A') - B''^2}.$$

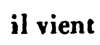
remplaçant m et n par les expressions précédentes l'équation

$$B'm + Bn + A'' = s,$$

l'on peut écrire ainsi :

$$(s - A'') - Bn - B'm = o,$$





il vient

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (s - A'')[(s - A)(s - A') - B''^2] \\ - [B^2(s - A) + B'^2(s - A') + 2BB'B''] = 0. \end{array} \right.$$

Puis, en effectuant les multiplications indiquées e
donnant, on a l'équation

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} s^3 - [A + A' + A'']s^2 \\ + [AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2]s - D \end{array} \right.$$

dans laquelle D représente le polynôme

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

A chaque racine de l'équation (7), réelle et différ
de zéro, correspond au moins un système de cordes p
cipales, et, par conséquent, au moins un plan princi

En effet, si la racine s est réelle, les valeurs d
et n, (4) et (5), ne peuvent être imaginaires; don
droite

$$[x = mz, \ y = nz]$$

existe. De plus, la surface admet nécessairement des
des parallèles à cette droite, si s n'est pas nulle, ca
vertu des relations

$$B'm + Bn + A'' = s,$$

$$Am + B''n + B' = sm,$$

$$B''n + A'n + B = sn,$$

l'inégalité (2) (page 432) devient

$$(m^2 + n^2 + 1)s \gtrless 0:$$

et il est évident que cette inégalité a lieu lorsque s est
férente de zéro.

Quant à l'équation du plan principal correspond
on l'aura sous sa forme la plus simple en remplaçant

uation (3) les trinômes

$$B'm + Bn + A'',$$
$$Am + B''n + B',$$
$$B''m + A'n + B$$

s, sm, sn. Cette substitution donne

$$(mx + ny + z)s + Cm + C'n + C'' = 0$$

S'il paraît utile de faire entrer dans l'équation de ce n les cosinus α, 6, γ des angles que la direction des des $[x = mz, y = nz]$ forme avec les axes des x, y, z substituera à m, n les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{6}{\gamma}$: et l'équation pré- ente deviendra

$$(\alpha x + 6y + \gamma z)s + C\alpha + C'6 + C''\gamma = 0.$$

Les valeurs de α, 6, γ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\alpha}{\gamma} = m, \quad \frac{6}{\gamma} = n,, \quad \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = 1,$$

t nécessairement réelles et ne peuvent être nulles les trois. Donc si la racine s est différente de zéro, uation (9) représentera un plan qui n'est pas *à une tance infinie.*

D'après cela, pour démontrer que la surface a au moins plan principal, il suffit de faire voir que l'une des is valeurs de s est réelle et différente de zéro. Or, l'exis- ce de cette valeur résulte des deux propositions sui- ntes :

1°. L'équation (7) a ses trois racines réelles;

2°. Ces trois racines ne peuvent être nulles à la s (*).

On a donné de la première de ces propositions plu-

(*) En admettant toujours que l'équation de la surface soit du second ré, c'est-à-dire que les six coefficients A, A', A'', B, B', B'' ne soient nuls.

28.

sieurs démonstrations différentes; celle que nous al
exposer est due à M. *Cauchy*.

Nous admettrons d'abord que les trois coefficient
B', B'' ont des valeurs différentes de zéro.

Reprenons l'équation en s sous la forme

$$(6)\quad \begin{cases} (s-A'')[(s-A)(s-A')-B''^2] \\ -[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B'']=0 \end{cases}$$

et nommons a, b les racines réelles et inégales de l'é
tion du second degré

$$(s-A)(s-A')-B''^2=0\ (*).$$

Il est facile de reconnaître que le premier membr
l'équation (6) prend le signe *plus* ou le signe *moins*,
vant qu'on substitue à l'inconnue s la plus petite
plus grande des racines a et b.

En effet, chacune de ces deux substitutions rédu
premier membre de (6) à

$$-[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B''];$$

cette expression peut s'écrire ainsi :

$$-\frac{1}{(s-A)}[B^2(s-A)^2+B'^2(s-A)(s-A')+2BB'B''(s-$$

et, ayant égard à l'égalité supposée

$$(s-A)(s-A')=B''^2,$$

elle devient

$$-\frac{1}{s-A}[B^2(s-A)^2+B'^2B''^2+2BB'B''(s-A)]$$

(*) Ces racines sont $\left(\frac{A+A'}{2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}$, on voit qu
ont des valeurs réelles qui ne peuvent être égales qu'autant que B'' =
A = A'.

$$-\frac{1}{s-A}[B(s-A)+B'B''] .$$

On voit que son signe est le même que celui de $-\frac{1}{s-A}$.
en supposant $a < b$, on a

$$(a-A) < 0$$

$$(b-A) > 0\ (*);$$

r suite

$$-\frac{1}{(a-A)} > 0$$

$$-\frac{1}{(b-A)} < 0.$$

onc le résultat de la substitution du plus petit des deux ombres (a et b) a le signe *plus* et le résultat de l'autre bstitution a le signe *moins*.

Si, de plus, on observe que le premier terme de l'équaon (6) ordonnée étant positif, le premier membre de tte équation devient nécessairement positif pour de trèsandes valeurs de s, et négatif pour des valeurs converntes vers $-\infty$, on en conclura que l'équation (6) adet une racine réelle plus grande que b, une seconde cine moindre que a et une troisième comprise entre a b.

(*) Car

$$a-A=-\frac{1}{2}[\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}+(A-A')]$$

$$b-A=\frac{1}{2}[\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}-(A-A')].$$

La démonstration précédente suppose que l'expressi[on]

$$-\frac{1}{(s-A)}[B(s-A)+B'B'']^2$$

ne se réduit à zéro pour aucune des deux substitutions [de] a et b à s. Si l'un des deux nombres a, b, par exemple [a], annulait cette expression, le nombre a serait évidemme[nt] racine de l'équation (6); la racine plus grande que b exi[s]terait encore : il n'en faut pas davantage pour que l'équ[a]tion ait ses trois racines réelles.

Dans la réduction de l'expression

$$-[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B'']$$

à la forme

$$-\frac{1}{(s-A)}[B(s-A)+B'B'']^2,$$

il a été implicitement admis que les substitutions de a [et] b à s n'annulent pas $s-A$; ce qui exige que B'' ne so[it] pas nul (*). Si $B''=0$ et qu'il n'en soit pas de mê[me] des deux autres coefficients B, B', il suffira, pour que [le] raisonnement qu'on a fait soit encore applicable, de do[n]ner à l'équation (7) l'une ou l'autre des deux formes

$$(s-A)[(s-A')(s-A'')-B^2]$$
$$-[B'^2(s-A')+B''^2(s-A'')+2BB'B'']=0,$$
$$(s-A')[(s-A)(s-A'')-B'^2]$$
$$-[B^2(s-A)+B''^2(s-A'')+2BB'B'']=0.$$

Lorsque deux des coefficients B, B', B'' sont nuls, pa[r]

(*) Quand B'' est nul, l'équation du second degré

$$(s-A)(s-A')-B''^2=0,$$

dont les racines ont été désignées par a et b, donne

$$s=A,\quad s=A';$$

Donc l'un des deux nombres a, b, substitués à s, réduit à zéro le facte[ur] $s-A$.

nple B, B′, l'équation (6) devient

$$(s - A'')[(s - A)(s - A') - B''^2] = 0,$$

a pour racines A″, *a*, *b*.

nfin lorsqu'on a

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0,$$

uation proposée se réduit à

$$(s - A)(s - A')(s - A'') = 0,$$

es valeurs de *s* sont A, A′, A″.

insi dans tous les cas les racines de l'équation en *s* t réelles.

reste à démontrer qu'elles ne peuvent être nulles es trois lorsque la surface considérée est du second de-

i les trois racines de l'équation

$$s^3 - (A + A' + A'')s^2$$
$$+ (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)s - D = 0$$

ent nulles, on aurait les égalités

$$A + A' + A'' = 0,$$
$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0, \quad D = 0,$$

omme, en retranchant du carré de la première le ble de la seconde, il vient

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + B''^2 = 0,$$

udrait que les six coefficients A, A′, A″, B, B′, B″ ent nuls. Par conséquent, l'équation de la surface se uirait au premier degré; ce qui est contraire à l'hypo-se.

l est donc démontré que, dans toute surface du second ré, il y a au moins un plan principal. Et on sait com-nt en plaçant dans ce plan deux des axes coordonnés

l'équation générale de la surface peut être réduit
forme la plus simple (*). G.

SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE,

PAR M. ESPRIT JOUFFRET,
Élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

1. Posons

$$A = \sum a_\lambda x_\lambda, \quad B = \sum b_\lambda x_\lambda,$$

où λ doit prendre successivement les quatre valeurs
3, 4; A et B seront des fonctions linéaires homogè
quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4.

Posons aussi

$$u = \sum M_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

où encore λ et μ doivent prendre chacun successive
et de toutes les manières possibles les valeurs 1, 2
avec la condition $\lambda\mu = \mu\lambda$; u sera la fonction généra
mogène du second degré des mêmes variables x.

Nous adopterons pour désigner les diverses dériv
u (et des autres fonctions que nous aurons à consid
la notation de M. Hesse, savoir

$$\frac{du}{dx_\lambda} = u_\lambda, \quad \frac{du_\lambda}{dx_\mu} = u_{\lambda\mu}.$$

Si nous considérons les rapports $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ comm

(*) M. Kummer prouve que le dernier terme de l'équation au ca
différences de l'équation aux axes principaux est la somme de sept
lesquels, pris avec le signe opposé, sont sous le radical des racine
réduite, lesquelles étant imaginaires, les trois racines de la propos
réelles (*Crelle*, t. XXVI, p. 268; 1843). T

rdonnées d'un point, les équations

$$A = 0, \quad B = 0$$

résenteront des plans, et l'équation

$$u = 0$$

l'équation générale des surfaces du second ordre. r abréger le discours, nous dénommerons ces plans et surfaces par les lettres A, B, u.

. Les deux plans A et B coupent la surface u suivant x courbes (réelles ou imaginaires) par lesquelles nous vons faire passer une infinité de surfaces du second ré dont l'équation générale est

$$u + m\mathrm{AB} = v = 0.$$

)n peut déterminer m de manière que la surface v soit cône. Pour cela, il faut égaler à zéro le déterminant Δ a fonction v. On connaît la composition de ce déterant qui contient vingt-quatre termes dont chacun est roduit de quatre facteurs tels que

$$v_{\lambda\mu} = u_{\lambda\mu} + m\,(a_\mu\, b_\lambda + b_\mu\, a_\lambda)\ (^*) :$$

uation

$$\Delta = 0$$

aît donc être du quatrième degré en m, et c'est en effet ui a lieu dans le cas général où l'on considère deux faces quelconques du second degré. Mais ici cette équa- se réduit au second degré.

In effet, la fonction Δ jouit de cette propriété, que si permute les deux derniers chiffres des indices entre x facteurs de l'un de ses termes et qu'on change le si- , on obtient un autre terme de Δ. Par exemple, le ne v_{11}, v_{22}, v_{33}, v_{44} donne naissance aux trois sui-



Voir Bertrand, *Algèbre*, 2ᵉ édit., p. 483. TM.



vants

$$-\nu_{11}\nu_{22}\nu_{34}\nu_{43}, \quad +\nu_{12}\nu_{21}\nu_{34}\nu_{43}, \quad -\nu_{12}\nu_{21}\nu_{33}\nu_{44}$$

et l'ensemble de ces quatre termes peut s'écrire

$$(\alpha) \qquad (\nu_{33}\nu_{44} - \nu_{34}\nu_{43})(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}).$$

La fonction Δ est donc la somme de six produits tels q
(α); or il est facile de reconnaître en remplaçant le
par leurs valeurs que dans le premier de ces facteurs
terme en m^2 fourni par $\nu_{33}\,\nu_{44}$ est détruit par celui q
fournit $\nu_{34}\,\nu_{43}$, et de même dans le second facteur.

La fonction Δ est donc du second degré en m, de so
qu'il y a seulement deux cônes (proprement dits) env
loppant les deux courbes A et B (*).

(*) L'équation

$$\Delta = 0$$

étant généralement du quatrième degré, on peut dire que, dans le
actuel, deux racines deviennent infinies. Pour ces valeurs infinies de
la fonction ν se réduit à AB; ainsi deux des quatre cônes qui envel
pent la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré dan
cas général se réduisent, lorsque cette courbe se compose de deux
niques, à un seul qui est le système de deux plans dans lesquels se tr
vent les deux coniques et dont le sommet est indéterminé sur la dr
d'intersection de ces plans.

Le théorème général est dû à M. Poncelet (*Propriétés projectives*, p
395). Plucker (*System der Geometrie des Raumes*, § 14) le démontre d
manière suivante qui permet de voir très-clairement la réduction de d
cônes à un système de plans dans le cas que nous considérons :

La détermination simultanée de deux surfaces du second degré dép
de dix-huit constantes. Ce nombre se trouvant dans les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \pi p^2 + \chi q^2 + \rho r^2 + \sigma s^2 &= 0, \\ \pi' p^2 + \chi' q^2 + \rho' r^2 + \sigma' s^2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

où p, q, r, s sont des fonctions linéaires des coordonnées courantes et
χ, etc., des constantes, il est clair que les équations représentent de
surfaces générales du second degré. Éliminant successivement l'une d
quatre fonctions p, q, r, s entre ces équations, nous avons

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} [\pi'\chi]\,q^2 + [\pi'\rho]\,r^2 + [\pi'\sigma]\,s^2 &= 0, \\ [\chi'\pi]\,p^2 + [\chi'\rho]\,r^2 + [\chi'\sigma]\,s^2 &= 0, \\ [\rho'\pi]\,p^2 + [\rho'\chi]\,q^2 + [\rho'\sigma]\,s^2 &= 0, \\ [\sigma'\pi]\,p^2 + [\sigma'\chi]\,q^2 + [\sigma'\rho]\,r^2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

Cela posé, je me propose de démontrer (analytique-) les théorèmes suivants :

Si la ligne suivant laquelle se coupent les deux A et B tourne dans un plan fixe, la ligne joignant mmets de ces deux cônes tourne autour d'un point

Si la première ligne est fixe, la seconde est aussi

Si la première ligne tourne autour d'un point fixe, onde tourne dans un plan fixe.

Les coordonnées du sommet (ou *centre*) du cône orrespond à la racine m' vérifient les équations

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + m'(\mathrm{A}b_1 + \mathrm{B}a_1) = 0, \\ v_2 = u_2 + m'(\mathrm{A}b_2 + \mathrm{B}a_2) = 0, \\ v_3 = u_3 + m'(\mathrm{A}b_3 + \mathrm{B}a_3) = 0, \\ v_4 = u_4 + m'(\mathrm{A}b_4 + \mathrm{B}a_4) = 0, \end{cases}$$

---

e de ces équations représente un cône qui passe par la courbe ection des surfaces (1). Ces quatre cônes ont pour sommets les sommets du tétraèdre formé par les plans

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0.$$

osons

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\rho}{\rho'} = \lambda,$$

ations (1) deviennent

$$\pi p^2 + \chi q^2 + \rho (r^2 + \lambda s^2) = 0,$$
$$\pi' p^2 + \chi' q^2 + \rho' (r^2 + \lambda s^2) = 0,$$

eux surfaces se coupent suivant deux coniques situées dans les eprésentés par l'équation

$$[\pi \rho'] p^2 + [\chi' \rho'] q^2 = 0.$$

s deux dernières équations (2) se réduisent à une seule qui est aussi

$$[\pi \rho'] p^2 + [\chi \rho'] q^2 = 0.$$

tons que chaque face du tétraèdre est le plan polaire du sommet

d'où nous déduisons

$$(2)\quad \frac{u_1}{A b_1 + B a_1} = \frac{u_2}{A b_2 + B a_2} = \frac{u_3}{A b_3 + B a_3} = \frac{u_4}{A b_4 + B a_4}$$

équations qui étant indépendantes de m' sont vérifiées pour tous les sommets. Ce sont les équations que nous emploierons pour démontrer nos théorèmes

5. Pour démontrer le premier théorème, nous avons besoin des équations de la droite qui joint les sommets des deux cônes. Ces équations sont faciles à obtenir. En effet, les relations (2) donnent

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{A(b_1 a_2 - b_2 a_1)} = \frac{u_2 a_3 - u_3 a_2}{A(b_2 a_3 - b_3 a_2)} = \frac{u_3 a_4 - u_4 a_3}{A(b_3 a_4 - b_4 a_3)}.$$

En supprimant le facteur $\frac{1}{A}$, nous avons un système linéaire qui doit être vérifié par chacun des deux sommets, et qui représente par conséquent la droite joignant les deux sommets. Les équations à cette droite peuvent s'écrire d'une manière plus courte

$$(3)\quad \frac{[u_1 a_2]}{[b_1 a_2]} = \frac{[u_2 a_3]}{[b_2 a_3]} = \frac{[u_3 a_4]}{[b_3 a_4]}$$

en désignant comme d'ordinaire les binômes alternés par des crochets.

Cela posé, soit

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0$$

un plan fixe, et posons

$$B = P + nA$$

c'est-à-dire

$$b_\lambda = p_\lambda + n a_\lambda ;$$

ceci exprimera que les deux plans A et B se coupent

n fixe P. Substituant dans la première des fractions
nous avons

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{(p_1 + na_1) a_2 - (p_2 + na_2) a_1} = \frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{p_1 a_2 - p_2 a_1},$$

mme chacune des fractions (3) se déduit de la pré-
ıte en augmentant les indices d'une unité, le sys-
(3) deviendra

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{p_1 a_2 - p_2 a_1} = \frac{u_2 a_3 - u_3 a_2}{p_2 a_3 - p_3 a_2} = \frac{u_3 a_4 - u_4 a_3}{p_3 a_4 - p_4 a_3};$$

est évident que si nous posons

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \frac{u_3}{p_3} = \frac{u_4}{p_4},$$

ions qui déterminent un point fixe, ce système sera
quement vérifié indépendamment des a. La droite
urnera donc autour de ce point fixe quand la droite
urnera dans le plan P.

Soient

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0,$$

$$Q = \sum q_\lambda x_\lambda = 0$$

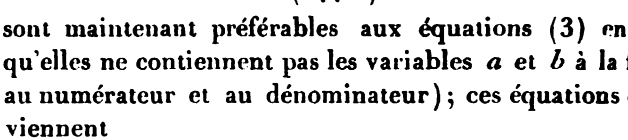
uations d'une droite fixe. Posons

$$A = P + nQ,$$
$$B = P + n'Q$$

à-dire

$$a_\lambda = p_\lambda + nq_\lambda,$$
$$b_\lambda = p_\lambda + n'q_\lambda;$$

i exprimera que les deux plans A et B passent par
droite, et substituons dans les équations (2) (qui



sont maintenant préférables aux équations (3) en qu'elles ne contiennent pas les variables a et b à la au numérateur et au dénominateur); ces équations viennent

$$\frac{u_1}{(A+B)p_1+(An'+Bn)q_1} = \frac{u_2}{(A+B)p_2+(An'+Bn}$$

$$= \frac{u_3}{(A+B)p_3+(An'+Bn}$$

$$= \frac{u_4}{(A+B)p_4+(An'+Bn}$$

$$= \frac{u_1 q_2 - u_2 q_1}{(A+B)(p_1 q_2 - p_2 q_1)}$$

$$= \frac{u_2 q_3 - u_3 q_2}{(A+B)(p_2 q_3 - p_3 q_2)}$$

$$= \frac{u_3 q_4 - u_4 q_3}{(A+B)(p_3 q_4 - p_4 q_3)}.$$

Nous avons donc

$$\frac{[u_1 q_2]}{[p_1 q_2]} = \frac{[u_2 q_3]}{[p_2 q_3]} = \frac{[u_3 q_4]}{[p_3 q_4]},$$

équations qui représentent une droite fixe.

Cette droite se nomme la polaire réciproque de la dr PQ.

7. Soient

$$P = \sum p_\lambda x_\lambda = 0,$$

$$Q = \sum q_\lambda x_\lambda = 0,$$

$$R = \sum r_\lambda x_\lambda = 0$$

les équations d'un point fixe. Posons

$$A = P + mQ + nR,$$
$$B = P + m'Q + n'R,$$

ù

$$u_\lambda = p_\lambda + mq_\lambda + nr_\lambda,$$
$$b_\lambda = p_\lambda + m'q_\lambda + n'r_\lambda$$

r exprimer que les plans A et B passent par ce point.
équations (2) deviennent, en posant, pour abréger
riture,

$$A m' + B m = M,$$
$$A n' + B n = N.$$

$$\frac{u_1}{\ldots + B)p_1 + Mq_1 + Nr_1} = \frac{u_2}{(A+B)p_2 + Mq_2 + Nr_2}$$
$$= \frac{u_3}{(A+B)p_3 + Mq_3 + Nr_3}$$
$$= \frac{u_4}{(A+B)p_4 + Mq_4 + Nr_4}$$
$$= \frac{[u_1 q_2]}{(A+B)[p_1 q_2] + N[r_1 q_2]}$$
$$= \frac{[u_2 q_3]}{(A+B)[p_2 q_3] + N[r_2 q_3]}$$
$$= \frac{[u_3 q_4]}{(A+B)[p_3 q_4] + N[r_3 q_4]}$$
$$= \frac{1}{A+B}\frac{[u_1 q_2][r_2 q_3] - [u_2 q_3][r_1 q_2]}{[p_1 q_2][r_2 q_3] - [p_2 q_3][r_1 q_2]}$$
$$= \frac{1}{A+B}\frac{[u_2 q_3][r_3 q_4] - [u_3 q_4][r_2 q_3]}{[p_2 q_3][r_3 q_4] - [p_3 q_4][r_2 q_3]}.$$

nant les deux dernières fractions, nous avons

$$\frac{\ldots q_2][r_2 q_3] - [u_2 q_3][r_1 q_2]}{\ldots q_2][r_2 q_3] - [p_2 q_3][r_1 q_2]} = \frac{[u_2 q_3][r_3 q_4] - [u_3 q_4][r_2 q_3]}{[p_2 q_3][r_3 q_4] - [p_3 q_4][r_2 q_3]}$$

$$\frac{\big[[u_1 q_2], [r_2 q_3]\big]}{\big[[p_1 q_2], [r_2 q_3]\big]} = \frac{\big[[u_2 q_3], [r_2 q_4]\big]}{\big[[p_2 q_3], [r_2 q_4]\big]},$$

ation qui représente un plan fixe.


Ce plan se nomme le plan polaire du point P, Q, F

8. Si nous supposons que les deux plans A et A' co cident, le cône enveloppant les deux courbes A et A' vient circonscrit à la surface et les deux derniers théo mes donnent les suivants :

Si par une droite on mène différents plans et par courbes d'intersection de ces plans avec la surface cônes tangents à celle-ci, le lieu de ces cônes est droite.

Si par un point fixe on mène différents plans et les courbes d'intersection de ces plans avec la surface cônes tangents à celle-ci, le lieu des sommets de ces cô est un plan.

Ce sont les théorèmes connus sur les plans polair les seuls qu'on démontre ordinairement. *Voir* un arti de M. Lenthéric (*Nouvelles Annales de Mathém tiques*, tome VII) où ils sont déduits de leurs récip ques.

Remarque. Le mode de démonstration que nous av employé pour démontrer les théorèmes énoncés au n peut être employé identiquement de la même mani pour démontrer les propriétés correspondantes des laires planes : car le système *plan* de deux droites corr pond au cône de l'espace.

AVIS.

Des élèves nous ont adressé de bonnes solutions questions proposées dans ce journal ; elles paraîtront décembre et janvier prochain.

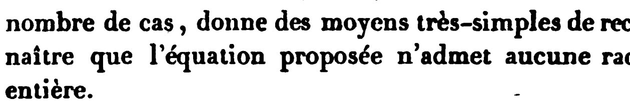
SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

IV.

echerche des racines entières d'une équation à coefficients entiers.

and l'équation proposée est d'un degré assez élevé son dernier terme admet un grand nombre de di- s, les épreuves auxquelles on soumet ces diviseurs a recherche des racines entières peuvent conduire de longs calculs pour arriver, le plus ordinaire- à cette conclusion : que l'équation n'a pas de ra- ntière; car, l'existence d'une racine entière, dans uation prise au hasard est un fait exceptionnel. Que ne part, la règle générale est que les racines cherchées ent pas, et que, d'autre part, tous les calculs que it pour les trouver ne servent absolument à rien a détermination des valeurs approchées des racines mensurables qui existent, on en peut certainement re que la méthode suivie est défectueuse (*). Pour éer en partie à ce qui lui manque, il conviendrait, ins, de la faire précéder de l'indication des princi- caractères auxquels on peut reconnaître qu'une on n'admet pour racine aucun nombre entier. On sur ce sujet de très-utiles renseignements dans les *rches arithmétiques* de Gauss; la première section nt une proposition générale qui, dans un grand

(*) a règle que l'on donne en arithmétique pour extraire la racine 'un nombre n'a pas le même défaut, puisqu'elle fait connaître une pprochée de la racine cherchée, lorsque cette racine ne peut être exactement.



nombre de cas, donne des moyens très-simples de rec
naître que l'équation proposée n'admet aucune rac
entière.

Nous allons d'abord établir cette proposition en n'
ployant que des termes usités dans l'enseignement
mentaire, et nous montrerons, par des exemples,
quelle utilité elle peut être.

1. *Soient* f(x) *ou* $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Px + Q$
polynôme à coefficients entiers, et a, b *deux nomb
entiers quelconques, positifs ou négatifs, dont la di
rence* (b — a) *est exactement divisible par un cert
nombre entier* n : *si l'on remplace successivement* x
a *et* b *dans* f(x), *la différence* f(b) — f(a) *des résul
de ces deux substitutions sera elle-même divisible*
n (*).

En effet, les égalités

$$f(b) = Ab^m + Bb^{m-1} + \ldots + Pb + Q,$$
$$f(a) = Aa^m + Ba^{m-1} + \ldots + Pa + Q,$$

donnent

$$f(b) - f(a) = A(b^m - a^m) + B(b^{m-1} - a^{m-1}) + \ldots$$
$$+ P(b - a).$$

Mais on sait que les différences $b^m - a^m$, $b^{m-1} - a$
etc., sont exactement divisibles par $b - a$; donc

$$f(b) - f(a)$$

est multiple de $b - a$, et, par conséquent, multiple d

2. *Si, dans un polynôme* f(x) *à coefficients enti
on remplace successivement la variable* x *par d*

(*) Voici l'énoncé de Gauss : *Soit* X *une fonction de l'indéterminée
cette forme* $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$, A, B, C, *etc., étant des nombre
tiers quelconques,* a, b, c *des nombres entiers et positifs. Si l'on don
des valeurs* congrues, *suivant un certain module, les valeurs résultantes*
X *le seront aussi.* (Section I, n° 9.)

nombres entiers quelconques a, b, *positifs ou négatifs, et qu'on divise les résultats* f(a), f(b) *de ces substitutions par la différence* b — a *des nombres substitués, les restes des deux divisions seront égaux entre eux.*

Car, soient r et r' ces restes et q et q' les quotients correspondants, on aura

$$f(a) = (b-a)\,q + r,$$
$$f(b) = (b-a)\,q' + r',$$

d'où

$$f(b) - f(a) = (b-a)(q'-q) + r' - r.$$

Or, chacun des deux restes r, r' étant moindre que le diviseur correspondant $(b-a)$, la différence $r'-r$ de ces restes est nécessairement plus petite que $(b-a)$; d'ailleurs (n° 1), $f(b) - f(a)$ est divisible exactement par $(b-a)$, donc

$$r' - r = 0,$$

d'où

$$r' = r.$$

On démontrerait de même que les restes des divisions de $f(a)$, $f(b)$ par un sous-multiple quelconque n de $b-a$ sont égaux entre eux.

3. *Si l'on remplace successivement* x *dans le polynôme* f(x) *à coefficients entiers par les nombres entiers consécutifs* a, a + 1, a + 2, *etc., positifs ou négatifs, et qu'on divise par un certain nombre entier* n *les résultats* f(a), f(a + 1), f(a + 2), *etc., de ces substitutions, les restes des* n *premières divisions se reproduiront indéfiniment dans le même ordre.*

En effet, nommons b le $(n+1)^{ième}$ terme de la suite indéfinie a, $a+1$, $a+2$, etc., il en résultera

$$b - a = n.$$

Donc (n° 2) les restes des divisions de $f(b)$ et $f(a)$ par

n seront égaux. De même, les restes des divisions
$f(b+1)$ et $f(a+1)$ par n seront égaux puisque

$$(b+1)-(a+1)=b-a=n.$$

Et ainsi de suite. On voit donc que les n premiers re
se reproduiront indéfiniment dans le même ordre. Il
à observer qu'on trouverait aussi les mêmes restes, n
dans un ordre inverse, en divisant successivement p
les nombres $f(a-1)$, $f(a-2)$, $f(a-3)$, etc. C
résulte évidemment de ce qui vient d'être démontré.

4. *Si, dans le premier membre d'une équation*

$$f(x)=0,$$

à coefficients entiers, on remplace successivement l
connue x *par* n *nombres entiers consécutifs* a, a +
a + 2,..., a + (n — 1), *positifs ou négatifs, et que*
résultats de ces substitutions ne soient, aucun, divisi
par n, *l'équation proposée n'admettra aucune ra*
entière (*).

Car si α représente un nombre entier quelconque,
sitif ou négatif, le reste de la division de $f(\alpha)$ par n
égal à l'un des restes des divisions par n des n nombr

$$f(a),\ f(a+1),\ f(a+2),\ldots,\ f(a+n-1)\ \text{(n° 3}$$

or, d'après l'hypothèse, aucun de ces restes n'est nul, d
$f(\alpha)$ est égal à un multiple quelconque de n, augme
d'un nombre plus petit que n et autre que zéro, par c

(*) « On voit en général que lorsque X est de la forme

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots,$$

A, B, C, etc., étant entiers et n entier et positif, l'équation

$$X=0$$

n'aura aucune racine rationnelle, s'il arrive que pour un certain mo
la congruence $X \equiv 0$ ne soit pas satisfaite. » (*Recherches arithméti*
section I, n° 11.)

ment $f(\alpha)$ ne peut être nul. Ainsi l'équation proposée
lmettra pour racine aucun nombre entier.

De là, les remarques suivantes :

°. *Quand le terme indépendant de l'inconnue d'une
ation*

$$f(x) = 0,$$

*oefficients entiers, est un nombre impair et que la
me des coefficients des termes qui contiennent l'in-
nue est un nombre pair, l'équation ne peut admettre
r racine aucun nombre entier.*

ar les substitutions de 0, 1 à x donnent pour résul-
deux nombres $f(0)$, $f(1)$ qui, par hypothèse, ne
, aucun, divisibles par le nombre, 2, des substitutions ;
c (n° 4) l'équation n'admet aucune racine entière.

omme exemple, considérons l'équation

$$x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 12x - 75 = 0,$$

t le dernier terme -75 est impair. La somme des
ficients des termes dépendants de x est le nombre
-16 ; donc l'équation n'aura aucune racine entière.
n sait d'ailleurs qu'elle ne peut admettre de racines
tionnaires puisque le coefficient de son premier terme
'unité ; par conséquent, ses racines réelles sont in-
mensurables.

°. *Si les résultats des substitutions de* $-1, 0, +1$ *à
connue* x dans le premier membre *d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

oefficients entiers, ne sont, aucun, multiples de 3,
uation n'admettra aucune racine entière.

'est ce qui résulte de la proposition démontrée n° 4,
upposant $a = -1$ et $n = 3$.

renons pour exemple l'équation

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 3x - 80 = 0.$$

En remplaçant successivement x par $-1, 0, +1$, il

vient :

$$f(-1) = -94; \quad f(0) = -80, \quad f(1) = -82.$$

Aucun des nombres 94, 80, 82 n'est multiple de 3, d
l'équation proposée n'a pas de racine entière.

3°. *Lorsque la somme des coefficients de tous les t
mes d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

*à coefficients entiers, est un nombre impair, l'équat
ne peut admettre pour racine aucun nombre impair.*

En effet, le reste de la division de $f(1)$ par 2
égal à l'unité, puisque, d'après l'hypothèse, la som
des coefficients de tous les termes de l'équation est
nombre impair. Il en résulte (n° 3) que si l'on divise
2 les nombres $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, etc., $f(-1)$, $f(-$
$f(-5)$, etc., les restes des divisions seront constamm
égaux à l'unité. De sorte que si l'on remplace x par
nombre impair quelconque, dans $f(x)$, le résultat d
substitution sera lui-même un nombre impair. Donc
quation n'admettra pour racine aucun nombre impair

Soit, par exemple, l'équation

$$x^4 - 40x^3 + 32x^2 - 18x - 90 = 0,$$

dans laquelle la somme des coefficients est le nombre i
pair -115. Les diviseurs impairs 3, 5, 9, 15, 45
dernier terme ne peuvent être racines de l'équation.

G.

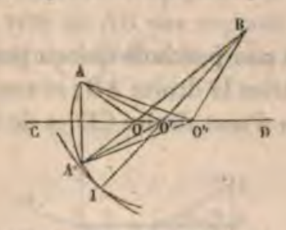
Note. Cette élucidation de Gauss renferme la soluti
de la question 345 (p. 383). En 1812, M. Piobert, al
élève au lycée Napoléon, classe de M. Dinet, a énoncé
théorème : Lorsque la somme des coefficients est impai
la racine ne peut être paire. Prochainement plusieu
démonstrations directes. [Tm.

CONVEXITÉ DE L'ELLIPSE ET DE LA PARABOLE INIES PAR LA PROPRIÉTÉ FOCALE DE LA TANGENTE;

PAR M. A. VACHETTE.

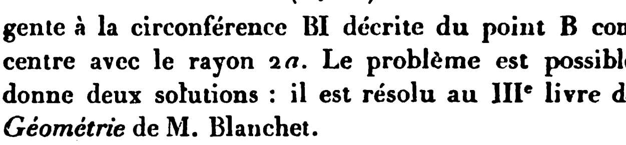
Un polygone plan est convexe s'il est tout entier à e ou à gauche de la direction prolongée d'un quel-ue de ses côtés : il en résulte que son périmètre ne être rencontré par une droite en plus de deux points, riété caractéristique de la convexité. Une courbe e, limite des polygones infinitésimaux qu'on peut lui ire, est convexe dans les mêmes conditions.

Le plus court chemin brisé de A en B, dont le som-soit sur CD, a pour sommet le point O obtenu en



ant à B le point A′, symétrique de A par rapport à CD; autre chemin AO′B est plus long, car AO′ + O′B ′O′ + O′B est plus long que AO + OB ou A′OB.

part et d'autre du point O, il ne peut y avoir que chemins brisés égaux; du même côté que O′, + O″B ou A′O″ + O″B est plus grand ou plus pe-ue AO′ + O′B ou A′O′ + O′B; de l'autre côté du t O, il ne pourra exister qu'un seul chemin brisé à AO′B. Si la somme AO′ + O′B = 2a est donnée us grande que AOB, le point O′ est le centre d'une nférence passant par les deux points A et A′ et tan-



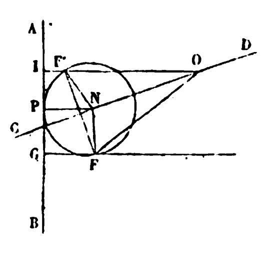
gente à la circonférence BI décrite du point B con centre avec le rayon $2a$. Le problème est possibl donne deux solutions : il est résolu au III[e] livre d *Géométrie* de M. Blanchet.

Au point O, les droites AO et BO font des angles ég avec CD.

3. Supposons que A et B soient les deux foyers d' ellipse dont le grand axe est $2a$; si le chemin minim AOB est plus petit que $2a$, CD est une sécante qui coupe l'ellipse qu'en deux points; s'il est égal à $2a$, est une tangente n'ayant que le point O commun a l'ellipse, et on voit que la tangente fait au point de c tact des angles égaux avec les rayons vecteurs; s'il plus grand que $2a$, CD est extérieure à l'ellipse.

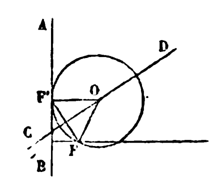
Tout ce qui précède s'applique, sans aucun chan ment, au cas où la droite CD rencontre en O la droite foyers A et B.

4. Supposons une parabole qui ait pour foyer le p F et pour directrice la droite AB, et examinons les r tions de position d'une droite CD et de la courbe. Si

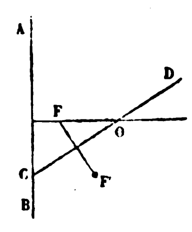


point F', symétrique de F par rapport à CD, est même côté de AB que le point F, en menant F' O p rallèle à l'axe FG, on détermine sur CD l'intersecti O, point plus rapproché du foyer que de la directri car on a OF ou $OF' < OI$. On peut alors trouver s CD deux points seulement qui soient à égale distan

oyer et de la directrice; l'un de ces points, N, e centre d'une circonférence passant par les deux s F et F′ et tangente à la droite AB. Le problème est ble et donne deux solutions; il est aussi résolu au ivre de l'ouvrage de M. Blanchet. La droite CD est écante qui ne coupe la parabole qu'en deux points. point F′ est sur AB, le point O est lui-même le centre circonférence; il n'y a qu'une solution; CD est une



nte qui fait au point de contact O des angles égaux le rayon vecteur et une parallèle à l'axe. Si le point de l'autre côté de AB par rapport au point F, le ème devient impossible et la droite CD est extérieure parabole.



la droite CD rencontre l'axe au delà du point F en e point F′ occupe la première des trois positions que avons examinées et CD est nécessairement sécante.

ote. Ceci revient à ce problème: Le centre, le foyer directrice d'une conique et une droite étant donnés, ver l'intersection de la droite et de la conique sans la re. La propriété fondamentale de la directrice fournit solution immédiate. Tm.

QUESTIONS.

351. Soient les équations

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0 \qquad (\text{racines } \alpha, \alpha', \alpha''),$$
$$x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0 \qquad (\text{racines } \beta, \beta', \beta''),$$

et posons

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3r - p^2q^2,$$
$$\Delta' = 27r'^2 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3r' - p'^2q'^2.$$

Démontrer que l'équation suivante en t

$$t[t + (p^2 - 3q)(p'^2 - 3q')]^2$$
$$- \frac{1}{16}\left(\sqrt{\Delta}\frac{d\Delta'}{dr'} \pm \sqrt{\Delta'}\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 = 0$$

a pour racines les quantités $D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2$.

(Michael Roberts.)

352. Étant donné le volume d'un secteur sphérique quelle est la valeur extrême de l'aire *totale* du secteur Discussion du problème.

SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 305);

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

…ient $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, n points matériels d'égales …es; G_2 le centre de gravité de P_1 et P_2; G_3 le centre …avité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2; G_4 le …re de gravité de P_4 et de $P_1 + P_2 + P_3$ posées en G_3, …nsi de suite; de sorte que G_n est le centre de gravité … et de P_{n-1}; G_n est indépendant de la manière dont …rend les masses; désignons par $A_{(i)}$ la distance de … à P_i, la quantité

$$\frac{1}{2}(A_2)^2 + \frac{2}{3}(A_3)^2 + \frac{3}{4}(A_4)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right) A_n^2$$

…onstante, dans quelque ordre qu'on prenne les mas-

(STEINER.)

…*bservation*. G_1 est la même chose que P_1 : ainsi A_2 … distance de P_1 à P_2.

…ient x_r, y_r, z_r les coordonnées rectangulaires du … P_r; α_r, β_r, γ_r celles du point G_r. On a

$$\alpha_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, x_s\,(*),\quad \beta_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, y_s,\quad \gamma_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, z_s,$$

(*) $\sum_1^r {}_s$ signifie qu'il faut donner à s toutes les valeurs de la suite …, r. TM.

et

$$A_r^2 = (\alpha_{r-1} - x_r)^2 + (\beta_{r-1} - y_r)^2 + (\gamma_{r-1} - z_r)^2.$$

En substituant les valeurs ci-dessus, on aura

$$(r-1)^2 A_r^2 = \left[\sum_1^{r-1}{}_s x_s - (r-1)x_r\right]^2 + \left[\sum_1^{r-1}{}_s y_s - (r-1$$

$$+ \left[\sum_1^{r-1}{}_s z_s - (r-1)z_r\right]^2.$$

Mais

$$\left[\sum_1^{r-1}{}_s x_s - (r-1)x_r\right]^2$$

$$= (r-1)\sum_1^{r-1}{}_s (x_s - x_r)^2 - \frac{1}{2}\sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{r-1}{}_j (x_i - x_j)^2;$$

par conséquent, si l'on suppose

$$\left[\sum_1^{r-1}{}_s x_s - (r-1)x_r\right]^2 = (r-1)^2 \delta_r^2,$$

on a

$$a_2\delta_2^2 + a_3\delta_3^2 + \ldots + a_n\delta_n^2 = \sum_1^n{}_i \alpha_i \sum_1^{i-1}{}_j (x_i - x_j)^2$$

où

$$(1)\quad \alpha_i = \frac{1}{i-1}a_i - \frac{1}{i^2}a_{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2}a_{i+2} - \ldots - \frac{1}{(n-1)}$$

On en déduit tout de suite que

$$a_2 A_2^2 + a_3 A_3^2 + \ldots + a_n A_n^2 = \sum_{i}^{n} \alpha_i \sum_{j}^{i-1} \delta_{i,j}^2,$$

où $\delta_{i,j}$ est la distance entre les points P_i, P_j. Le premier membre de cette équation se réduira à une constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses, en supposant

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n;$$

or l'équation (1) et ses analogues nous donnent

$$a_i = (i-1)\, a_i + \frac{i-1}{i}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \ldots + \alpha_n);$$

par conséquent, si l'on fait

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = m,$$

on a

$$a_i = \frac{i-1}{i} mn$$

et

$$\frac{1}{2} A_2^2 + \frac{2}{3} A_3^2 + \frac{3}{4} A_4^2 + \ldots + \frac{n-1}{n} A_n^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \delta_{i,j}^2.$$

Théorème. Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques moins le quatrième fasse un carré. (Euler.)

Théorème. ABC, triangle sphérique; O, centre de la sphère; V_1, volume du parallélipipède qui a pour arêtes OA′, OB′, OC′; A′, B′, C′ sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a $V = \sin \frac{1}{2} S$.

(Cornélius Keogh.)

DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SUR LA DROITE ET LE CERCLE;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

1°. Soient

$$\frac{x-a_r}{\alpha_r}=\frac{y-b_r}{\beta_r}=\frac{z-c_r}{\gamma_r}$$

les équations d'une droite l_r. Si l'on pose

$$A_r = b_r\gamma_r - c_r\beta_r,$$
$$B_r = c_r\alpha_r - a_r\gamma_r,$$
$$C_r = a_r\beta_r - b_r\alpha_r,$$

les conditions pour que quatre droites l_1, l_2, l_3, l_4 s[oient] génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe [sont] données par l'équation

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire par les équations qu'on obtient en égala[nt à] zéro chacun des déterminants du quatrième ordre q[u'on] déduit de cette forme. On sait que cela conduit à [trois] seules équations indépendantes (*).

(*) Ces lettres prises quatre à quatre donnent quinze détermina[nts du] quatrième ordre qui se réduisent à trois, savoir $A_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $B_1, \alpha_1, [\beta_1, \gamma_1]$; $C_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. TM.

La condition analogue dans la géométrie plane est

$$\begin{vmatrix} C_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ C_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ C_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle est vérifiée lorsque les trois droites l_1, l_2, l_3 passent par un même point.

2°. Trois cercles A, B, C étant donnés dans le même plan, soient :

$$l = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles B, C;

$$m = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles C, A;

$$n = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles A, B; et

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0$$

les équations des polaires de l'origine par rapport à chacun des cercles A, B, C : l'équation

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

représente le cercle orthotomique aux trois cercles donnés.

Observation. L'équation de ce lieu géométrique a été donnée récemment par M. Salmon (*Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, dec. 1855) sous la

forme

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx}, & \frac{dA}{dy}, & \frac{dA}{dz} \\ \frac{dB}{dx}, & \frac{dB}{dy}, & \frac{dB}{dz} \\ \frac{dC}{dx}, & \frac{dC}{dy}, & \frac{dC}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ étant les équations des cercles.

On peut assez facilement passer de l'une à l'autre forme.

QUESTIONS.

353. Soit ABCD un quadrilatère coupé par une transversale en α sur le côté AB et en β sur le côté opposé CD: soient α' le conjugué harmonique de α par rapport aux points A, B, et β' le conjugué harmonique de β par rapport aux points C, D; menons la droite $\alpha'\beta'$, faisons une construction analogue sur les côtés opposés AC, BD et sur les diagonales AD, BC : les trois droites passent par le même point. (De Lafitte.)

354. Soit un point fixe O dans le plan d'un quadrilatère. On construit par rapport à ce point les polaires des sommets opposés A et D, et le point d'intersection de ces polaires; on fait la même opération par rapport aux sommets opposés B et C et par rapport aux points de concours des côtés opposés : les trois points d'intersection sont en ligne droite. (De Lafitte.)

355. Par le point fixe O on mène des rayons vecteurs aux six points milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère; par chaque point milieu, on mène une parallèle au rayon vecteur qui va au côté opposé : les six parallèles se coupent en un même point. (De Lafitte.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XV.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Géométrie des lignes planes spéciales.

Coniques planes.

Surfaces du second degré.

Géométrie pratique.

Mécanique.

Calcul infinitésimal; séries.

Physique mathématique; Astronomie; Gnomonique.

Questions proposées.

Questions résolues.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

Pages.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les quinze premiers volumes.

Nos.	Pages.
TOME II.	
61	48
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VII.	
190	246
192	368
193	368
TOME VIII.	
199	44
TOME X.	
240	357
245	358
TOME XI.	
251 (échec)	115
252 (domino)	115
266	401
TOME XII.	
270	99
280	327
TOME XIII.	
289	192
TOME XIV.	
307	262
313	305
TOME XV.	
316	52
317	52
319	52
324	229
325	229
331	243
333	243
334	243
337	290
342	353
343	353
347	387
349	407
350	407
351	458
352	458
353	464
354	464

Observation. **Sur 354 questions, il en reste 35 à résoudre. Les autres sont résolues et imprimées, ou bien en manuscrit, et paraîtront en 1857.**

ERRATA.

Page 117, ligne 9 en rem., *au lieu de* 1773, *lisez* 1713.

230, ligne 15, *au lieu de* $\sqrt{-(4q^2+27r^2)}$, *lisez* $\sqrt{-(4q^3+27r^2)}$.

246, ligne 5 en rem., *au lieu de* R + ε, *lisez* R — ε.

254, ligne 13 en rem., *au lieu de* valeurs différentes, *lisez* signes différents.

271, ligne 10, degré, *ajoutez* de l'équation.

273, ligne 7 en rem., *au lieu de* 7, *lisez* 2.

276, ligne 7 en rem., *au lieu de* S_{r+1}, *lisez* S_{r-1}.

305, ligne 8, *au lieu de* $\frac{1}{x}$, *lisez* $\frac{1}{2}$.

352, ligne 11 en rem., *au lieu de* 279, *lisez* 297.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

BIBLIOGRAPHIE.

TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, pubblicati da *Baldassare Boncompagni* secondo la lezione di un codice della Biblioteca ambrosiana di Milano. Firenze, tipografia galileiana di M. Cellini. 1854. — *Trois écrits inédits de Léonard de Pise*, publiés par M. Baldassare Boncompagni, d'après un manuscrit de la Bibliothèque ambrosienne de Milan. In-8 de 122 pages et 1 planche (voir *Bulletin*, t. I, p. 173).

Le premier écrit est intitulé *Flos* (1-44);
Le deuxième *De Avibus* (44-54);
Le troisième *Liber quadratorum* (55-122).

En tête du *Flos* on lit : *Incipit flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarumdam quæstionum ad numerum et ad geometriam vel ad utrumque pertinentium*. Il est dédié au cardinal Raniero Capocci de Viterbe, créé cardinal au titre de Sainte-Marie en Cosmedin, par le célèbre pape Innocent III. Ce cardinal, qui paraît avoir aimé et cultivé les mathématiques pures, avait demandé

à Léonard une copie de ses ouvrages : *Quod meorum operum copiam non præceptive saltim, quod vos magis decebat, sed simpliciter petere fuistis per litteras Vestræ Sanctitatis dignati.* « Vous n'avez pas commandé comme il appartenait à votre dignité, mais vous avez daigné demander simplement une copie de mes ouvrages. » Il l'a intitulé *Flos* en honneur de Son Eminence, rayonnant d'une éloquence fleurie parmi les savants, *florida clericorum elegantia radiantibus*, et aussi parce que plusieurs questions, quoique épineuses (*nodose*), sont exposées d'une manière fleurie (*floride*) ; et de même que les plantes ayant des racines en terre surgissent et montrent au jour des fleurs, ainsi de ces questions on en déduit une foule d'autres. Il finit par dire qu'il se soumettra aux corrections que le cardinal voudra lui indiquer (*et me ipsum correctioni Dominationis Vestræ affectuosius supponendo*).

On lit ensuite ce nouveau titre : *Explicit prologus, incipit tractatus ejusdem.* Ceci a besoin d'explication. Il paraît que Léonard mit par écrit les réponses qu'il fit aux questions de Jean de Palerme, lors du passage de Frédéric II par Pise et il adressa cet écrit à l'empereur. (*Cum coram Majestate Vestra, gloriosissime princeps Friderice, magister Johannes Panormitanus, philosophus vester, ipsis mecum multa de numeris contulisset.*)

Le cardinal, ayant eu connaissance de cet écrit, en demanda une copie. Alors Léonard fit une seconde édition, sous le titre de *Flos*, qu'il dédia au cardinal, et cette dédicace sert de prologue qui explique le titre *Flos explicit prologus*, et puis commence le traité, *Incipit tractatus ejusdem.*

La première question est : Trouver un nombre carré qui, augmenté et diminué de 5, reste toujours un nombre

carré (p. 2). Léonard répondit à maître Jean que le nombre carré est

$$11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 (*).$$

Après avoir longtemps réfléchi sur la solution de cette question, il vit qu'elle tenait à certaines propriétés générales des nombres carrés, ce qui, dit-il, lui donna occasion de composer un opuscule sur les nombres carrés pour *glorifier Sa Majesté* et qui contiendra les raisonnements et les démonstrations.

Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predictæ quæstionis solutio, inveni ipsam habere originem ex multis accidentibus, quæ accidunt quadratis numeris, et inter quadratos numeros; quare hinc sumens materiam, libellum incepi componere ad Vestræ Majestatis Celsitudinis gloriam quem Libellum Quadratorum *intitulavi.*

La seconde question est géométrique : il s'agit de trouver, au moyen d'une des quinze espèces de longueurs du Xe livre d'Euclide, une longueur x qui satisfasse à la condition

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Léonard démontre d'une manière très-rigoureuse qu'aucune des quinze longueurs euclidiennes ne peut satisfaire, par des considérations géométriques que M. Woepcke a traduites avec intelligence en caractères algébriques, qui donnent toujours plus de précision et plus de clarté quand il

(*) Nous nous servons de signes actuellement en usage.

s'agit de nombres (*Journal* de M. Liouville, t. XX, 1855). En voici la substance. La valeur de x est comprise entre 1 et 2, donc x n'est pas un nombre entier.

1°. x n'est pas non plus un nombre fractionnaire $\frac{\alpha}{\beta}$ qu'on peut toujours supposer irréductible; car on a

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{2\alpha^2}{\beta^2} + \frac{10\alpha}{\beta} = \frac{\alpha[\alpha^2 + (2\alpha + \beta)\beta]}{\beta^3} = 20;$$

équation impossible.

Léonard se sert d'un moyen qui revient au même, mais qui est plus long. Il suit la méthode des Arabes, qui décomposent la puissance des fractions en une somme de fractions ordonnées suivant la puissance négative du dénominateur. Par exemple,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{\alpha_1}{b^m} + \frac{\alpha_2}{b^{m-1}} + \frac{\alpha_3}{b^{m-2}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{b},$$

les α sont plus petits que b, à l'exception des α_m qui peut surpasser b; cela revient à écrire les fractions dans un système de numération dont la base est b. Ainsi

$$\frac{\alpha_3}{\beta^3} = \frac{\alpha_1}{\beta^3} + \frac{\alpha_2}{\beta^2} + \frac{\alpha_3}{\beta} \ldots .$$

2°. x ne peut avoir la forme $\sqrt{n}$ où n est rationnelle, car

$$x = \frac{20 - 2x^2}{x^2 + 10};$$

équation impossible.

3°. x n'est pas de la forme $\sqrt[4]{n}$; on aurait

$$n^{\frac{1}{4}} + \frac{n^{\frac{3}{4}}}{10} = 2 - \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{10};$$

équation dont Euclide démontre l'impossibilité (livre X, 38).

Observation. D'après un théorème connu, on peut démontrer directement que l'équation donnée et l'équation

$$x^4 - n = 0$$

ne peuvent avoir de racines communes. Ce même moyen de démonstration est applicable à tous les cas.

4°. x n'a aucune des formes

$$\sqrt{m} + \sqrt{n}, \quad \sqrt{m + \sqrt{n}}, \quad \sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}};$$

ces lignes *apotomes*, *médiales*, *binomiales* d'Euclide étant exclues, Léonard donne, on ne sait par quelle méthode, cette valeur approchée, d'une surprenante exactitude (*) :

$$x = 1.22'.7''.42'''.30^{\text{iv}}.4^{\text{v}}.40^{\text{vi}},$$

car, à la manière arabe, il procède par soixantièmes.

M. Woepcke trouve

$$x = 1,3688081078 21;$$

réduite en fractions sexagésimales, il trouve

$$x = 1.22'.7''.42'''.33^{\text{iv}}.4^{\text{v}}.38,5^{\text{vi}}.$$

Les 30^{iv} de Léonard sont une faute du copiste qui a mis 30 au lieu de 33, faute qui se reproduit encore dans trois autres endroits.

M. Lebesgue conjecture avec raison que Léonard se sera servi de la méthode suivante employée depuis par Viète. L'équation n'ayant qu'une seule racine positive, on

(*) *Quia hæc quæstio solvi non potuit in aliquo suprascriptorum, studui solutionem ejus ad propinquitatem reducere.*

fait

$$x = 1 + \frac{y}{60};$$

l'équation en y n'a encore qu'une seule racine positive, dont on trouve facilement la partie entière, et ainsi de suite (Tortolini, *Annali di scienze matematiche e fisiche*, aprile 1855, p. 155).

M. Lebesgue fait observer que Léonard a bien vu que le Traité des Incommensurables d'Euclide gagnerait à être exposé numériquement. Non-seulement il a *vu*, mais il a fait cette exposition numérique :

Et quia difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum Xm librum glosare incepi, reducens intellectum ejus ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur (p. 3).

Aussi tous ses raisonnements roulent sur les nombres, qu'il représentait, il est vrai, par des lignes, n'ayant pas encore de signes algébriques à sa disposition. Il *parle* algèbre comme les Arabes, mais ne sait pas l'écrire ; cela arrive même quelquefois à des géomètres de nos jours.

Le célèbre arithmologue de Bordeaux établit les quatre propositions suivantes :

I. P, Q, R, S, m, n étant six nombres *rationnels*, et m, n, mn, $\frac{m}{n}$ n'étant pas des carrés, l'équation

$$P + Q\sqrt{m} + R\sqrt{n} + S\sqrt{mn} = 0$$

ne peut subsister à moins que l'on n'ait

$$P = Q = R = S = 0,$$

car on déduit de cette équation

$$P^2 + mQ^2 - n(R^2 + mS^2) = 2(nRS - PQ)\sqrt{m};$$

donc

$$P^2 + mQ^2 = n(R^2 + mS^2), \quad nRS = PQ,$$

de là

$$(PR - mQS)(PS - QR) = 0,$$
$$PR - mQS = 0, \quad PS = QR,$$

et

$$PS^2 = QRS = \frac{PQ^2}{n}, \quad n = \frac{Q^2}{m} = \left(\frac{Q}{P}\right)^2,$$

contraire à l'hypothèse;

$$PR = mQS, \quad PQR = mQ^2S = nR^2S, \quad \frac{m}{n} = \left(\frac{R}{Q}\right)^2,$$

contraire à l'hypothèse.

On ne peut donc satisfaire à l'équation qu'en posant

$$P = Q = R = S = 0.$$

II. Si l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

a ses coefficients rationnels, α, β, γ, m, n étant cinq nombres rationnels, m, n, $\frac{m}{n}$ n'étant pas des carrés, on ne peut avoir

$$x = \alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n},$$

à moins que β ou γ ne soit nul. En effet, on a

$$x^2 = \alpha' + \beta'\sqrt{m} + \gamma'\sqrt{n} + \delta'\sqrt{mn},$$
$$x^3 = \alpha'' + \beta''\sqrt{m} + \gamma''\sqrt{n} + \delta''\sqrt{mn},$$

les α, β, γ, δ sont des nombres rationnels.

Substituant ces valeurs dans l'équation donnée et égalant à zéro les coefficients des irrationnels et la quantité rationnelle, on obtient quatre équations. Les coeffi-

cients de $\sqrt{m}$ et $\sqrt{n}$ donnent

$$\beta'' + A\beta' + B\beta = 0,$$
$$\gamma'' + A\gamma' + B\gamma = 0,$$

de là

$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = 0.$$

Mettant pour β'', γ'' leurs valeurs, savoir

$$\beta'' = \beta(3\alpha^2 + m\beta^2 + 3n\gamma^2), \quad \gamma'' = \gamma(3\alpha^2 + n\gamma^2 + 3m\beta^2),$$

on obtient

$$2\beta\gamma(m\beta^2 - n\gamma^2) = 0,$$

on ne peut mettre

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2,$$

donc l'on a

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma = 0.$$

Si l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

n'a que des coefficients rationnels, il n'y a pas de racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n}}$, à moins que β ou γ ne soit nul.

Car on a

$$(x^3 + Bx)^2 - (Ax^2 - C)^2 = 0;$$

faisant

$$x^2 = y,$$

on trouve

$$y^3 + A_1 y^2 + B_1 y + C^2 = 0;$$

A_1 et B_1 sont rationnels.

Cette équation n'a pas de racine de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{m} + \gamma\sqrt{n},$$

à moins que β et γ ne soient nuls. Donc l'équation n'a pas de racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{m} + \gamma \sqrt{n}}$.

IV. Supposons

$$\gamma = 0,$$

l'équation

$$x^3 + A x^2 + B x + C = 0$$

ne peut avoir une racine de la forme $\alpha + \beta \sqrt{m}$, à moins d'avoir une racine réelle, car elle a aussi pour racine $\alpha - \beta \sqrt{m}$; et a, par conséquent, un facteur rationnel du second degré, donc aussi un facteur rationnel du premier degré. On démontre de même que l'équation n'a pas une racine de la forme $\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{m}}$ à moins que l'équation en y n'ait une racine rationnelle.

Il suit de tout ceci que l'équation de Léonard n'a aucune racine de ces quatre formes

$$\alpha + \beta \sqrt{m} + \gamma \sqrt{n}, \quad \sqrt{\alpha + \beta \sqrt{m} + \gamma \sqrt{n}},$$
$$\alpha + \beta \sqrt{m}, \quad \sqrt{\alpha + \beta \sqrt{m}};$$

ce sont les irrationnelles du X[e] livre d'Euclide.

Voici la troisième et dernière question proposée par maître Jean :

De tribus hominibus pecuniam communem habentibus (p. 17). *In palatio vestro Pisis coram Vestra Majestate.*

Nous traduisons la question, avec M. Boncompagni, en langage algébrique.

Trois hommes ont *en commun* une somme inconnue t; la part du premier est $\frac{1}{2}t$; du second $\frac{1}{3}t$, et par conséquent du troisième $\frac{1}{6}t$. Voulant déposer cette somme en lieu plus sûr (*ad tutiorem locum*), ils prennent au hasard

(*fortuitu*) le premier x qui n'en dépose que $\frac{1}{2}x$, le second y et n'en dépose que $\frac{1}{3}y$, et le troisième z et n'en dépose que $\frac{1}{3}z$; de sorte que la somme déposée se monte à $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z$, et lorsqu'ils retirent ce dépôt, chacun en prend le tiers; il s'agit de trouver les valeurs de x, y, z.

Faisons

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=u,$$

c'est u qu'il appelle la *chose* (*posui rem*).

Le premier a gardé $\frac{1}{2}x$ et reçoit u; donc on a

$$\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}t-u;$$

de même pour le second

$$\frac{2}{3}y+u=\frac{1}{3}t-u;$$

et pour le troisième

$$\frac{5}{6}z+u=\frac{1}{6}t-u;$$

De là on tire

$$x=t-2u,$$
$$y=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}u,$$
$$z=\frac{1}{3}t-\frac{6}{5}u,$$

$$x+y+z=t=\frac{17}{10}t-\frac{47}{10}u,\quad \frac{7}{10}t=\frac{47}{10}u,\ 7t=47u;$$

problème indéterminé.

Il pose

$$u = 7,$$

si ponatur rem esse VII.

On a

$$t = 47, \quad x = 33, \quad y = 13, \quad z = 1.$$

Ces équations traduisent fidèlement la suite des raisonnements de l'auteur. Il dit qu'il y a trois modes de solutions qu'il a donnés *in libro nostro quem de Numero composui.* C'est son Traité *de Abaco.*

Les nombres sont écrits tantôt en chiffres romains, tantôt en chiffres arabes.

La suite prochainement.

Traité de Géométrie, publié à Paris en 1855 en langue polonaise; par M. *G.-H. Nievenglowski*, examinateur au Lycée impérial de Saint-Louis (*).

Pendant qu'en France il y a une tendance à rendre la géométrie de plus en plus industrielle à vouloir même en faire une branche de la mécanique, à ne s'en servir que πρὸς ἀλφιτήν, on doit applaudir à l'homme de cœur qui reste fidèle au culte de l'*idéal*, tel qu'il a été professé par les Platon, les Euclide, les Archimède, tel qu'il est religieusement observé au cours *supérieur* de la Sorbonne. L'auteur m'a expliqué le contenu que de bonnes figures dans le texte font presque deviner. Comparez et jugez.

Ce Traité est divisé en dix livres; les cinq premiers renferment la géométrie plane, et les cinq derniers la géométrie de l'espace.

Le *Livre I* contient quarante théorèmes, savoir : la théorie des perpendiculaires, des parallèles, l'égalité des

(*) *Geometrya*, przez G.-H. Niewęglowskiego. Posnan, 1854 in-8 de 126 pages.

polygones et la symétrie des figures planes. Nous y remarquons entre autres le théorème : *Deux polygones équilatéraux entre eux sont égaux lorsqu'ils ont*, *excepté* trois, *tous les angles homologues égaux*. La démonstration du théorème énoncé d'une manière aussi générale ne se trouve pas, que nous sachions, dans nos Traités français (*voir* les *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 462). Ce livre contient aussi quatre problèmes résolus.

Le *Livre II* traite du cercle et renferme trente théorèmes et vingt-quatre problèmes. L'auteur y établit la méthode des limites et celle d'*Arbosgast* dont il se sert dans le cas des incommensurables. La mesure des angles est exposée avec toute l'étendue et toute la clarté désirables. On a placé ici les quadrilatères inscrit, circonscrit et ex-circonscrit. Parmi les problèmes, nous remarquons ceux-ci : *Diviser l'angle droit en* trois *parties égales*. — *Construire le triangle dont on connaît la hauteur*, *la médiane et la bissextrice*, *partant toutes trois d'un même sommet*. — *Étant donnés trois points* A, B, C *sur un plan*, *trouver le quatrième* D *d'où les distances* AB, BC *soient vues sous des angles donnés*, *etc*.

Le *Livre III* traite de la mesure des polygones et de leur similitude avec tous les détails désirables. On y trouve l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés ou des trois hauteurs ; en fonction des rayons inscrits et exinscrits. L'aire d'un quadrilatère inscriptible. La théorie des transversales. Les centres de similitude. Cercles réciproques. Ce livre renferme quarante-huit théorèmes et trente et un problèmes. Parmi ces derniers, nous remarquons la construction des racines d'une équation du deuxième degré et celle de $\sqrt[2^t]{N}$. — *Partager un trapèze en parties proportionnelles aux lignes données par des parallèles aux bases*. — *Construire un quadrilatère in-*

scriptible dont on connaît les quatre côtés. — Trouver le lieu des points également éclairés par deux points lumineux. — Le lieu des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous un même angle. — Tracer sur le terrain une parallèle à une droite donnée, etc. — Sur un polygone donné, circonscrire un polygone semblable à un polygone donné d'un même nombre de côtés. Enfin l'auteur y a donné tous les problèmes des contacts des cercles et des droites.

Le *Livre IV* traite des polygones réguliers convexes et *étoilés*, et de la mesure de la circonférence et du cercle. Du maximum des figures planes. Ce livre renferme vingt-trois théorèmes et seize problèmes avec des applications numériques. On y fait voir en quoi consiste la quadrature du cercle.

Le *Livre V* s'occupe des propriétés segmentaires. On y voit la division harmonique, le rapport anharmonique, l'axe radical, les polaires, les faisceaux, l'involution et la division homographique. Ici se trouve le problème d'un *cercle tangent à trois cercles donnés* résolu *directement*, c'est-à-dire que l'on donne immédiatement le centre et le rayon du cercle cherché ; la solution est ainsi amenée au dernier degré de simplicité. Ce livre, composé de vingt-trois théorèmes et de neuf problèmes, contient aussi l'hexagone inscriptible et circonscriptible et est terminé par les trois sections coniques.

Le *Livre VI* traite des plans et des angles solides. L'ordre que l'auteur y a suivi nous a paru logique. Il traite d'abord des droites et plans perpendiculaires, puis des plans perpendiculaires entre eux; ensuite viennent les droites et plans parallèles, les plans parallèles entre eux; enfin les angles solides. Ce livre contient quarante-huit propositions.

Le *Livre VII* traite des *polyèdres,* de leur mesure et

similitude, de la symétrie en général, et enfin des centres, axes et plans de similitude. Ce livre se compose de trente-huit théorèmes et de neuf problèmes. Nous y avons remarqué le théorème d'Euler, avec ses conséquences, et quelques théorèmes nouveaux sur l'égalité et la similitude des pyramides, comme : *Deux pyramides sont équiangles entre elles lorsqu'elles ont, excepté un, tous les angles dièdres homologues égaux et pareillement disposés. — Deux pyramides équiangles entre elles sont semblables, etc. — Le volume d'un tronc de parallélipipède a pour mesure le produit de la section droite par la moyenne arête latérale.* Les problèmes sont terminés par celui des *alvéoles.*

Le *Livre VII, de la sphère,* contient quarante-quatre théorèmes et vingt problèmes. C'est un livre très-important et qui contient beaucoup de détails. On y donne la mesure des angles solides, les théorèmes de Lexell et de Steiner, le quadrilatère inscriptible et le contact de cercles sur la sphère. Parmi les problèmes, nous remarquons le tracé de la tangente sphérique à un cercle donné et celui de la tangente sphérique commune à deux cercles donnés. Enfin la résolution du problème : *Construire un triangle sphérique dont on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.* C'est surtout la discussion de ce problème qui nous a paru très-remarquable par sa simplicité. Il est bon de connaître et d'apprécier ce problème que le Programme officiel a exclu de l'enseignement en donnant une singulière raison de cet ostracisme scientifique.

Le *Livre IX* traite de la mesure des trois corps ronds et des polyèdres réguliers. Il renferme vingt-neuf théorèmes et treize problèmes. La surface d'un cylindre, d'un cône de révolution, d'une zone, et par suite d'une sphère, est donné avec toute la rigueur désirable. Nous

y trouvons cet utile théorème : *La surface latérale d'un cône oblique, qui provient d'un cône de révolution, est égale à son volume divisé par le tiers de la distance de l'arête du cône au point où l'axe perce la base.* On a donné dans ce livre la quadrature des polygones sphériques et des fuseaux sphériques, cylindriques et coniques de révolution; le volume d'une pyramide sphérique et d'un onglet sphérique, cylindrique ou conique. A l'occasion des polyèdres réguliers, on a bien fait de mentionner les polyèdres *réguliers étoilés* de Kepler et de M. Poinsot, comme aussi les polyèdres semi-réguliers appelés *corps d'Archimède*. Le dernier problème donne le rayon des sphères inscrite et circonscrite en fonction du côté d'un polyèdre régulier, et réciproquement le côté, l'apothème, la surface et le volume de ces polyèdres en fonction du rayon de la sphère circonscrite.

Le *Livre X* parle des surfaces courbes en général très-succinctement, du plan tangent, des plans polaires, des plans radicaux. Des trois sections coniques. Des sections anti-parallèles. Intersection d'une sphère et d'un cône ou d'un cylindre; ligne d'entrée et de sortie, etc. Enfin les projections aconiques ou perspectives. Polaires dans les coniques. Le livre est terminé par ce problème : *Mener la tangente par un des cinq points d'une conique qui n'est pas tracée.*

Chaque livre est suivi des énoncés de plusieurs théorèmes à démontrer et de plusieurs problèmes à résoudre, choisis parmi ceux qui demandent quelque réflexion et un certain degré d'intelligence.

Le livre est terminé par trois notes sur la théorie des parallèles, la quadrature du cercle et l'involution, qui méritent d'être lues.

Quoique étranger à la langue slave, nous enregistrons avec une grande satisfaction cet inventaire de l'état ac-

tuel de la science comme elle devrait être enseignée dans nos lycées. Nous félicitons la patrie de Copernic de cette riche et estimable production.

O. TERQUEM, rédacteur.

BIOGRAPHIE.

HENRI-CHRISTIAN SCHUMACHER.

Né dans le hameau de Bramstedt, en Holstein, le 3 septembre 1780. Son père Andréas était conseiller royal de Danemark; la famille est venue, dans le XVI[e] siècle, de Westphalie en Danemark. Après divers emplois, il fut nommé bailli de l'arrondissement de Bramstedt où H.-C. Schumacher est né; et ensuite il fut maire (amtmann) à Segeberg, où il eut un second fils, Andreas-Anton-Friederich Schumacher. La mère était veuve d'un frère du célèbre géographe Busching. Les deux frères reçurent la première éducation à la maison. Schumacher montra dès l'enfance une prédilection pour les mathématiques qu'il apprit dans le cours de Wolf. Il étudia le droit à Kiel et fut reçu en 1806 docteur en droit à Gottingue. De là il passa quelques années comme précepteur dans une maison en Livonie. A son retour, il fit la connaissance du comte de Reventlow, curateur de l'université de Kiel, qui lui donna les moyens de se livrer entièrement aux mathématiques et à l'astronomie. Il passa quelques années à Gottingue auprès de Gauss. En 1811, il fut nommé professeur d'astronomie à Copenhague où Bugge était directeur. Avec la permission du roi, il accepta en 1812 la place de directeur à l'observatoire de Mannheim, se maria avant son départ avec Christine-Madeleine, née de

Schonn, dont il eut quatre fils et trois filles; l'aîné et le plus jeune des fils le précédèrent dans la tombe. Bugge étant mort, il fut nommé à sa place et fit les cours d'Astronomie en latin, et il vint à Paris et à Londres en 1819, en 1826 à Munich, et tous les ans il alla visiter Olbers à Brême.

Il forma comme disciples: MM. Gunlaa, professeur en Islande; Nissen; Deichgraf, à Tondern; Hansen, directeur à Gotha; Claussen, directeur à Dorpat; Peters, professeur d'astronomie à Konigsberg; et Petersen, son aide à l'observatoire d'Altona depuis 1827 (*).

Se sont exercés sous lui les directeurs: Olufsen à Copenhague; Sélander, à Stockholm; Svanberg, à Upsal; Fuss, à Vilna; Agaardh, à Lund; Gould, à Cambridge (Amérique septentrionale); son fils Richard Schumacher, MM. Old, Sonntagg, Quirling.

Il est mort le 28 décembre 1850 à 11 heures et demie du matin, d'une bronchite, et est enterré à Altona, à côté de sa mère morte le 30 octobre 1822. Son frère Andréas est au service militaire du Danemark.

Ouvrages de Schumacher.

1. Brahé (Tycho de) *Observationes cometæ anni* 1595, *Uraniburgi habitæ,* edidit H.-C. Schumacher. In-4, Altona; 1845.

2. *Ephemeris of the distances of the four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moons center for the years* 1822 *to* 1830; *to which are added tables for finding the latitude by Polar-Star for* 1821-30. Copenhague, 1820-28.

3. *Ephemeris of the distances of the four planets*

(*) Mort en 1855.

Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moons center in the year 1829. Copenhague, 1827.

4. *Ephemeris of the distances of the four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moons center for the year* 1833. In-8; Copenhague, 1831.

5. *Distances of the Sun und the four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the Moon, for the years* 1835, 1836, 1837, 1838. 4 volumes in-8; Copenhague, 1834.

6. *Tables auxiliaires astronomiques* pour l'année 1827. In-8, Copenhague. (En français.)

7. *Idem,* pour les années 1825-1827. 3 vol in-8. (En allemand.)

8. *Idem*, pour les années 1827-1829. In-8. (En allemand.)

9. *Idem,* pour les années 1820-1829. 10 vol. in-8. (En allemand.)

10. *Collection de Tables auxiliaires*. 2 vol. in-8. Copenhague, 1822. (En allemand.)

11. *Journal of observations made for ascertaining the time of the place in the observatory which was erected at Helgoland for that purpose.* In-4; Altona, 1825.

12. *De latitudine speculæ Havniensis.* In-4; Altona, 1827.

13. *Geometrie der Stellung*. Uebersetz von H.-C. Schumacher. 2 vol. in-8; Altona, 1810. (Traduction de la *Géométrie de position* de Carnot.)

14. Meliola (A.). *Tables des Logarithmes-nombres* (anti-logarithmes), avec une préface de Schumacher. In-12; Altona, 1840. (En allemand.)

15. *Tabula in qua inveniuntur logarithmi conormalis* (*n*) *radicæ terrestris* (*r*) *cum angulo intercepto* (*v*) *datæ latitudini astronomicæ* (*q*) *respondentes*. In-4; Copenhague.

16. Chelius (G. K). *Maasse u gewichtsbuch.* Livre des Poids et Mesures. 3e édition, par J.-F. Hanschild, avec une préface de Schumacher. In-8; Francfort-sur-Mein, 1830.

17. *Réseau trigonométrique du duché de Holstein.* Dessins à la plume sous la direction de Schumacher.

18. *Trigon. naet construert under direction of prof.* Schumacher *i Hertogdommet Lauenberg*, of P. Steffens. Dessin à la plume du réseau trigonométrique du duché de Lauenbourg.

19. Struve (W.). *Sur la dilatation de la glace,* d'après les expériences faites à Poulkova en 1845 et 1846 par Schumacher, Pohrt et Moritz. In-4; Saint-Pétersbourg. (En français.)

20. *Astronomische Nachrichten*, heraug von H.-C. Schumacher. Vol. I-XXXII, in-4. Altona, 1823-1850. (Nouvelles astronomiques.) (Prix : 460 francs.)

Inédit. Traité de cinq pages *Sur une méthode de Gauss de calculer les orbites des planètes.*

Inédit. Solution mathématique du problème: *Connaissant les hauteurs observées de deux étoiles, trouver leur latitude.*

Inédit. *Observations à la lunette méridienne faites à Mannheim et à Copenhague en* 1813 *et en* 1815. (En allemand.)

Inédit. *Journal des observations à l'observatoire de Mannheim en* 1813 *et en* 1814.

Inédit. *Traité de la détermination du temps par les azimuts.*

Observation. Cette liste est extraite du catalogue de livres et cartes composant la bibliothèque de feu H.-C. Schumacher, etc. Ire partie: Sciences mathématiques, physiques et naturelles. En vente aux prix marquées chez A. Asher et Ce, à Berlin. In-8 de 147 pages; 1855.

Ce catalogue, excellente production bibliographique, renferme 2556 articles, dans lesquels les ouvrages mathématiques sont compris depuis 874 jusqu'à 1762, en tout 889 ouvrages mathématiques. Collection formée par un simple particulier. Notre Observatoire, fondé par Louis XIV, successivement royal, national, impérial, nonobstant ces titres officiels, n'a pas ce qu'on peut appeler une bibliothèque. On n'y trouve même pas la collection complète de la *Connaissance des Temps* ni l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes. Il est urgent de faire disparaître cette honteuse lacune. Chaque année une somme devrait être portée au budget pour fonder une bibliothèque astronomique à l'Observatoire. On devrait même y transporter les ouvrages astronomiques de la Bibliothèque impériale. C'est là leur véritable place (*). Ces mesures sont dignes de l'illustre directeur qui s'est donné la sainte mission de relever l'astronomie en France, et de ramener les temps des Cassini, des Lacaille, des Lalande.

NOTICE HISTORIQUE SUR LA DUPLICATION DU CUBE.

L'influence immense de ce célèbre problème sur les progrès de la géométrie chez les Grecs nous engage à en donner un historique succinct, d'autant plus qu'il présente de bons sujets d'exercice. Dans cette vue, nous supprimons les démonstrations; aucune ne dépasse la portée d'un bon élève de mathématiques supérieures.

(*) Une bibliothèque *universelle* entraîne infailliblement avec elle un désordre universel; plus elle s'enrichit, moins on y trouve ce qu'on cherche. On rendrait à la Bibliothèque impériale un service immense en y laissant seulement les ouvrages purement littéraires, philosophiques, historiques, et en distribuant les ouvrages scientifiques parmi les bibliothèques spéciales de Paris.

Nous prenons pour guide cette excellente monographie: *Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas;* auctore Nicolao-Theodoro Reimer, philos. doct., Gottingue, MDCCXCVIII (1798), in-8 de XVI-222 pages.

C'est le développement d'une dissertation inaugurale que le savant auteur avait publiée au même endroit deux années auparavant.

Eratosthène (— 252), ayant construit un instrument pour la résolution du problème, le suspendit, comme offrande, à l'une des colonnes d'un temple, et y joignit une description en vers. Ptolémée Evergète (III) (de — 247 à — 222) en ayant entendu parler, voulut en avoir une connaissance plus détaillée. Eratosthène lui écrivit une lettre que nous a conservée, probablement dans son entier, Eutocius d'Ascalon (+ 401) dans son *Commentaire* sur les deux livres d'Archimède relatifs à la sphère et au cylindre.

On trouve cette lettre et le poëme dans le livre I des *Scholarum mathematicorum* de Ramus, dans l'édition d'Archimède, d'Oxford, p. 144, et aussi dans les œuvres de Viète, édition de Schooten, p. 348, mais avec quelques fautes.

Cette lettre contenant des renseignements sur l'origine du problème, nous en donnons la traduction ainsi que celle du poëme (*).

AU ROI PTOLÉMÉE, ÉRATOSTHÈNE, SALUT.

« On dit qu'un ancien tragique a mis en scène Minos faisant construire un tombeau pour Glaucus. Ce roi, en apprenant que le tombeau aurait cent pieds sur toutes les di-

(*) Elle a été faite par mon fils Alfred, élève au lycée Saint-Louis, et revue, ainsi que les passages grecs, par M. Vincent, membre de l'Institut.

mensions, dit à l'architecte: « Tu proposes un tombeau » trop petit pour le logis d'un roi ; qu'il soit doublé. »

» L'architecte ne se trompa point quant à la forme qui effectivement devait être cubique; mais il s'aperçut qu'il avait commis une erreur en doublant les côtés. En effet, en doublant les côtés, la surface devient quadruple et le volume octuple. Il s'informa auprès des géomètres pour savoir par quel moyen on pourrait doubler le cube en conservant toujours la forme cubique. Ce problème fut appelé la *duplication du cube*, attendu qu'étant donné un cube, il s'agissait de le doubler.

» Tous pendant longtemps restèrent indécis, lorsqu'Hippocrate de Chio imagina qu'en prenant deux droites dont la plus grande fût le double de la plus petite, et insérant entre ces droites deux moyennes en proportion continue, on parviendrait ainsi à doubler le cube; de sorte qu'il ramena une question difficile à une autre qui ne l'était pas moins. Quelque temps après, une peste étant survenue dans l'île de Délos et l'oracle ayant ordonné de doubler un des autels, les Déliens rencontrèrent la même difficulté. Ils envoyèrent auprès des géomètres de l'académie de Platon, pensant y trouver ce qu'ils cherchaient. Ceux-ci se livrèrent à d'actives recherches pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données ; et l'on dit qu'Archytas de Tarente résolut le problème en employant des demi-cylindres, et Eudoxe au moyen de certaines lignes courbes. Tous traitèrent la question théoriquement ; mais aucun ne put trouver une solution réalisable dans la pratique, excepté Ménechme qui y est parvenu depuis peu, et encore très-péniblement. Quant à nous, nous avons imaginé un instrument d'un emploi facile avec lequel on trouvera, non-seulement deux moyennes, mais encore autant qu'on en voudra. Au moyen de cet instrument, étant donné

un solide quelconque compris sous des faces parallélogrammes, nous pourrons le transformer en un cube, et plus généralement transformer une figure en une autre semblable, en augmentant les dimensions sans changer la forme. C'est ainsi que nous pouvons donner la forme cubique, par exemple, aux autels et aux temples, aux vases qui servent à mesurer les liquides et les choses sèches, de façon à pouvoir déduire des côtés de la figure la capacité du cube (*). Cette invention sera très-utile pour augmenter la force projective des machines qui servent à lancer des traits, des pierres, etc.: car il faut alors tout augmenter proportionnellement, les épaisseurs, les longueurs, les ouvertures, les cordages, etc., si l'on veut conserver la similitude; et tout cela ne peut se faire sans la recherche des moyennes. »

POEME.

« Mon cher, si tu veux doubler un cube ou transformer exactement une figure solide, voici ce que tu dois faire. Soit qu'il s'agisse de mesurer une enceinte, une cave ou une citerne de grande dimension, tu le pourras en faisant mouvoir deux règles moyennes proportionnelles entre deux extrêmes parallèles. Ainsi ne te fatigue pas avec les opérations difficiles des cylindres d'Archytas, ou avec les trois sections du cône de Ménechme, ou même en décrivant les lignes courbes du divin Eudoxe. Avec ces planchettes, tu construiras facilement une infinité de moyennes, en commençant par la plus petite. O Ptolémée, heureux père d'être le compagnon de jeunesse de ton fils et d'avoir pu l'orner de tous les dons chers aux muses en même temps qu'aux rois! O Jupiter céleste, que ce soit de ta propre main que plus tard il reçoive le sceptre! Que tout s'ac-

(*) Les autels de Jéhova n'étaient pas des cubes, mais formaient la moitie ou le double d'un cube (Exode 27; Paralip. 2,4). Ainsi le cube est un type païen, et le prisme droit à base carrée un type jéhoviste.

complisse ainsi, et qu'en voyant cette offrande, on dise : C'est un hommage d'Eratosthène de Cyrène. »

Nous reviendrons plus loin sur l'instrument et sur sa description.

L'auteur tragique dont il s'agit est évidemment Euripide (- 480) qui a fait une tragédie ayant pour sujet la fable de Glaucus. Le célèbre philologue hollandais Walkenaër a complété ainsi le second vers :

Διπλάσιος ἔστω, τοῦ κύβου δὲ μὴ σφαλῇς.

(*Diatribe de fragm. Euripid.*, p. 203.)

Telle est l'origine fabuleuse. Plutarque (—66), dans son écrit sur le génie familier de Socrate, raconte ainsi l'origine historique. Au siècle de Platon (— 452), une peste ravageait l'île de Délos et toute la Grèce. On consulta l'oracle de Delphes. Apollon répondit qu'il voulait qu'on lui élevât un autel double en volume de celui de Délos (*) et de même forme cubique. Les architectes firent la faute indiquée par Eratosthène ; et Philoponus (+617) (**), dans son *Commentaire* sur les Analytiques d'Aristote (Venet., 1534, p. 24) d'où ce récit est tiré, dit que plusieurs placèrent un cube sur un autre et firent ainsi un parallélipipède. La peste continuant, le dieu, consulté une seconde fois, fit la même réponse (***).

Mais écoutons l'inimitable, le délicieux Amyot. Platon est allé en Égypte pour converser avec les prêtres. Un nommé Sammias, son compagnon de voyage, raconte ce qui arriva au retour.

« Ainsy que nous passions le long de la Carie, quelques gents de l'isle de Délos nous rencontrèrent qui

(*) De là le nom de problème *déliaque*.

(**) Johannes Alexandrinus Christianus, surnommé *Philoponus* à cause du grand nombre de ses écrits.

(***) Il est probable que c'est Platon qui a fait souffler cette réponse à la Pythie. Ramus, dans l'endroit cité ci-dessus, dit que la Pythie πλατονίζει, *platonise*.

feirent requeste à Platon, comme estant bien versé et exercité en la géométrie, de leur souldre un oracle estrange et fascheux à entendre que Dieu leur avait donné. La teneur de l'oracle estait, *que les Déliens et tous les aultres peuples grecs auroyent cessation de leurs maulx et misères quand ils auroyent doublé son autel qui estoit au temple de Délos.* Car ils ne pouvoyent imaginer que vouloit dire la substance de cest oracle, et si se feirent moquer d'eulx, quand ils cuidèrent doubler la structure et fabricque de cest autel : car en ayant doublé chasque costé, ils ne se donnerent guarde qu'ils avoyent faict un corps solide huict fois aussy grand comme il estoit auparavant, par ignorance de la proportion qui double telle grosseur. Si recoururent à l'ayde de Platon en ceste difficulté. Et lui, se soubvenant du prebstre égyptien leur dict, que Dieu se joüoit aux Grecs, qui mesprisoyent les sciences, comme en leur reprochant leur ignorance, et leur commandant d'estudier à bon escient, et non pas par dessuz en la géométrie : parce que ce n'estoit pas œuvre d'entendement morose, nez que veist trouble, ains qui feust extresmement exercité en la science des lignes, que de sçavoir trouver deux lignes moyennes proportionales : qui est le seul moyen de doubler un corps quarré en augmentant esgualement toutes ses dimensions : et quant à cela, que Eudoxus le Gnidien, ou Helicon le Cyzicenien, le leur rendroyent par faict : mais au reste Dieu n'avoit que faire de ce redoublement. Là n'y estoit pas ce qu'il vouloit dire; ains qu'il commandoit aux Grecs de quitter les armes pour converser avecques les Muses, en addoulcissant leurs passions par l'estude des lettres et des sciences, et ainsy se comporter ensemble en prouffitant, et non pas en portant dommage les uns aux aultres. » (PLUTARQUE, traduction d'Amyot, édition de Bastien, t. XIV, p. 375.)

Cette réponse stimula extraordinairement le zèle de ses disciples, et il les engagea, pour résoudre le problème par une proportion doublement continue, à étudier les courbes résultant de l'intersection des solides. Proclus (+ 412) dit (dans son Traité du genre des courbes sur la quatrième définition d'Euclide) :

Τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος

(p. 19 de l'édit. de Bâle).

Platon s'occupa le premier de la *section*. Il s'agit ici non pas des coniques, mais des sections des surfaces en général. Et Proclus (*ibid*, p. 31), suivant en cela Géminus (— 100), attribue même les sections coniques à Ménechme, disciple de Platon, et les spiriques à Perseus : Ἐπινοεῖσθαι δὲ ταύτας τὰς τομάς, τὰς μὲν ὑπὸ Μεναίχμου τὰς κωνικάς, τὰς δὲ ὑπὸ Πέρσεως (τὰς σπειρικάς).

« On pense que de ces sections, les unes, savoir les coniques, ont été trouvées par Ménechme, et les autres, les spiriques, par Perseus. »

D'après la lettre d'Ératosthène, il paraîtrait que c'est Hippocrate de Chios, le premier auteur d'éléments de géométrie et le célèbre inventeur des lunules (— 450), qui le premier ramena le problème à l'insertion de deux moyennes géométriques. On trouve même dans Proclus une phrase très-remarquable, en ce qu'elle semble donner la clef des porismes et en attribuer l'invention à Hippocrate de Chios :

Πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χῖον. (p. 59.)

« On dit qu'Hippocrate de Chios est le premier qui ait opéré le transport des figures embarrassées (sans issues). » N'est-ce-pas ce qu'on nomme aujourd'hui des méthodes *métamorphiques*, ou le transport (ἀπαγωγή) de propriétés connues d'une figure facile aux figures compliquées (par

exemple, des cercles aux coniques)? Les théorèmes qui procuraient ces passages étaient des *porismes* (πορίζω, frayer un passage); telles sont aujourd'hui les propriétés segmentaires ou fasciculaires, etc.

Avant de s'adonner à la géométrie, Hippocrate exerçait le négoce avec tant d'impéritie, qu'il s'y est ruiné, victime des fraudes des percepteurs byzantins de l'impôt du 50e (2 pour 100) sur le revenu (πεντηκοστολόγοι).

Pappus (— 300) donne quatre solutions : celles d'Ératosthène, de Nicomède, de Héron, et la sienne (lib. III, p. 8, de la traduction de Commandin. Bologne, 1660).

Il décrit une seconde fois sa solution pour en montrer l'emploi en mécanique, dans la préface du VIIIe livre (pages 449-463).

Eutocius, d'Ascalon en Palestine (+ 600), auteur d'un Commentaire sur les deux livres de la sphère et du cylindre d'Archimède, ramène à la duplication du cube la question où il s'agit de construire une sphère équivalente à un cône ou à un cylindre. Outre les quatre solutions de Pappus, il en rapporte sept autres : celles d'Archytas, Platon, Ménechme, Apollonius de Perge, Philon de Byzance, Dioclès et Sporus. Ainsi l'antiquité nous a transmis onze solutions que nous allons décrire succinctement en langage moderne.

1. Platon (— 452).

Soit un trapèze AECD, rectangle en C et en E; si les deux diagonales AC, DE se coupent à angle droit en B, on aura

$$DB : BC = BC : BE = BE : AB;$$

donc BC, BE sont deux moyennes proportionnelles entre AB et DB. Si donc ces deux dernières lignes sont données, on les met à angle droit en B; ensuite on a un instru-

ment formé de deux montants ajustés perpendiculairement sur une traverse; on applique cet instrument sur l'équerre ABD et on le mène jusqu'à ce que la condition géométrique soit satisfaite.

2. Archytas (—400).

AB est le diamètre d'un demi-cercle que nous supposons horizontal et AC une corde inscrite; c'est entre AB et AC qu'il faut insérer deux moyennes géométriques. Soit D l'intersection de AC prolongé avec la tangente menée en B. Sur la demi-circonférence ACB comme base, imaginons un demi-cylindre vertical, et sur AB comme diamètre un demi-cercle vertical, au-dessus du plan horizontal; supposons que ce demi-cercle tourne autour de l'arête du demi-cylindre qui passe par A, il engendre un tore. Désignons par M la courbe à double courbure, intersection du tore avec le demi-cylindre. Supposons que le triangle rectangle ABD tourne autour de AB comme axe; l'hypoténuse AD décrira un cône. Désignons par N l'intersection de ce cône avec le cylindre; soit K l'intersection des deux courbes M et N, et I la projection de K sur la base du demi-cylindre; I sera évidemment sur la demi-circonférence ACB; on aura

$$AB : AK = AK : AI = AI : AC.$$

C'est le premier exemple d'une courbe à double courbure qu'on rencontre chez les Grecs. C'est une belle question de stéréotomie à proposer aux candidats pour l'École Polytechnique.

Archytas, ami de Platon, était stratége des Tarentins (*). Horace l'a immortalisé dans cette ode (lib. I, od. 28):

Te maris et terræ, numeroque carentis arenæ,
Mensorem cohibent, Archyta.

(*) Il a péri dans un naufrage.

C'était une opinion répandue dans l'antiquité et consignée même dans la Bible, qu'il n'existe pas de nombre qui puisse exprimer le nombre des grains de sable existant sur la terre, opinion qui n'aurait jamais eu cours si les Anciens avaient eu un système chiffré. L'*Arénaire* d'Archimède a pour unique but de prouver le contraire.

3. Ménechme (— 400).

Deux solutions : la première par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole; la seconde par l'intersection de deux paraboles. Solutions extrêmement remarquables. Elles sont le premier exemple de *lieux géométriques*, en usage encore aujourd'hui, et montrent que l'invention des trois sections coniques est bien due à Ménechme; et c'est ce qu'Eratosthène, dans le poëme rapporté ci-dessus, nomme la *triade* (*) de Ménechme. Il obtenait ces courbes en coupant le cône droit par un plan perpendiculaire à une arête. L'angle au sommet étant droit, il obtenait la parabole; aigu, l'ellipse; obtus, l'hyperbole. Apollonius a montré le premier qu'on pouvait obtenir la triade sur un cône oblique quelconque, certaines hyperboles exceptées.

Ménechme, disciple d'Eudoxe de Cnide et auditeur de Platon, était frère de Dinostrate, l'inventeur de la quadratrice.

4. Héron d'Alexandrie (— 152).

Soit ABCD un rectangle et E le centre de ce rectangle; au sommet B on applique une règle rencontrant les côtés CD, CA, prolongés respectivement en F et en G; on fait mouvoir cette règle jusqu'à ce qu'on ait $EF = EG$; alors on aura

$$AB : AG = AG : DF = DF : BD;$$

on a donc ainsi deux moyennes entre AB et BD ou entre CD et CA..

(*) Ce mot n'est pas dans la prose de la lettre.

Dans la construction des machines de guerre, catapultes, balistes, etc., les Grecs prenaient pour calibres le diamètre de la corde tendue (τονός), ou, ce qui revient au même, le diamètre du trou par lequel on passait la corde : ce diamètre servait de module à toutes les dimensions de la machine. Les diamètres étaient proportionnels aux racines cubiques des poids lancés. Il suffit d'une lecture superficielle de l'*Arénaire* pour se convaincre combien était pénible, sans l'aide de chiffres, l'extraction des racines. Aussi les Anciens ramenaient ces opérations d'arithmétique à des constructions graphiques. C'est pour cet usage technique que Héron indique cette construction dans son Traité intitulé : Βελοποιϊκά, *De la fabrication des traits*, qui fait partie de la collection publiée par Thévenot sous le titre de *Veteres mathematici* (*). Pappus donne aussi cette construction.

On sait, d'ailleurs, que l'extraction d'une racine cubique et l'insertion de deux moyennes géométriques sont deux opérations que l'on peut appeler identiques

Héron était élève du célèbre constructeur Ctésibius, dont la vie a été publiée par Bern. Baldus (Aug. Vindel. 1614, in-4).

5. Philon de Byzance (— 152).

Soit ABCD un rectangle; sur la diagonale AC comme diamètre on décrit une circonférence qui passera par B et D; en B on applique une règle coupant la circonférence en E et les côtés DC, DA, prolongés, en F et en G; on fait mouvoir la règle jusqu'à ce qu'on ait BG = EF; alors on a

$$BC : FC = FC : AG = AG : AB.$$

Philon était aussi élève de Ctésibius.

(*) Ce titre peut induire en erreur : il y a *les pneumatiques, les automates, etc.* : il faudrait dire *Mechanici veteres*.

6. Apollonius de Perge (— 247).

ABCD est un rectangle, E le centre du rectangle; de ce point comme centre, on décrit un quadrant FG renfermé entre les côtés AB, AC prolongés; lorsque la corde FG du quadrant passera par le point C, on aura

$$AB : AG = AG : DF = DF : CD.$$

Cette solution ne diffère pas de celle de Héron. C'est à tort que Montucla dit qu'Apollonius a fait emploi des coniques.

7. Ératosthène (— 276, naissance).

Soit un premier trapèze AA′BB′ rectangle en A et B; un second trapèze adjacent BB′ CC′ rectangle en B et C, et de telle sorte que les sommets A′, B′, C′ sont en ligne droite, et les diagonales A′B, B′ C sont parallèles; un troisième CC′DD′ adjacent au second : les sommets B′, C′, D′ sont en ligne droite, et les diagonales B′ C, C′ D sont parallèles, et ainsi de suite. Pour fixer les idées, ne prenons que trois de ces trapèzes, on aura

$$AA' : BB' = BB' : CC' = CC' : DD';$$

de sorte que BB′ CC′ sont deux moyennes géométriques entre AA′ et DD′. Ces deux dernières lignes étant données, Ératosthène a inventé un instrument nommé *mésolabe* (*), pour réaliser cette construction et trouver les intermédiaires BB′, CC′. Cet instrument était formé d'une plinthe en bois, d'ivoire ou d'airain, sur laquelle sont placées trois planchettes rectangulaires très-minces : celle du milieu est fixe, les deux autres sont mobiles dans des rainures pratiquées le long des côtés de la

(*) Μεσόλαβον, instrument qui prend les moyennes, de *μέσον* et *λαμβάνω*.

planchette fixe, et on fait mouvoir les planchettes mobiles jusqu'à ce qu'on obtienne la figure géométrique décrite ci-dessus. Si les lignes données surpassent les dimensions de l'instrument, on les réduit proportionnellement. On voit aisément qu'on peut construire un semblable instrument pour insérer autant de moyennes géométriques que l'on veut. On comprend maintenant ce qu'il dit dans sa description poétique : que cet instrument peut servir à transformer les solides, par exemple, à trouver des cônes équivalents à des sphères, etc.; à mesurer toutes sortes de volumes. Les planchettes mobiles sont ce qu'il nomme des *règles*. Cette partie est assez obscure. On voit qu'Eudoxe de Cnide, auditeur et compagnon de Platon en Égypte, a aussi donné une solution du problème par l'intersection de certaines courbes. Elle ne nous est pas parvenue, et devait être très-belle à en juger par l'expression *divine* (*) dont se sert Ératosthène. Toutefois Eutocius dit que la solution d'Eudoxe est si défectueuse, qu'elle ne mérite pas d'être décrite; et, en effet, il la supprime. C'est qu'il s'agit probablement d'une seconde solution purement mécanique.

8. Nicomède (— 150).

Inventeur de la conchoïde (*Nouvelles Annales*, t. II, p. 281), il inventa un instrument pour décrire cette courbe (Eutocius, lib. II, page 146, édition d'Oxford). Il se sert de cet instrument pour trouver deux moyennes géométriques entre les droites AB, BC. Il construit le rectangle ABCD. Soit F le milieu de BC. Il mène en F, au-dessus de BC, une perpendiculaire sur BC, et construit le triangle rectangle CFG où l'hypoténuse CG est égale à $\frac{1}{2}$ AB; en C on mène CL parallèle

(*) Toutefois l'épithète θεουδής s'applique à Eudoxe et non à sa méthode: *le divin Eudoxe*.

à BG, et par le point C, à l'aide de l'instrument conchoïdal, on mène la droite GHI de manière que la partie HI inscrite dans l'angle que forme CL avec BC prolongée soit égale à $\frac{1}{2}$ AB; on mène la droite ID rencontrant BA prolongé en M. On aura

$$AB : IC = IC : MA = MA : BC.$$

9. Dioclès (— 100 ou — 200).

Auteur de la *cissoïde*. On n'est pas d'accord sur le temps où il a vécu. Mais Pappus parle en divers endroits de la cissoïde, il est vrai, sans nommer Dioclès, nous en dirons la raison plus loin (lib. IV, prop. 30, p. 35; lib. III, prop. 4, p. 7); Dioclès est donc antérieur à cet auteur. D'ailleurs Proclus (p. 31), transcrivant Geminus, parle de la cissoïde, et Geminus est du 1er siècle avant Jésus-Christ.

Soient AB, CD deux diamètres rectangulaires d'une circonférence, de sorte que ACBD sont les sommets du carré inscrit; à partir de D, prenons de part et d'autre deux arcs quelconques DE, DF égaux; menons la corde BE et abaissons de F une perpendiculaire FH sur le diamètre AB, et soit G le point où cette perpendiculaire rencontre la corde BE. Le lieu du point G est une cissoïde et l'on a

$$AH : HF = HF : HB = HB : HG.$$

Ainsi, entre AH et HG, on a les deux moyennes HF, HB. La courbe étant tracée, on comprend l'usage qu'on peut en faire pour la solution du problème.

La cissoïde est une courbe à branche infinie asymptotique; mais les Anciens ne connaissaient, du moins ne considéraient que la portion de la courbe située dans l'intérieur du cercle.

10. Pappus (+ 300).

Au commencement de ses *Collections*. Sa construction fourmille de fautes typographiques. Elle est plus exacte dans Eutocius.

Il s'agit de trouver deux cubes qui soient dans un rapport donné.

Soient O le centre et AOB le diamètre d'une demi-circonférence, OC un rayon perpendiculaire au diamètre AB; je prends sur OC un point D qui divise le rayon de manière que l'on ait $\frac{OC}{OD}$ égal au rapport donné; on mène BD qui rencontre la circonférence en E. Au point A, on attache une règle mobile rencontrant la corde BE en F; le rayon OC en G et la demi-circonférence en H, et on la fait mouvoir jusqu'à ce qu'on ait FG = GH; alors on aura

$$\frac{\overline{OC}^3}{\overline{OG}^3} = \frac{OC}{OD}.$$

Le point F appartient à la cissoïde; Eutocius remarque avec raison que cette construction ne diffère pas essentiellement de celle de Dioclès. Il paraît que Pappus l'a compris ainsi, car il a soin de parler de la cissoïde, mais sans citer Dioclès (*voir* p. 33).

11. Sporus (+ 400).

Dans quelques manuscrits, on lit Sporus Nicænus.

Sa construction ne diffère pas de celle de Pappus.

Reimer (*voir* p. 21), à la fin de son ouvrage, donne la liste suivante des auteurs modernes qui se sont occupés de cette question :

1. Nicolas de Cusa (1500). *Opera*. Parisiis, volume II, p. 42.

2. Johannes Vernerus (ad calcem *Libelli super viginti*

duobus elementis conicis. Nurem., 1522). Il nomme les propositions, des *éléments* (*voir* Kastner, t. II, p. 52).

3. Orontius Finæus Delphinas (*Planisphærum geographicum*. Lut. Par., 1544, et *Tractatus*, 1556) parle des deux moyennes.

La solution de Finæus a été démontrée fausse dans les ouvrages suivants :

4. Pet. Nonius Salaciensis. *Opera*. Basil., 1592.

5. Joan. Buteonis Delphinatici *Opera geometrica*. Lugduni, 1554.

Il était moine et disciple de Finæus. L'ouvrage est dédié au cardinal de Tournon, et daté du couvent de Saint-Augustin. Il réfute aussi une construction indiquée par Stifel dans son *arithm. integra* et donne une méthode ingénieuse d'approximation.

Soit à construire $2a^3$.

Il construit le parallélipipède

$$a,\quad a,\quad 2a,$$

ensuite les parallélipipèdes

$$a\sqrt{2},\quad a\sqrt{2},\quad a,$$
$$a\sqrt[4]{2},\quad a\sqrt[4]{2},\quad a\sqrt{2},$$
$$a\sqrt[8]{8},\quad a\sqrt[8]{8},\quad a\sqrt[4]{2},$$

Tous ces parallélipipèdes sont équivalents à $2a^3$, p, p, q étant les trois côtés d'un parallélipipède, les suivants sont

$$\sqrt{pq},\quad \sqrt{pq},\quad p,$$

le rapport

$$\frac{p}{\sqrt{pq}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

va en diminuant ; donc le parallélipipède s'approche toujours d'un cube.

3.

6. Viète, édition de Schooten, p. 242.

7. Joann. Bap. Villalpandus. Hieronymi Pradi et Joan. Bap. Villalpandi e Soc. Jesu *In Ezechielem explanationes*, t. II, p. 289. Romæ, 1606.

8. Claude Richard. Aut., 1645.

9. Johannis Maltherus. *Problema Deliacum de cubi duplicatione,* nunc tandem post infinitos præstantissimorum mathematicorum conatus expedite et geometrice solutum. Franc., 1619.

10. Renatus Franciscus Slusius. *Mesolabium* seu duæ mediæ proportionales inter extremas datas, per circulum et infinitas hyperbolas vel ellipses et per quamlibet exhibitas. Leodii-Eburonum, 1662; in-4.

11. Hugenius Chres. *De circuli magnitudine inventa.* Lug. Batav., 1654.

12. Thomas Hobesius. *Quadratura circuli, cubatio sphæræ, duplicatio cubi.* Amst., 1669; in-4.

13. Thomæ Hobbesii *Quadratura circuli, cubatio sphæræ, duplicatio cubi; confutatio* a J. Wallisii. 1669; Oxonii; in-4.

14. Isaac Barowius. *Lect. opticæ.* Lond., 1674.

15. Vincentius Viviani. *De locis solidis.* Florent., 1707.

16. *La duplication du cube, la trisection de l'angle et l'inscription de l'heptagone régulier dans le cercle;* par M. Comiers Prevost. Paris, 1677.

17. *La duplication du cube par le cercle et la ligne droite,* ou résolution géométrique en cinq manières du problème proposé par M. Comiers, le tout démontré par une méthode aussi particulière que facile à concevoir et par des raisons si fortes, qu'elles ne laissent aucun lieu de douter de la certitude de la résolution qui est fondée sur les mêmes principes qu'Euclide donne dans ses *Éléments;* par M. Brunet, avocat au Parlement de Provence. Paris, 1682.

18. *Nuovo metodo geometrico* per trovar fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali, di Paolo-Mattia Doria. In Venezia, 1715.

19. *Dimostrazione* del luogo ove terminano le linee cubiche ricercate nel libro intitolato, Nuovo metodo, etc. Napoli, 1715.

20. *Lettera* del signor D. Paolo-Mattia Doria indrizzata al signor Giacinto di Cristoforo, nella quale si dimostra che la parabola Apolloniana in qualunque modo che si descriva, non è linea geometrica; e che in conseguenza di ciò sono false tutte le altre curve. Aust., 1718.

21. Tomo primo delle *Opere matematiche* di Paolo-Mattia Doria nel qual si contengono la duplicazione del cubo et altre opere, etc. In Venezia, 1722, et tomo secondo. Venezia, 176...

22. *Duplicationis cubi Demonstratio* a Paolo-Mattia Doria inventore, celeberrimæ Regiæ Societatis Angliæ censuræ exposita. Hac latina editione maximopere aucta. Venetiis, 1770.

23. *De circuli quadratura et de cubi duplicatione*, cum similium aliarum rerum accessione, Demonstrationes geometricæ, D. D. D. majestati sanctissimæ reginæ Matris Virginis ab Philippo de Carmagninis, in philosophia et medicina Doctore. Florentiæ, 1751; et aussi en italien, même année 1751.

24. *Solution du problème déliaque*, démontrée par Jacques Casanova de Seingald, bibliothécaire de M. le comte de Waldstein, seigneur de Dux, en Bohème. A Dresde, 1791.

25. Biering (Chr.-Henr.). *Historia problematis cubi duplicandi*, specimen historico-mathematicum. Hauniæ, 1844; in-4.

26. Knie (J.-G.). *Theorischen prakt Losung der zwei geometr. aufgaben. etc.* Solution théorico-pra-

tique des deux problèmes : 1° insérer deux moyennes proportionnelles entre deux droites données avec la multiplication du cube un nombre donné de fois ; 2° quadrature du cercle et *vice-versâ* à l'aide de deux instruments. Breslau, 1848, grand in-4.

Doria (n° 22) prétend construire les deux moyennes par des droites. M. Sturm a donné le premier une démonstration rigoureuse de l'impossibilité de faire cette construction par la droite et le cercle. L'illustre géomètre m'a dit avoir simplifié cette démonstration et communiqué cette simplification à MM. Hermite et Bertrand auprès desquels j'ai fait des démarches sans succès.

Observation. M. Woepcke avoue que c'est une opinion erronée de croire que les Grecs ont construit des équations du troisième degré (*Algèbre* d'Omar Alkhayyami, p. XII.). Il est évident que les Grecs, ne connaissant pas le calcul par équations, ne pouvaient songer à construire des équations. Mais si l'on ne se tient pas aux mots, aux sons, et que l'on s'attache à l'idée, il n'est pas moins évident que les Grecs ont construit des équations cubiques binômes et même, au moyen de l'instrument d'Eratosthène, des équations binômes de tous degrés, du moins mécaniquement. Il est vrai que les Arabes ont été plus loin : auraient-ils fait ce second pas, si les Grecs n'avaient pas fait le premier? On remarque que les hommes qui passent plusieurs années à étudier une langue difficile et à y acquérir une certaine supériorité, finissent par s'infatuer du peuple qui a parlé cette langue et à s'ingénier à lui découvrir toutes sortes de mérites. Il en est ainsi de ceux qui font de l'antiquité une étude spéciale, continue, et dont le plus grand bonheur est d'appauvrir les Modernes et d'enrichir les Anciens. Quand saurons-nous que les Grecs, les Arabes, les Indiens, les Chinois, de même que les Anglais. les Allemands, les Italiens, les Français

sont des hommes et rien de plus? Dieu a donné la science au genre humain; chacun est appelé à y prendre sa part, n'importe la longitude, la latitude, l'altitude du lieu qu'il habite. La démonstration du théorème de Fermat peut se découvrir à Tornéa, à Khiva, à Tombouctou. Platon aurait-il jamais admis la possibilité du scandinave Abel?

SUR LE PROBLÈME DES BŒUFS ATTRIBUÉ A ARCHIMÈDE.

(Post-scriptum à la Lettre de M. VINCENT)

(voir t. Ier, p. 165).

Pour que les lecteurs pussent tirer quelque profit de sa lettre, M. Vincent y a joint le texte rétabli conformément aux remarques qu'il avait présentées, ainsi que la traduction que nous donnons ici.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
    Φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης.
Πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς πότ' ἐβόσκετο νήσου
    Θρινακίης, τετραχῆ στίφεα δασσαμένη;
Χροιὴν ἀλλάσσοντα, τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
    Κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον·
Ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον· ἐν δὲ ἑκάστῳ
    Στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι,
Συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
    Κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
Καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον·
    Αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
    Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
Ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
    Καὶ ξανθοῖς αὖτις πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
    Ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης

Τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι.
Αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο·
Σὺν ταύροις πάσης δ' εἰς νομὸν ἐρχομένης
Ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
Ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχοντ' ἀτρεκές.
[Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
Ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.]
Ξεῖνε, σὺ δ' Ἠελίοιο βοῶν πόσοι ἀτρεκὲς εἰπών,
Χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
Χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χρῶμα ἕκασται,
Οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι', οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής·
Οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος· ἀλλ' ἴθι φράζευ
Καὶ τάδ' ἔτ' ἄλλα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
Κυανέοις, ἵσταντ' ἔμβαδον ἰσόμετροι
Εἰς βάθος εἰς εὖρός τε· τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
Πίμπλαντο πλῆθος Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
Ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι,
Σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον, οὔτε προσόντων
Ἀλλοχρόων ταύρων, οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας,
Καὶ πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξένε, πάντα μέτρα,
Ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος, ἴσθι τε πάντως
Κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Mon cher ami, si tu es un savant homme, fais bien attention à ce que je vais te dire et calcule-nous le nombre des bœufs d'Hélios.

Partagés en quatre troupeaux, en quel nombre paissaient-ils dans les plaines de la Sicile, l'île aux trois angles?

Divers de couleur, le premier troupeau était d'un blanc de lait, un autre brillait d'un noir éclatant, un autre avait le poil roux, et enfin le dernier était bigarré.

Dans chaque troupeau se pressaient de nombreux tau-

reaux qui présentaient entre eux les rapports suivants :

Songe bien, mon cher ami, que le nombre des taureaux blancs était la moitié et le tiers du nombre des noirs, plus le nombre des roux tout entier ; que le nombre des noirs valait le quart et le cinquième de celui des bigarrés, plus encore le nombre entier des roux ; enfin que le nombre des taureaux bigarrés était la sixième et la septième partie du nombre des taureaux blancs, plus encore une fois la totalité des roux.

Quant aux vaches, voici ce qui avait lieu : Le troupeau des vaches blanches était exactement le tiers et le quart de celui des noires, les vaches noires valaient ensemble le quart et le cinquième des vaches bigarrées ; les bigarrées faisaient absolument un nombre égal à la cinquième plus la sixième partie de tout le troupeau des rousses (qui accompagnaient les taureaux au pâturage). [Enfin les vaches rousses faisaient le demi-tiers et la septième partie du troupeau des blanches.]

Maintenant, mon cher, si tu nous dis exactement de combien de bêtes à cornes se composaient les troupeaux d'Hélios, d'une part le nombre des taureaux (bien nourris), de l'autre celui des vaches, et combien il y en avait de chaque couleur, tu n'auras pas à craindre de passer pour inhabile ou ignorant en arithmétique.

Mais ce n'est point encore assez pour être compté parmi les savants. Voyons, dis-nous quelques autres particularités que présentaient les troupeaux d'Hélios.

Lorsque la foule des taureaux blancs se mêlait à celle des taureaux noirs, ils se rangaient en bataillon carré ; et alors la somme des premiers rangs formant le pourtour produisait un nombre égal à celui qui représente la surface de la Sicile.

Les roux, au contraire, en serrant leurs rangs avec les bigarrés, se formaient en triangle, commençant par Un

et allant en augmentant de chaque côté jusqu'au dernier rang, sans qu'il en manquât ni qu'il en restât aucun.

Quand tu auras trouvé tout cela, mon cher ami, et que tu l'auras logé dans ta cervelle; quand tu nous auras donné les valeurs de tous ces nombres, alors marche triomphant et glorieux: tu pourras te vanter d'être un fameux savant.

BIBLIOGRAPHIE.

(Voir p. 1.)

TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO. (Suite.)

De quinque numeris reperiendis ex proportionibus datis (p. 20).

Léonard dit avoir résolu par la même méthode deux autres questions qu'il a transmises à Sa Majesté par le page Robert (*quas per Robertinum aggiu* (sic) *dominicellum vestrum vestre Majestati transmisi*).

On verra que cette méthode consiste à écrire les inconnues *circulairement*. Nous copions ces deux questions en écriture moderne d'après M. Boncompagni, et en conservant la marche de l'auteur.

1re *question*. Trouver cinq nombres x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tels, qu'on ait

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) &= x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5) \\ &= x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1) \\ &= x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) \\ &= x_5 + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3), \end{aligned}\right.$$

et il prend à tout hasard (*fortuitu*) chacune de ces sommes égale à 17. Il appelle la première inconnue x_1 la *cause* (*causa*).

La première équation donne

(E) $$x_2 + x_3 + x_4 = 34 - 2x_1,$$

et de là

(F) $$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34 + x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant de cette équation la seconde des équations (A), il vient

$$\frac{2}{3}(x_3 + x_4 + x_5) = 17 + x_5 - 2x_1,$$

$$\frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5) = 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_5 - x_1.$$

Ajoutant ces deux dernières équations, on obtient

(G) $$x_3 + x_4 + x_5 = 25 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant cette équation (G) de l'équation (F), on a

(H) $$x_2 = 8 + \frac{1}{2} + x_1 - \frac{1}{2}x_5.$$

L'équation (G) donne aussi

(I) $$x_3 + x_4 + x_5 + x_1 = 25 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1.$$

Soustrayant de cette dernière équation la troisième des équations (A), on a

$$\frac{3}{4}(x_4 + x_5 + x_1) = 8 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - 2x_1,$$

$$\frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1) = 2 + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right)x_5 - \frac{2}{3}x_1.$$

Ajoutant ces deux équations

$$(J)\qquad x_4 + x_5 + x_1 = 11 + \frac{1}{3} + 2x_5 - \left(2 + \frac{2}{3}\right) x_1.$$

Soustrayant cette équation de (I),

$$(K)\qquad x_3 = 14 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{2} x_5.$$

L'équation (J) donne

$$(L)\qquad x_4 = 11 + \frac{1}{3} + x_5 - \left(3 + \frac{2}{3}\right) x_1.$$

On déduit de l'équation (H)

$$x_5 + x_1 + x_2 = 8 + \frac{1}{2} + 2x_1 + \frac{1}{2} x_5,$$

$$\frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) = 1 + \frac{7}{10} + \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{10}.$$

Ajoutant cette équation à l'équation (L),

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2) = 13 + \frac{1}{30} + \left(1 + \frac{1}{10}\right) x_5$$
$$- \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1.$$

Ainsi la quatrième des équations devient

$$13 + \frac{1}{30} + \left(1 + \frac{1}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$13 + \frac{1}{30} + \frac{11}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$13 + \frac{1}{30} + \frac{11}{10} x_5 - \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 = 17,$$

$$\frac{11}{10} x_5 = \left(3 + \frac{4}{15}\right) x_1 + 4 - \frac{1}{30},$$

$$(M)\qquad x_5 = \left(3 - \frac{1}{33}\right) x_1 + 3 + \frac{20}{33}.$$

Les équations (H) et (K) donnent

$$x_1 + x_2 + x_3 = 22 + \frac{2}{3} + \left(2 + \frac{2}{3}\right) x_1 - x_5,$$

$$\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3) = 3 + \frac{7}{9} + \frac{4}{9} x_1 - \frac{1}{6} x_5.$$

La sixième des équations (A) devient

$$\frac{6}{6} x_5 + \frac{4}{9} x_1 + 3 + \frac{7}{9} = 17,$$

$$\frac{5}{6} x_5 + \frac{4}{9} x_1 = 3 + \frac{2}{9},$$

(N) $$x_5 + \frac{8}{15} x_1 = 15 + \frac{13}{15}.$$

Mettant dans cette équation la valeur de x_5, tirée de (M), on a

$$\left(3 - \frac{1}{33} + \frac{8}{15}\right) x_1 + 3 + \frac{20}{33} = 15 + \frac{13}{15},$$

$$\left(3 + \frac{83}{105}\right) x_1 = 12 \frac{43}{105},$$

$$578 x_1 = 2023,$$

$$x_1 = 3 + \frac{1}{2}.$$

Multipliant cette équation et chacune des équations (H), (K), (L), (M) par 2, on obtient

(P) $$\left\{\begin{aligned} 2x_1 &= 7, \\ 2x_2 &= 17 + 2x_1 - x_5, \\ 2x_3 &= 28 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2x_1 - x_5, \\ 2x_4 &= 22 + \frac{2}{3} + 2x_5 - \left(3 + \frac{2}{3}\right) 2x_1, \\ 2x_5 &= \left(3 - \frac{1}{33}\right) 2x_1 + 7 + \frac{7}{33}. \end{aligned}\right.$$

Mettant dans cette équation 7 au lieu de $2x_1$, on a

$$2x_5 = 28,$$
$$x_5 = 14.$$

Si l'on met donc dans les équations (P) 7 à la place de $2x_1$ et 14 au lieu de x_5, on obtient

$$2x_2 = 10, \quad 2x_3 = 19, \quad 2x_4 = 25.$$

Dans tout ceci, Léonard donne le nom de *causa* à x_1 et celui de *res* à x_5, à l'instar des Arabes qui, lorsqu'ils ont deux inconnues, les distinguent par des noms différents (Woepcke, *Extrait du Fakri;* imprimerie impériale, 1853).

Cette disposition circulaire présente l'avantage de pouvoir calculer de suite les valeurs des inconnues quand on connaît la valeur d'une seule.

Cet exemple pris au berceau de la science nous montre quel immense service l'écriture algébrique a rendu à la langue algébrique.

De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta questio notabilis (p. 25).

C'est la seconde question.

Quatre hommes ont : le premier x_1, le deuxième x_2, le troisième x_3, le quatrième x_4 *besants;* ils trouvent une bourse contenant t besants, et l'on a

$$t + x_1 = 2(x_2 + x_3),$$
$$t + x_2 = 2(x_3 + x_4),$$
$$t + x_3 = 2(x_4 + x_1),$$
$$t + x_4 = 2(x_1 + x_2):$$

il s'agit de trouver les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4, t.

« Je démontrerai que la question est impossible, à moins que l'on n'accorde que le premier homme a une

dette. » (*Hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabor, nisi concedatur primum hominem habere debitum.*)

En effet, il parvient à l'équation

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)x_2+\left(6+\frac{3}{5}\right)x_1=\left(3-\frac{1}{13}\right)x_2+\frac{9}{13}x_1,$$

équation impossible; car

$$4+\frac{2}{5}>3-\frac{1}{13},$$

$$6+\frac{3}{5}>\frac{9}{13}.$$

Mais en admettant que x_1 est une dette, alors

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)x_2-\left(6+\frac{3}{5}\right)x_1=\left(3-\frac{1}{13}\right)x_2-\frac{9}{13}x_1;$$

de là

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{4},$$

problème indéterminé. Il pose

$$x_1=1,$$

alors

$$x_2=4,\quad x_3=1,\quad x_4=4,\quad t=11.$$

Dans cette question, il nomme *bursa* l'inconnue t; *dragma* l'inconnue x_1, et *res* l'inconnue x_2.

De eadem re (p. 28).

1re question *indéterminée.*

$$x_1+t=a(x_2+x_3),$$
$$x_2+t=(a+1)(x_3+x_4),$$
$$x_3+t=(a+2)(x_4+x_1),$$
$$x_4+t=(a+3)(x_1+x_2).$$

Léonard dit qu'il faut en général prendre

$$x_1 = -1, \quad x_3 = +1, \quad x_2 = x_4,$$

ce qui donne

$$x_2 = x_4 = a + 2, \quad t = a^2 + 3a + 1.$$

Dans l'exemple particulier donné par l'auteur $a = 4$, alors

$$t = 29.$$

Léonard trouve

$$t = 4 + 6 + 8 + 10 + 1;$$

mais cette progression arithmétique n'est applicable que pour ce cas-là, et pas en général.

2e *question*.

$$x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3) = 14,$$

$$x_2 + \frac{1}{4}(x_3 + x_1) = 17,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2) = 19.$$

Par une suite très-longue de raisonnements très-simples, il trouve

$$x_1 = 4\frac{41}{50}, \quad x_2 = 11\frac{44}{50}, \quad x_3 = 15\frac{33}{50}.$$

Il prend pour inconnue (*res*) $x_2 + x_3$; écrit les nombres accompagnés de fractions à la manière orientale: $\frac{41}{50}4$, $\frac{44}{50}11$, au lieu de $4\frac{41}{50}$, $11\frac{44}{50}$. Le numérateur est le nombre *supra virgam* et le dénominateur *sub virga*.

Il dit à l'empereur : « Vous savez que j'ai traité cette » question de deux manières différentes dans le XIIIe cha- » pitre de mon livre (*), mais ce nouveau mode de solu-

(*) Sans doute de l'*Abaque*.

» tion me plaît mieux que les autres et j'ai voulu en faire » part à Sa Majesté. » *Pateat quidem Serenitati Vestre hanc questionem a me solutam esse in tertio decimo capitulo libri mei dupliciter, sed quia hujus solutionis inventio placet mihi pro ceteris modis, volui eam Vestre pandere Majestati.*

Ce serait de la part de Léonard une grande naïveté, s'il croyait que Frédéric II ait pris connaissance des deux premières solutions et s'enquiert de la troisième.

De quatuor hominibus bizantios habentibus (p. 33).

Cette question est dédiée au cardinal Ranieri. Elle donne lieu à ces quatre équations

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) = 33,$$

$$x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = 35,$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = 36,$$

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3) = 37;$$

x_1, x_2, x_3, x_4 représentent les nombres de *besants* qu'ont le premier, deuxième, troisième et quatrième homme. Il dit avoir choisi à dessein (*studiose*) les nombres pour que les inconnues soient des nombres entiers et pour montrer que la question est insoluble. Voici sa marche, qui est la même pour tout ce genre d'équations. Il prend pour inconnue

$$x_2 + x_3 + x_4;$$

faisant donc

$$x_2 + x_3 + x_4 = z,$$

alors

$$x_1 = 33 - \frac{1}{2} z,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33 + \frac{1}{2} z$$

$$x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = 35$$

$$\frac{2}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = \frac{1}{2} z - 2$$

$$\frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = \frac{1}{4} z - 1$$

$$(x_3 + x_4 + x_1) = \frac{3}{4} z - 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33 + \frac{1}{2} z$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = 36$$

$$\frac{3}{5}(x_4 + x_1 + x_2) = \frac{1}{2} z - 3$$

$$x_4 + x_1 + x_2 = \frac{2}{3} z - 4$$

En suivant le même procédé, il trouve

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{8} z - 5.$$

Recapitulant

$$x_2 + x_3 + x_4 = z,$$

$$x_3 + x_4 + x_1 = \frac{3}{4} z - 3,$$

$$x_4 + x_1 + x_2 = \frac{2}{3} z - 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{8} z - 5,$$

additionnant ces équations, on obtient

$$3(x_1+x_2+x_3+x_4)=3\frac{1}{24}z-12,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1\frac{1}{72}z-4,$$

$$x_1=\frac{1}{72}z-4=33,$$

$$x_1+\frac{1}{2}z=\frac{37}{72}z-4,$$

$$z=72,$$

$$x_1+36=33.$$

Ainsi la question est impossible (*colligitur inde hanc questionem insolubilem esse*) à moins qu'on n'accorde que le premier homme a une dette (*debitum habere*) de 3 besants, savoir la différence entre 33 et 36 (*) ; ainsi

$$x_1=-3;$$

de là il conclut facilement

$$x_2=18,\quad x_3=25,\quad x_4=29.$$

Si, dit-il, au lieu des nombres 33, 35, 36, 37, on prend 181, 183, 184, 185, alors

$$x_1=1,\quad x_2=94,\quad x_3=105,\quad x_4=141.$$

Ce mode de solution est très-remarquable et s'applique avec avantage à un système quelconque d'équations du premier degré de cette forme :

$$\begin{array}{ll}
x_1+b_1(x_2+x_3+\ldots+x_n) & =c_1,\\
x_2+b_2(x_3+x_4+\ldots+x_n+x_1) & =c_2,\\
x_3+b_3(x_4+x_5+\ldots+x_n+x_1+x_2) & =c_3,\\
\vdots & \\
x_n+b_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}) & =c_n.
\end{array}$$

(*) Idée juste des quantités négatives.

De quatuor hominibus qui invenerunt bizantios (p. 36).

Quatre hommes trouvent une somme de besants; ils prennent au hasard le premier x_1, le deuxième x_2, le troisième x_3, et le quatrième x_4 besants. Voulant faire égal partage, le premier double la somme prise par le second, le second triple la somme au troisième, le troisième quadruple la somme au quatrième, et le quatrième quintuple au premier ce qu'il lui reste après avoir doublé la somme du second, et alors les parts sont égales.

On trouve facilement que les quatre parts seront

$$5(x_1 - x_2),\quad 2(x_2 - x_3),$$
$$3(x_3 - x_4),\quad 4(x_4 - x_1 + x_2);$$

problème indéterminé. Il prend 60 pour la part de chacun, alors

$$x_1 = 89,$$
$$x_2 = 77,$$
$$x_3 = 47,$$
$$x_4 = 27.$$

Questio similis suprascripte de tribus hominibus (p. 42.)

Question analogue à la précédente, mais un peu plus compliquée.

Ici se termine la première partie du *Flos*.

Epistola suprascripti Leonardi ad magistrum Theodorum philosophum Domini Imperatoris (p. 44).

L'auteur dit avoir composé ce livre à la prière d'un ami qui voulait connaître le moyen de résoudre les questions sur les *oiseaux* et autres semblables, énoncées ci-dessous, et il dit avoir trouvé aussi le moyen de résoudre

ainsi ce qui concerne les alliages des métaux (*omnes diversitates consolaminum monetarum*) (*). En effet, le problème qu'on va lire est aussi une règle d'alliage.

De avibus emendis secundum proportionem datam.

Quelqu'un achète des moineaux, des tourterelles et des colombes, en tout 30 oiseaux pour 30 deniers. 3 moineaux coûtent 1 denier, de même 2 tourterelles; et une colombe coûte 2 deniers. On demande combien il y avait d'oiseaux de chacune de ces trois espèces.

Voici le mode de solution de Léonard :

« J'ai posé (*posui*) d'abord trente moineaux pour » 10 deniers et j'ai mis de côté 20, différence entre 30 » et 10, et j'ai changé un des moineaux en tourterelle; » l'augmentation par suite de ce changement est d'un » sixième de denier; car le moineau coûte $\frac{1}{3}$ de denier et » la tourterelle $\frac{1}{2}$ denier, et $\frac{1}{2}$ moins $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{6}$; j'ai changé » derechef un moineau en colombe et j'ai gagné par ce » changement $1\frac{2}{3}$ denier, différence entre 2 deniers et » $\frac{1}{3}$ de denier; je réduis le tiers en sixièmes, on obtient » $\frac{10}{6}$. Je dois aussi changer les moineaux en tourterelles » et en colombes jusqu'à ce que j'obtienne les 20 que » j'ai réservés ci-dessus; je réduis ces 20 aussi en

(*) *Solamen* soulagement, de là *solatium* soulagement des douleurs et aussi, en terme de droit, indemnité, compensation, et peut-être *monetarum consolamen*, est améliorer les monnaies, en déterminer le prix intrinsèque; en italien, *consolar* aider quelqu'un. C'est le *Tollet-rechnung*, le *calcul-Tollet* des arithméticiens allemands; au moyen des jetons à calculer, on tire (Tollet) un métal d'un autre (Kastner, *Hist. des Math.*, t. I, p. 40).

» sixièmes et l'on a $\frac{120}{6}$ que j'ai divisés en deux parties
» dont l'une puisse se diviser intégralement par 10 et
» l'autre par 1, et la somme des deux divisions ne doit pas
» surpasser 30; la première est 110 et l'autre 10; j'ai
» divisé la première partie, savoir 110, par 10 et la se-
» conde par 1, et j'ai eu 11 colombes et 10 tourterelles,
» lesquelles retranchées de 30, nombre des oiseaux, il
» reste 9 pour le nombre des moineaux, et les 9 moi-
» neaux valent 3 deniers, les 10 tourterelles 5 deniers et
» les 11 colombes 22 deniers; on a ainsi 30 oiseaux pour
» 30 deniers. »

De eodem (p. 45).

Mêmes données; mais 30 est remplacé par 29; il trouve deux solutions

Colombes	11,	Tourterelles	6,	Moineaux	12
—	10	—	16.	—	3

Item de avibus (p. 46).

Mêmes données; mais 30 est remplacé par 15; il démontre que la solution n'est possible que pour un nombre fractionnaire d'oiseaux, savoir : colombes $5\frac{1}{2}$, tourterelles 5, moineaux $4\frac{1}{2}$.

Mais si l'on veut avoir quinze oiseaux pour 16 deniers, on a des nombres entiers.

Il a encore deux autres questions sur des oiseaux, qu'il ramène toujours à partager un nombre entier en parties divisibles chacune par un nombre donné, et la somme des quotients ne doit pas surpasser un nombre donné; mais il ne donne pas de règle pour opérer une

telle décomposition et il finit par ces paroles : *Et sic possumus in similibus etiam in consolamine monetarum et bizantiorum operari, quod quandoque placuerit Dominationi Vestre liquidius declarabo.*

De compositione pentagoni equaliter in triangulum equicrurium datum (p. 49).

C'est la solution d'un problème de géométrie que Léonard dit avoir trouvée depuis peu (*nuper*) et qu'il soumet à la correction de maître Théodore.

Un triangle isocèle abc est donné,

$$ab = ac = 10, \quad bc = 12,$$

alors la hauteur $ah = 8$; il s'agit de trouver sur ab un point d, sur ac un point g, et sur bc deux points e, f tels, que le pentagone $adefga$ soit équilatéral. Des points dg supposés trouvés, on abaisse sur la base bc les perpendiculaires di, gl. Il prouve que les deux triangles dei, gfl sont égaux. Il prend pour *chose* la longueur d'un côté du pentagone et trouve successivement

$$bd = 10x,$$

$$di = \frac{4}{5}(10 - x) = 8 - \frac{4}{5}x,$$

$$bi = \frac{3}{5}(10 - x) = 6 - \frac{3}{5}x,$$

$$ei = \frac{1}{10}x.$$

Le triangle rectangle dei donne l'équation

$$\frac{7}{20}x^2 + 12\frac{4}{5}x = 64.$$

Il multiplie par $2\frac{6}{7}$ et il obtient

$$x^2 + 36\frac{4}{7}x = 182\frac{6}{7}.$$

x c'est *res*, x_2 *census*, et la quantité toute connue $182\frac{6}{7}$ est le *dragma*.

La question est ainsi réduite à une règle d'algèbre (*et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebre*).

Il résout cette équation géométriquement de cette manière.

Concevons qu'on ait le carré *klmn* dont chaque côté soit égal à la *chose* x; prolongeons les côtés opposés *kn*, *lm* de sorte qu'on ait

$$np = mo = 36\frac{4}{7};$$

l'aire du rectangle *klop* est

$$x\left(x + 36\frac{4}{7}\right),$$

donc l'aire de ce rectangle est $182\frac{6}{7}$; et cette aire est égale au produit de

$$kl.lo = lm.mo = 182\frac{6}{7}.$$

Désignons par q le milieu de *mo*, on a donc

$$mq = 18\frac{2}{7},\quad \overline{mq}^2 = 334\frac{18}{49},$$

$$\overline{mq}^2 + lm.lo = lq^2 = 517\frac{11}{49}.$$

On a par approximation

$$lq = 22.44'.33''.15'''; \; lq - mq = ml = x$$
$$= 4.27'.24''.40'''.50^{\text{IV}}.$$

Il faut toujours se rappeler qu'en tout ceci Léonard, à l'instar des Arabes, *parle* algèbre, mais ne l'*écrit* pas,

et ne pouvait pas l'écrire, n'ayant pas les signes qui composent l'alphabet algébrique. Selon l'exacte définition de Lagrange, l'algèbre est un calcul *par équations*. Les Arabes font un tel calcul, mais *discursivement*. Il y a même des géomètres modernes qui s'imaginent faire de la géométrie ancienne, *antiquorum modo*, en algébraïsant sans alphabet.

Il dit en terminant : *Inveni etiam his diebus alias solutiones super similibus questionibus*. L'algèbre appliquée à la géométrie remonte aux Arabes.

Modus alius solvendi similes questiones (p. 52).

L'auteur revient aux questions numériques dont la première roule sur cinq hommes ayant des nombres de *deniers* (*denari*) qu'il faut deviner à l'aide des données suivantes

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 12,$$

$$x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 15,$$

$$x_3 + \frac{1}{4} x_4 = 18,$$

$$x_4 + \frac{1}{5} x_5 = 20,$$

$$x_5 + \frac{1}{6} x_1 = 23.$$

Il prescrit un procédé qu'on peut généraliser ainsi. Soient les équations écrites *circulairement*

$$a\ x_1 + b\ x_2 = c,$$
$$a_1 x_2 + b_1 x_3 = c_1,$$
$$a_2 x_3 \div b_2 x_4 = c_2,$$
$$a_3 x_4 + b_3 x_5 = c_3,$$
$$a_4 x_5 + b_4 x_1 = c_4,$$

$$x_1 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}x_2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}x_3$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}x_4$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{c_3}{a_3} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}x_5$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\frac{c_1}{a_1} + \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{c_2}{a_2} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{c_3}{a_3}$$

$$+ \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\frac{c_4}{a_4} - \frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\frac{b_4}{a_4}x_1$$

$$x_1\,[aa_1a_2a_3a_4 + bb_1b_2b_3b_4]$$
$$= a_1a_2a_3a_4c - a_2a_3a_4bc_1 + a_3a_4bb_1c_2 - a_4bb_1b_2c_3$$
$$+ bb_1b_2b_3c_4.$$

De là, par *circulation*, on déduit x_2, x_3, x_4, x_5.

Le procédé indiqué par Léonard revient à la formation des divers termes a_1, a_2, a_3, a_4, c, etc.

On trouve

$$x_1 = 6\frac{612}{721},$$
$$x_2 = 10\frac{218}{721},$$
$$x_3 = 14\frac{43}{721},$$
$$x_4 = 15\frac{453}{721},$$
$$x_5 = 21\frac{619}{721}.$$

Léonard décompose chaque fraction en deux autres ayant pour dénominateurs 7 et 103 ; ses résultats sont fautifs. Par exemple, on trouve

$$x_1 = \frac{4938}{721} = 6\frac{612}{721},$$

et il écrit

$$x_1 = 6 + \frac{3}{7} + \frac{87}{103},$$

ce qui est faux.

Investigatio undè procedat inventio suprascripta (p. 54).

L'auteur offre de dire à maître Théodore d'où provient l'invention précédente. (*Et si unde talis inventio procedat habere volueritis, vobis illud, tanquam domino venerando, mittere procurabo.*)

C'est ici la fin de la deuxième partie du *Flos*. Dans ces deux parties, Léonard traite principalement de la résolution de *certaines* équations du premier degré. Partout il montre beaucoup de finesse et d'habileté, et l'on voit qu'il possédait virtuellement les formules cramériennes : n'oublions pas que nous sommes au commencement du XIII[e] siècle.

Incipit liber Quadratorum compositus a Leonardo Pisano; anni MCCXXV (p. 55).

Nous avons déjà vu que c'est une question proposée par Jean de Palerme qui a engagé Fibonacci à composer ce Traité des Carrés dédié à l'empereur Frédéric II. C'est le monument arithmologique le plus précieux que nous ait transmis le moyen âge et où l'auteur, successeur de Diophante et des Arabes, se montre esprit indépendant, original, créateur et digne précurseur de Fermat; ou plutôt du XIII[e] siècle il faut descendre au XVII[e] pour rencontrer dans Fermat un second Fibonacci.

Dans tout le cours de cet écrit, il s'appuie sur ces deux propriétés : La somme de la suite naturelle des nombres impairs est un carré; la différence des deux carrés impairs consécutifs est un multiple de 8.

Il débute ainsi : *Consideravi super originem omnium quadratorum numerorum, et inveni ipsam egredi ex ordinata imparium ascensione.*

De là il conclut qu'étant donné un carré, on peut trouver un second carré qui joint au premier fasse encore un carré. Si le carré est impair, par exemple 9, on fait la somme des nombres impairs qui précèdent 9; on a

$$16 \quad \text{et} \quad 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Si le nombre est pair, par exemple 36, on cherche les deux nombres impairs consécutifs dont la somme est 36, ce sont 17 et 19; faisant la somme de tous les nombres impairs de 1 à 15, on obtient 64, et

$$6^2 + 8^2 = 10^2,$$

et 100 est la somme des nombres impairs de 1 à 19.

Ad inveniendos plures quadratos numeros (p. 57).

Maintenant on peut trouver tant de carrés qu'on veut dont la somme soit un carré, par exemple si l'on demande cinq carrés, le premier étant 9 et dont la somme soit un carré. Il trouve

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + 3612^2 = 3613^2.$$

En général, si la somme de n nombres impairs consécutifs donne un carré, on a un moyen de trouver un second carré qui joint à ce carré donne un carré. Pour trouver ces n nombres, il suffit d'avoir un carré impair divisible par n.

Autre moyen. Si $2a + 1$ est un carré, $8a + 4$ sera aussi un carré; mais $4a^2 + 8a + 4$ est un carré : donc, etc.

Il démontre par la géométrie que

$$(a+1)^2 - a^2 = (a+1) + a$$

et

$$(a+b^2)^2 - a^2 = b(a+b),$$

$$(m^2+n^2)^2 - (m^2-n^2)^2 = 4m^2n^2.$$

Pour ce dernier théorème, il imite la construction d'Euclide, livre X, premier lemme relatif à la proposition 30. Il est fort singulier que ce lemme n'est jamais cité quand il s'agit du théorème numérique de Pythagore; il contient pourtant la solution générale du problème, et cela paraît avoir échappé à tout le monde, excepté à Fibonacci.

Il démontre encore graphiquement d'une manière très-ingénieuse que le terme sommatoire de la suite des nombres impairs est toujours un carré, et la démonstration est fondée en principe sur ce que

$$(n+1)^2 - n^2 = \Delta n^2 = 2n+1,$$

d'où

$$n^2 = \Sigma(2n+1).$$

Problème (p. 66). Étant donné un carré égal à la somme de deux carrés, décomposer ce carré encore d'une autre manière en somme de deux carrés.

Le procédé graphique revient à ceci. Soit

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad d^2 + e^2 = f^2,$$

alors

$$\left(\frac{dc}{f}\right)^2 + \left(\frac{ec}{f}\right)^2 = c^2.$$

Proposition. Si quatre nombres a, b, c, d ne sont pas en proportion et si a^2+b^2 et c^2+d^2 ne sont pas des carrés, on peut décomposer le produit $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

de deux manières en somme de deux carrés, savoir

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Si a^2+b^2 est un carré, il y a évidemment encore une troisième décomposition et une quatrième lorsque c^2+d^2 est aussi un carré.

Léonard démontre parfaitement cette importante proposition qui lui appartient selon l'observation de M. Woepcke (*Journal de Mathématiques*, t. XX, 1855). Diophante peut avoir connu cette propriété, mais ne l'a pas énoncée, et la démonstration surtout par la méthode graphique n'est pas facile. Le nom de Fibonacci doit rester attaché à ce théorème.

A la page 73, il donne l'équivalent de la formule

$$(b^2-a^2)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2.$$

A la page 74,

$$a^2+b^2=c,$$
$$m^2+n^2=p^2,$$
$$cp^2=r^2+s^2,$$
$$\left(\frac{r}{p}\right)^2+\left(\frac{s}{p}\right)^2=c.$$

Page 76. *Somme des carrés de la suite naturelle des nombres.* Il la trouve d'après ce résultat du calcul aux différences

$$n(n+1)(2n+1)-(n-1).n.2n-1$$
$$=\Delta.n.n+1.2n+1=6n^2,$$

d'où

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\Sigma n^2.$$

Page 78. *Somme des carrés de la suite naturelle des*

nombres impairs. D'après le résultat

$$\Delta . 2n + 1 . 2n + 3 . 4n + 4 = 12\,(2n + 1),$$

d'où

$$\Sigma\,(2n + 1)^2 = \frac{2n + 1 . 2n + 3 . 24n + 4}{12}.$$

Il indique de même la somme des carrés des nombres pairs et des nombres ternaires, etc., toujours en présentant les nombres par des lignes et opérant sur ces lignes comme nous sur les *lettres*. C'est Viète qui a remplacé ces lignes par des *lettres*.

Le problème suivant étant le plus important de ce Traité des Carrés, nous allons le donner presque textuellement. Il est précédé de ces deux propositions qui font office de lemme.

Lemme I. Lorsque p et q sont deux nombres premiers,

$$\frac{pq\,(p + q)(p - q)}{24}$$

est toujours un nombre entier, et lorsque p et q sont deux nombres quelconques,

$$\frac{4pq\,(p + q)(p - q)}{24}$$

est un nombre entier.

Le produit

$$4pq\,(p + q)\,(p - q)$$

se nomme *congru*. Nous verrons la raison de cette dénomination.

Lemme II. b étant simultanément moyenne arithmétique entre a_1 et a_{n+1}, entre a_2 et a_{n+2}, entre a_3 et a_{n+3}, etc., entre a_n et a_{2n}, la somme des $2n$ nombres $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ est égale à $2nb$. Si

$$b = 2n,$$

la somme des $2n$ nombres est un carré.

Problème. Trouver trois carrés et un nombre tel, qu'en ajoutant ce nombre au plus petit de ces carrés, on trouve le carré moyen, et qu'en ajoutant ce nombre au carré moyen, on trouve le plus grand carré.

Solution. Nous suivons la marche de Fibonacci, mais en prenant des *lettres* au lieu de *lignes*.

Soient a et b deux nombres *impairs consécutifs*, de sorte que

$$b = a + 2, \quad a + b = 2a + 2 :$$

il s'agit de trouver une suite de nombres impairs consécutifs telle, qu'on puisse la décomposer en deux suites de même somme, et que le nombre des termes de la même suite soit au nombre des termes de la seconde comme $a : b$. Soit la suite des nombres impairs consécutifs

$$\text{(A)} \qquad 2a^2 - 3,\ 2a^2 - 1, \ldots,\ 2a^2 + 4a + 3,$$

elle renferme $2a + 4$ termes.

La moyenne arithmétique entre le premier et le dernier, le deuxième et l'avant-dernier, etc., est

$$2a(a + 1);$$

alors, d'après le lemme II, la somme est

$$4a(a + 1)(a + 2) = c,$$

nombre *congru*, en faisant

$$p = a + 2, \quad q = a.$$

Soit la seconde suite

$$\text{B)} \quad 2a^2 + 4a + 5,\ 2a^2 + 4a + 7, \ldots,\ 2a^2 + 8a + 3.$$

Cette suite renferme $2a$ termes. La moyenne arithmétique est

$$2a^2 + 6a + 4 = 2(a + 1)(a + 2),$$

et la somme est

$$4a(a+1)(a+2);$$

nombre congru. Par conséquent, les deux suites (A) et (B) remplissent les deux conditions énoncées ci-dessus.

Complétant la suite (A) en descendant jusqu'à l'unité, la somme de 1 à $2a^2-5$ est égale à $(a^2-2)^2$; la somme de 1 à $2a^2+4a+3$ est

$$(a^2+2a+2)^2,$$

donc

$$(a^2-2)^2+c=(a^2+2a+2)^2.$$

Opérant de même sorte sur la suite (B), la somme de 1 à $2a^2+4a+3$ est

$$(a^2+2a+2)^2;$$

la somme de 1 à $2a^2+8a+3$ est

$$(a^2+4a+2)^2;$$

et

$$(a^2+2a+2)^2+c=(a^2+4a+2)^2.$$

Le problème est donc résolu. Les trois carrés sont : le petit carré $(a^2-2)^2$, le moyen carré $(a^2+2a+2)^2$, et le grand carré (a^2+4a+2), et le nombre à adjondre est

$$c=4a(a+1)(a+2);$$

on l'appelle *congru,* parce qu'il convient à ces trois carrés qui sont *congruents.* Fibonacci prend $a=2$, alors on a

$$c=240$$

et

$$7^2+240=17^2,\quad 17^2-240=7^2,$$
$$17^2+240=23^2,\quad 23^2-240=17^2.$$

Fibonacci se servant de lignes est obligé d'entrer dans

de longues discussions amenées pour les cas où $a = 1$ et $a^2 - 2$ devient négatif, et dans des cas fractionnaires il a besoin du premier lemme.

Au moyen de signes littéraux, cette discussion est inutile et l'on a en général (Boncompagni, *Ann. di scienze matematiche,* april. 1855) :

$$c = 4mn(m+n)(m-n),$$
$$x = m^2 + n^2,$$
$$y = (m+n)^2 - 2n^2,$$
$$z = (m+n)^2 - 2m^2,$$
$$z^2 + c = x^2$$
$$x^2 + c = y^2.$$

Hec questio predicta in prologo hujus libri (p. 96).

Cette question, proposée par Jean de Palerme, est, comme nous l'avons vu, de satisfaire aux équations

$$x^2 + 5 = y^2,$$
$$y^2 + 5 = z^2,$$

y est le nombre cherché. Multipliant les deux équations par v^2, on a

$$x^2 v^2 + 5v^2 = y^2 v^2, \quad y^2 v^2 + 5v^2 = z^2 v^2.$$

Cherchons un nombre congru de la forme $5v^2$, il suffit de prendre dans les formules précédentes

$$m = 5, \quad n = 4;$$

alors

$$c = 720,$$
$$\frac{c}{5} = 12^2 = v^2,$$
$$v^2 x^2 = 31^2, \quad v^2 y^2 = 41^2, \quad v^2 z^2 = 49^2,$$

d'où

$$y = \frac{41}{12} = 3\,\frac{5}{12}.$$

(Page 98.) Un carré ne peut être un nombre *congru*. Il établit comme lemme qu'on ne peut avoir

$$m\,(m - n) = n\,(m + n),$$

ou bien

$$m^2 = n^2 + 2\,mn;$$

on aurait

$$2\,m^2 = (m + n)^2; \quad \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 = 2,$$

ce qui est impossible en nombres rationnels. Donc

$$mn\,(m + n)\,(m - n)$$

ne peut devenir un carré. Mais il faudrait encore démontrer qu'on ne peut avoir

$$mn = m^2 - n^2;$$

ce qui est d'ailleurs facile, car on aurait

$$4\,m^2 - 4\,mn + n^2 = 5\,n^2, \quad \left(\frac{2\,m - n}{m}\right)^2 = 5;$$

impossible.

On ne peut donc avoir simultanément

$$x^2 + c^2 = y^2, \quad x^2 - c^2 = y^2;$$

mais la démonstration n'est pas complète. Il faut encore prouver :

1°. Que $m, n, m + n, m - n$ ne sont pas des carrés simultanément;

2°. Que $m, n, m^2 - n^2$ ne peuvent être des carrés. Cela ne peut se démontrer que par le théorème de Fermat sur les bi-carrés auxquels Fibonacci n'a nullement pensé; on a eu tort de lui en attribuer la connaissance.

(Page 100.) *Problème.* Satisfaire aux équations

$$x^2 - x = y^2,$$
$$x^2 + x = z^2.$$

Solution. Soit c un nombre congru aux trois carrés u^2, v^2, t^2, de sorte que l'on ait

$$u^2 + c = v^2,$$
$$u^2 - c = t^2,$$

de là

$$u^4 + cu^2 = v^2 u^2,$$
$$u^4 - cu^2 = t^2 u^2,$$
$$\left(\frac{u^2}{c}\right)^2 + \frac{u^2}{c} = \left(\frac{vu}{c}\right)^2,$$
$$\left(\frac{u^2}{c}\right)^2 - \frac{u^2}{c} = \left(\frac{tu}{c}\right)^2;$$

on a donc

$$x = \frac{u}{c}, \quad y = \frac{vu}{c}, \quad z = \frac{tu}{c}.$$

(Page 100.) *Problème.* Satisfaire aux équations

$$x^2 + mx = y^2,$$
$$x^2 - mx = z^2.$$

Solution.

$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{x}{m} = \frac{y^2}{m^2},$$
$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 - \frac{x}{m} = \frac{z^2}{m^2},$$

ce qui revient au problème précédent.

Théorème. Si l'on a trois carrés impairs consécutifs A, B, C, on a

$$C - B - (B - A) = 8;$$

de même si les carrés sont pairs et consécutifs. D'où l'on

conclut que les différences entre les carrés impairs consécutifs donnent la progression 8, 16, 24, 32, etc, et les différences entre les carrés pairs forment la progression 12, 20, 28, 36, etc.

Il emploie ce théorème comme lemme pour résoudre l'équation

$$\frac{x^2 - y^2}{z^2 - x^2} = \frac{a}{b}.$$

Si

$$b = a + 1,$$

on a

$$x = 2a + 1, \quad y = 2a - 1, \quad z = 2a + 3.$$

Si

$$a = 2n + 1, \quad b = 2n + 3,$$

on a

$$x = 2n + 2, \quad y = 2n, \quad z = 2n + 4.$$

Faisons généralement

$$x = m + n, \quad y = m, \quad z = m + 2n,$$

on a

$$\frac{x^2 - y^2}{z^2 - x^2} = \frac{2m + n}{2m + 3n} = \frac{a}{b},$$

$$2m(b - a) = n(3a - b),$$

équation à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de manières.

Un troisième cas particulier est celui

$$a = p^2, \quad b = q^2;$$

alors

$$x = q^2, \quad y = pq, \quad z = p^2.$$

La solution générale de Fibonacci se ramène à ceci :

Soient A_n, $A_{n'}$, $A_{n''}$ trois termes de la suite naturelle des carrés des nombres impairs, les n indiquant les rangs.

On a, d'après le théorème rapporté ci-dessus,

$$A_{n'} - A_n = 4(n'-n)(n+n'-1),$$
$$A_{n''} - A_{n'} = 4(n''-n')(n'+n''-1);$$

on doit donc satisfaire à l'équation

$$b(n'-n)(n+n'-1) = a(n''-n')(n'+n''-1).$$

Exemple I:

$$b=9, \quad a=2,$$

il prend

$$n=4;$$

alors

$$n'=5, \quad n''=8,$$

satisfont à l'équation

$$A_4=49, \quad A_5=81, \quad A_8=225,$$
$$\frac{81-49}{225-81}=\frac{32}{144}=\frac{2}{9}.$$

Fibonacci fait observer que les solutions fractionnaires de l'équation

$$\frac{x^2-y^2}{z^2-x^2}=\frac{a}{b}$$

donnent aussi des solutions en nombres entiers, car on a

$$\frac{p^2x^2-p^2y^2}{p^2z^2-p^2x^2}=\frac{a}{b}.$$

Exemple II:

$$b=43, \quad a=11,$$

il trouve

$$n=3, \quad n'=14, \quad n''=30.$$

Fibonacci parvient à ces diverses valeurs par tâtonnements. Il y a une méthode de solution générale très-simple, très-directe, déjà employée par Diophante pour le cas particulier $a=1$, $b=3$ (Diophante, t. II, pro-

blème 20). Mais Fibonacci ne connaissait probablement pas Diophante qu'il ne cite jamais. D'ailleurs il ne cite qu'Euclide. A-t-il connu Alkharki? c'est fort douteux. Il résout ensuite ce problème qui ne présente aucune difficulté (p. 112) :

$$x^2 + y^2 = u^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = w^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Questio mihi proposita a Magistro Theodoro, Domini Imperatoris phylosopho (p. 114).

$$x + y + z + x^2 = u^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 = v^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

C'est la dernière question; le manuscrit est malheureusement interrompu au verso de la feuille 29; de sorte qu'on n'a pas la solution complète. Elle a été restaurée et généralisée dans un beau travail de M. Genocchi que nous donnerons dans ce journal. Ce qui précède suffit pour justifier la haute importance historique qu'on doit attacher à la découverte du prince Boncompagni. On trouve en outre, dans l'ouvrage cité ci-dessus (*Intorno ad alcune opere, etc.*), des renseignements curieux sur divers personnages. Antonio de' Mazzinghi da Peretola (vers 1350); Dagomar Paulo dell'Abbaco (XIVe siecle) (*); Jean dell' Abbaco, Antoine Corbinelli (XVe siècle), probablement de la famille de l'ami de madame de Sévigné, et plusieurs autres. C'est un ouvrage à consulter par les biographes et les bibliographes.

(*) On lui doit l'idée de partager les nombres en tranches de trois chiffres, pour en faciliter l'énonciation.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE M. CH. STURM (*).

Charles Sturm est né à Genève, alors chef-lieu du département du Léman, le 6 vendémiaire an XII (29 septembre 1803). Sa famille, qui appartenait à la religion protestante, était originaire de Strasbourg et avait quitté cette ville vers 1760. Elle comptait probablement parmi ses ancêtres deux hommes célèbres au XVIe siècle, Jacques Sturm, président (*statt-meister*) de la république de Strasbourg, qui se distingua dans la lutte de cette ville contre Charles-Quint, et Jean Sturm, humaniste, diplomate, théologien, dont le nom se trouve mêlé à toutes les querelles littéraires, politiques et religieuses de son époque.

Le jeune Sturm montra de bonne heure des dispositions extraordinaires, et il obtint au collége de nombreux succès dans toutes les parties de ses études. Il apprit avec une égale facilité les langues anciennes et modernes, la littérature, l'histoire. On nous a même rapporté qu'à douze ans il composait des vers qui décelaient beaucoup d'imagination et de sensibilité. Mais à mesure qu'il avançait en âge, il donnait une préférence de plus en plus marquée aux études scientifiques.

M. Sturm quitta le collége en 1818 pour suivre les cours plus savants de l'Académie de Genève. Il y eut pour professeurs MM. J.-J. Schaub, le colonel (depuis général) Dufour et Simon Lhuilier. Ce dernier, géomètre

(*) On ferait bien de solder l'arriéré et de prononcer les Éloges des académiciens morts. Ne leur devant alors que la vérité, il y a là un noble stimulant, et c'est pour le Secrétaire perpétuel un devoir pieux à remplir envers la mémoire de Lacroix, Legendre, Prony, Sturm, Binet. Tm.

éminent, avait pour son élève une vive affection et se plaisait à lui prédire un brillant avenir. Il eut le bonheur de vivre assez longtemps pour voir ses prédictions se réaliser.

En 1819, un grand malheur vint frapper M. Sturm et le mettre aux prises avec les nécessités de la vie. Son père mourut dans la force de l'âge, ne laissant aucune fortune à sa veuve et à quatre enfants, dont Charles était l'aîné. Pour venir au secours de sa mère qu'il aimait tendrement, M. Sturm, quoique bien jeune, se livra à l'enseignement et commença par donner des leçons particulières. En 1823, il entra comme précepteur dans la famille de Broglie, où il fut chargé de l'éducation du frère de madame de Broglie, fils de la célèbre madame de Staël. Il demeura quinze mois dans cette respectable famille, dont il eut beaucoup à se louer.

M. Sturm accompagna son élève à Paris, vers la fin de 1823. En route, il lia connaissance avec un bibliothécaire de Dijon qui conduisait son fils à l'Ecole Polytechnique. Ces messieurs étaient des lecteurs assidus du *Journal de Gergonne,* où M. Sturm avait déjà inséré quelques bons articles. Quand ils apprirent le nom de leur compagnon de voyage, ils lui firent beaucoup de compliments et de politesses. A vingt ans, de pareilles rencontres, premières joies d'une célébrité naissante, ont un charme tout particulier qui les fait compter parmi les plus grands bonheurs de la vie.

M. Sturm aimait à se rappeler cette époque. Il était alors pauvre et presque inconnu. Mais il avait la conscience de sa force, et son existence modeste était embellie par l'espérance, ce bien souvent préférable au but le plus ardemment poursuivi. « Je suis actuellement, écrivait-il à sa mère, en relation avec des hommes très-savants et très-distingués. Il faut tâcher de m'élever à peu près à leur niveau. »

Ce premier séjour à Paris fut de courte durée. M. Sturm y revint un an après avec son ami d'enfance, M. Daniel Colladon, aujourd'hui professeur à l'Académie de Genève et physicien distingué. De 1825 à 1829, les deux amis vécurent ensemble, mettant en commun leurs travaux, leurs espérances, leurs joies et leurs peines. Le 11 juin 1827, une haute distinction venait récompenser leurs efforts : ils remportaient le grand prix de Mathématiques proposé par l'Académie pour le meilleur Mémoire sur la compression des liquides.

M. Sturm était venu à Paris avec une lettre de recommandation de M. Lhuilier pour M. Gerono. L'éminent professeur accueillit le jeune mathématicien avec une cordialité dont celui-ci lui a toujours gardé une profonde reconnaissance, et lui procura des relations utiles. MM. Arago, Ampère et Fourier suivaient avec intérêt les travaux de M. Sturm et de son ami. Je n'ai pas besoin de dire que les jeunes savants étaient obligés d'abandonner parfois la haute théorie pour des occupations moins relevées, mais plus lucratives. M. Arago, dont la prévoyante amitié embrassait tous les détails, ne laissait échapper aucune occasion de leur envoyer des élèves.

A cette époque, M. Fourier réunissait autour de lui quelques jeunes géomètres, dont la réputation commençait à se faire jour et qui ont tenu depuis ce qu'ils promettaient alors. L'illustre savant les initiait à ses travaux de prédilection et les entraînait dans la route où il avait fait de si importantes découvertes. M. Sturm subit l'heureuse influence de ce maître vénéré, dont il ne parlait jamais qu'avec émotion. Il dirigea ses recherches vers la théorie de la chaleur et l'analyse algébrique. C'est en étudiant les propriétés de certaines équations différentielles qui se présentent dans un grand nombre de questions de physique mathématique, qu'il trouva son fameux

théorème. Cette découverte, publiée en 1829, fit sensation et plaça son auteur au rang des premiers géomètres.

M. Sturm accueillit avec joie la révolution de Juillet dans laquelle il crut voir l'avénement définitif d'une sage liberté. Cette révolution lui fut du moins favorable en lui permettant d'entrer dans l'Instruction publique, dont sa qualité de protestant l'avait éloigné pendant la Restauration. La haute protection de M. Arago le fit nommer, à la fin de 1830, professeur de Mathématiques spéciales au collége Rollin.

C'est de cette époque que date son amitié avec M. Liouville, amitié qui a duré jusqu'à sa mort.

Le 4 décembre 1834, l'Académie des Sciences l'honora du grand prix de Mathématiques, qui devait, aux termes du programme, être décerné à l'auteur de la découverte la plus importante publiée dans les trois dernières années. Le Mémoire couronné, déposé au Secrétariat le 30 septembre 1833, était relatif à la théorie des équations.

En 1836, M. Sturm fut nommé membre de l'Académie des Sciences, en remplacement de M. Ampère, par 46 voix sur 52 votants.

Entré à l'École Polytechnique en 1838, comme répétiteur d'Analyse, M. Sturm devenait deux ans plus tard professeur à cette école. Dans la même année (1840), présenté en première ligne par le Conseil académique et par la Faculté, il occupait la chaire de Mécanique laissée vacante par la mort de Poisson.

M. Sturm était, en outre, officier de la Légion d'honneur (1837), membre de la Société Philomathique, des Académies de Berlin (1835) et de Saint-Pétersbourg (1836), de la Société Royale de Londres (1840). Cette dernière lui avait décerné la médaille de Copley pour ses travaux sur les équations.

M. Sturm se montrait digne de tous ces honneurs par son zèle à remplir ses diverses fonctions. Doué d'une constitution naturellement forte, il pouvait compter sur une longue carrière et de nouveaux succès. Malheureusement, vers 1851, sa santé subit une altération profonde par suite d'une trop forte application à des recherches difficiles, et il fut obligé de se faire remplacer à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique. Il reprit ses Cours à la fin de 1852, mais il ne se rétablit jamais complétement. Malgré les soins de sa famille qui retardèrent, mais ne purent arrêter les progrès du mal, il succomba le 18 décembre 1855, à l'âge de cinquante et un ans (*).

M. Sturm n'était pas seulement un homme de talent, c'était aussi un homme de cœur, bon pour sa famille, bon pour ses amis, dont le nombre était grand. « J'ai beaucoup d'amis, » disait-il avec un naïf orgueil, et cette parole, qui chez tout autre aurait passé pour une exagération, était rigoureusement vraie. A ceux que j'ai déjà cités, j'ajouterai, sans prétendre à une énumération complète, MM. Lejeune-Dirichlet, Ostrogradsky, Brassine, Catalan. M. Faurie, d'abord élève, devenu ensuite l'ami intime de M. Sturm, mérite une mention spéciale pour le dévouement dont il a fait preuve dans les circonstances les plus pénibles.

Dans sa prospérité, M. Sturm n'oubliait pas les jours difficiles et le généreux appui qu'il avait reçu de MM. Ampère, Fourier, Arago. Il se plaisait à venir en aide aux jeunes gens qui débutaient dans la carrière des sciences et il savait les obliger avec une délicatesse admirable.

M. Sturm se taisait volontiers avec les personnes qu'il

(*) Il n'a pas été marié et laisse de modestes économies et un riche capital de gloire à une sœur digne d'un tel héritage, malheureusement peu efficace pour l'existence. Puisse y suppléer un ministre, savant académicien, juste rémunérateur de services consciencieux. Car pour Sturm la science était un *but*; pour la foule, elle est un *moyen*. TM.

ne connaissait pas ; mais quand sa timidité naturelle était vaincue, il révélait tout le charme d'un esprit fin et original. Il était passionné pour la musique des grands maîtres, et nous tenons de lui qu'à une époque où ses ressources étaient bien faibles, il s'imposait des privations afin de pouvoir entendre les chefs-d'œuvre de Rossini et de Meyerbeer.

Comme professeur, M. Sturm se distinguait par la clarté et la rigueur. On lui doit beaucoup de démonstrations ingénieuses qui, répandues par ses élèves, ont ensuite passé dans des livres dont les auteurs ont presque toujours *oublié* de le citer. Mais il était riche, point avare et ne réclamait jamais. « En ai-je assez perdu, disait-il en riant, de ces petits objets! et combien peu m'ont été rapportés par d'honnêtes ouvriers! A la longue, cependant, le total peut faire, comme on dit, une perte *conséquente.* »

Les qualités de M. Sturm étaient bien appréciées par la jeunesse intelligente qui suivait ses leçons. « On admirait, dit l'un de ses élèves (*), (et j'ajouterai : l'on aimait) cet homme supérieur s'étudiant à s'effacer, pénétrant dans l'amphithéâtre avec une timidité excessive, osant à peine regarder son auditoire. Aussi le plus religieux silence régnait-il pendant ses leçons, et on pouvait dire de lui comme d'Andrieux, qu'il se faisait entendre à force de se faire écouter, tant est grande l'influence du génie! »

Enfin, pour achever de faire connaître l'homme éminent que nous venons de perdre, nous citerons encore les paroles touchantes prononcées sur sa tombe par M. Liouville, le jeudi 20 décembre 1855.

(*) M. Regray-Belmy, ancien élève de l'École Polytechnique. Voir le *Siècle* du 30 décembre 1855.

« Messieurs,

» Le géomètre supérieur, l'homme excellent dont nous accompagnons les restes mortels, a été pour moi, pendant vingt-cinq ans, un ami dévoué; et par la bonté même de cette amitié, comme par les traits d'un caractère naïf uni à tant de profondeur, il me rappelait le maître vénéré qui a guidé mes premiers pas dans la carrière des mathématiques, l'illustre Ampère.

» M. Sturm était à mes yeux un second Ampère : candide comme lui, insouciant comme lui de la fortune et des vanités du monde; tous deux joignant à l'esprit d'invention une instruction encyclopédique; négligés ou même dédaignés par les habiles qui cherchent le pouvoir (*), mais exerçant une haute influence sur la jeunesse des écoles, que le génie frappe; possédant enfin, sans l'avoir désiré, sans le savoir peut-être, une immense popularité.

» Prenez au hasard un des candidats à notre Ecole Polytechnique, et demandez-lui ce que c'est que le théorème de M. Sturm : vous verrez s'il répondra! La question pourtant n'a jamais été exigée par aucun programme : elle est entrée d'elle-même dans l'enseignement, elle s'est imposée comme autrefois la théorie des couples.

» Par cette découverte capitale, M. Sturm a tout à la fois simplifié et perfectionné, en les enrichissant de résultats nouveaux, les éléments d'algèbre.

» Ce magnifique travail a surgi comme un corollaire d'importantes recherches sur la mécanique analytique et sur la mécanique céleste, que notre confrère a données, par extrait seulement, dans le *Bulletin des Sciences* de M. Férussac.

(*) Lorsque des Lagrange, des Laplace, des Poisson, zélés et assidus travailleurs, arrivent au pouvoir, il faut s'en féliciter. Tm.

» Deux beaux Mémoires sur la discussion des équations différentielles et à différences partielles, propres aux grands problèmes de la physique mathématique, ont été du moins publiés en entier grâce à mon insistance. « La » postérité impartiale les placera à côté des plus beaux Mé» moires de Lagrange » (*). Voilà ce que j'ai dit et imprimé il y a vingt ans, et ce que je répète sans craindre qu'aujourd'hui personne vienne me reprocher d'être trop hardi.

» M. Sturm a été le collaborateur de M. Colladon dans des expériences sur la compressibilité des liquides que l'Académie a honorées d'un de ses grands prix.

» Nous lui devons un travail curieux sur la vision, un Mémoire sur l'optique, d'intéressantes recherches sur la mécanique, et en particulier un théorème remarquable sur la variation que la force vive éprouve lors d'un changement brusque dans les liaisons d'un système en mouvement. Quelques articles sur des points de détail ornent nos recueils scientifiques.

» Mais, bien qu'il y ait de quoi suffire à plus d'une réputation dans cet ensemble de découvertes solidement fondées et que le temps respectera, les amis de notre confrère savent que M. Sturm est loin d'être là tout entier, même comme géomètre. Puissent les manuscrits si précieux que quelques-uns de nous ont entrevus se retrouver intacts entre les mains de sa famille! En les publiant, elle ne déparera pas les chefs-d'œuvre que nous avons tant admirés.

» L'originalité dans les idées, et, je le répète, la solidité dans l'exécution, assurent à M. Sturm une place à part.

(*) M. Liouville s'exprimait ainsi dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences le 14 décembre 1836, et cependant M. Sturm était son concurrent pour la place vacante par le décès d'Ampère. Un pareil fait, assez rare dans l'histoire des luttes académiques, porte avec lui son éloge.

Il a eu de plus le bonheur de rencontrer une de ces vérités destinées à traverser les siècles sans changer de forme, et en gardant le nom de l'inventeur, comme le cylindre et la sphère d'Archimède.

» Et la mort est venue nous l'enlever dans la fleur de l'âge! Il est allé rejoindre Abel et Gallois, Göpel, Eisenstein, Jacobi.

» Ah! cher ami, ce n'est pas toi qu'il faut plaindre. Echappée aux angoisses de cette vie terrestre, ton âme immortelle et pure habite en paix dans le sein de Dieu, et ton nom vivra autant que la science.

» Adieu, Sturm, adieu. »

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE DES TRAVAUX DE M. STURM.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES DE GERGONNE.

1. Tome XIII (1822-23), page 289. — *Extension du problème des courbes de poursuite.*

Solution d'une question proposée par le rédacteur.

2. *Ibid.*, p. 314. — *Déterminer en fonction des côtés d'un quadrilatère inscrit au cercle* : 1° *l'angle de deux côtés opposés*; 2° *l'angle des diagonales.*

3. Tome XIV (1823-24), p. 13. — *Étant donnés trois points et un plan, trouver dans ce plan un point tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit un minimum.*

M. Sturm, sans résoudre le problème par des formules explicites, démontre, à l'aide de considération empruntées à la mécanique, plusieurs propriétés du point cherché. Il généralise ensuite le problème.

4. *Ibid.*, p. 17. — *Démonstration analytique de deux théorèmes sur la lemniscate.*

Démonstration de deux théorèmes énoncés par M. Tal-

bot, concernant l'excès fini de l'asymptote d'une hyperbole équilatère sur le quart de cette courbe.

5. *Ibid.*, p. 108. — *Recherches analytiques sur une classe de problèmes de géométrie dépendants de la théorie des maxima et des minima.*

Maximum et minimum d'une fonction des distances d'un point variable à d'autres points dont les uns sont fixes, les autres assujettis à se trouver sur des courbes ou sur des surfaces données.

6. *Ibid.*, p. 225. — *Démonstration de deux théorèmes sur les transversales.*

7. *Ibid.*, p. 286. — *Lieu des points desquels abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle et joignant les pieds de ces perpendiculaires, on obtienne un triangle d'aire constante.*

8. *Ibid.*, p. 302. — *Recherche de la surface courbe de chacun des points de laquelle menant des droites à trois points fixes, ces droites déterminent sur un plan fixe les sommets d'un triangle dont l'aire est constante.*

9. *Ibid.*, p. 381. — *Courbure d'un fil flexible et inextensible dont les extrémités sont fixes et dont tous les points sont attirés et repoussés par un centre fixe, suivant une fonction déterminée de la distance.*

10. *Ibid.*, p. 390. — *La distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit.*

11. Tome XV (1824-25), p. 100. — *Démonstration de quatre théorèmes sur l'hyperbole.*

12. *Ibid.*, p. 205. — *Recherches sur les caustiques.*

Cas où la ligne réfléchissante ou séparatrice de deux

milieux est une circonférence. Propriétés des ovales de Descartes.

Ce Mémoire est le seul morceau de Géométrie que nous ait laissé M. Sturm et montre ce qu'il aurait pu faire dans ce genre s'il l'avait cultivé.

13. *Ibid.*, p. 250. — *Théorèmes sur les polygones réguliers.*

Démonstration et généralisation d'un théorème de Lhuilier.

14. *Ibid.*, p. 309. — *Recherches analytiques sur les polygones rectilignes plans ou gauches.*

15. *Ibid.*, p. 238. — *Recherches d'analyse sur les caustiques planes.*

Relations entre les longueurs des rayons incidents et réfractés correspondants, prises, l'une et l'autre, depuis le point d'incidence jusqu'à ceux où ces rayons touchent leurs caustiques respectives. Rectification des caustiques planes.

16. Tome XVI, p. 265. — *Mémoire sur les lignes du second ordre.* (Première partie.)

Propriétés des coniques qui ont quatre points communs. Pôles et polaires. Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

17. Tome XVII, p. 177. — *Mémoire sur les lignes du second ordre.* (Deuxième partie.)

On y trouve les deux théorèmes suivants qui sont une généralisation de celui de Desargues :

Quand deux coniques sont circonscrites à un quadrilatère, si l'on tire une transversale quelconque qui rencontre cette courbe en quatre points et deux côtés opposés du quadrilatère en deux autres points, ces six points seront en involution.

Quand trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, une transversale quelconque les rencontre en six points qui sont en involution.

BULLETIN DES SCIENCES DE FÉRUSSAC.

M. Sturm a rédigé en 1829 et 1830 la partie mathématique de ce *Bulletin*.

18. Tome XI (1829), p. 419. — *Analyse d'un Mémoire sur la résolution des équations numériques.* (Lu à l'Académie des Sciences le 13 mai 1829.)

Ce Mémoire contient le fameux théorème de M. Sturm. La démonstration en a paru pour la première fois dans l'*Algèbre* de MM. Choquet et Mayer (1re édition, 1832). M. Sturm a donné dans le même ouvrage une démonstration plus simple que celle de M. Cauchy, du théorème que *toute équation algébrique a une racine.*

Voici comment M. Sturm parle de ses obligations envers M. Fourier : « L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble de ses travaux sur l'analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ces précieuses recherches a été communiquée à quelques personnes. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture, et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance de ceux des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la résolution des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que que je vais énoncer. »

19. *Ibid.*, p. 422. — *Extrait d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences* (1er juin 1829).

Extension du theorème de Fourier et de celui de Des-

cartes aux équations de la forme

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots = 0,$$

dans lesquelles α, β, γ,... sont des nombres réels quelconques.

A la fin de cet extrait, M. Sturm énonce quelques théorèmes relatifs au mouvement de la chaleur dans une sphère ou dans une barre. Ils devaient faire partie d'un Mémoire qui paraît n'avoir jamais été rédigé. M. Liouville les a démontrés très-simplement dans son Cours du Collége de France (2e semestre 1856). Ce Cours, consacré à l'analyse des travaux de M. Sturm, nous a été très-utile pour la composition de cette Notice.

20. *Ibid.*, p. 273. — *Note présentée à l'Académie* (8 juin 1829.)

Réalité des racines de certaines équations transcendantes. Sur les coefficients des séries qui représentent une fonction arbitraire entre des limites données.

Cette Note a été refondue dans d'autres travaux de l'auteur.

21. Tome XII (1829), p. 314. — *Extrait d'un Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires.* (Présenté à l'Académie des Sciences le 27 juillet 1829.)

Etude des racines des équations qui se présentent dans l'intégration d'un système d'équations linéaires. Nombre de ces racines comprises entre deux limites données.

Cet extrait, fort étendu, peut tenir lieu du Mémoire lui-même. Dans une note, l'auteur avertit que les conclusions d'un Mémoire précédent (*voir* plus haut n° 19) s'étendent à un grand nombre d'équations transcendantes.

JOURNAL DE M. LIOUVILLE.

22. Tome I (1836), p. 106. — *Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre.* (Lu à l'Académie des Sciences le 30 septembre 1833.)

Très-beau Mémoire dans lequel les propriétés des fonctions qui satisfont à une équation différentielle sont étudiées sur cette équation même.

Une analyse de ce Mémoire a paru dans le journal l'*Institut* du 9 novembre 1833. Le même journal, dans le numéro du 30 novembre, contient une Note de M. Sturm, qui complète sa théorie.

23. *Ibid.*, p. 278. — *Démonstration d'un théorème de M. Cauchy.* (En commun avec M. Liouville.)

Théorème sur le nombre des points-racines renfermés dans un contour donné.

24. *Ibid.*, p. 290. — *Autres démonstrations du même théorème.*

25. *Ibid.*, p. 373. — *Sur une classe d'équations à différentielles partielles.*

Equations de la forme

$$g\frac{du}{dt} = \frac{dk\frac{du}{dx}}{dx} - lu.$$

Complément du Mémoire n° 22.

(*Voir* aussi *Comptes rendus,* t. IV, p. 35.)

26. Tome II, p. 220. — *Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries, etc.* (En commun avec M. Liouville.)

(*Voir* aussi *Comptes rendus,* t. IV, p. 675.)

27. Tome III, 357. *Mémoire sur l'optique.*

Surfaces caustiques formées par des rayons lumineux émanés d'un point et qui éprouvent une suite de réfractions ou de réflexions.

28. Tome VI, p. 315. — *Note à l'occasion d'un article de M. Delaunay sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante.*

29. Tome VII, p. 132. — *Note à l'occasion d'un article de M. Gascheau sur l'application du théorème de M. Sturm aux transformées des équations binômes.*

30. *Ibid.*, p. 345. — *Note sur un théorème de M. Chasles.*

Démonstration nouvelle de ce théorème : Un canal infiniment petit dont les arêtes curvilignes sont des trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau relatives à un corps quelconque, intercepte sur les surfaces de niveau des éléments pour lesquels l'attraction exercée par le corps a la même valeur.

31. *Ibid.*, p. 356. — *Démonstration d'un théorème d'algèbre de M. Sylvester.*

Ce beau théorème complète celui de M. Sturm en donnant la manière dont les différents restes se composent avec les facteurs simples de l'équation proposée.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

32. Tome IV, p. 720. — *Note sur un théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations simultanées.* (En commun avec M. Liouville.)

33. Tome V, p. 867. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bravais concernant les lignes formées dans un plan par des points dont les coordonnées sont des nombres entiers.*

34. Tome VII, p. 1143. — *Rapport sur deux Mémoires*

de M. Blanchet relatifs à la propagation et à la polarisation du mouvement dans un milieu élastique.

35. Tome VIII, p. 788. — *Note relative à des remarques critiques sur les travaux de M. Liouville contenues dans un Mémoire de M. Libri.*

36. Tome XIII, p. 1046. — *Mémoire sur quelques propositions de mécanique rationnelle.*

« Si les liaisons d'un système de points matériels en mouvement sont changées dans un intervalle de temps très-court, la somme des forces vives acquises avant cet intervalle surpassera celle qui aura lieu immédiatement après d'une quantité égale à la somme des forces vives correspondantes aux vitesses perdues dans le passage du premier état du système au second. »

37. Tome XX, p. 554, 761 et 1228. — *Mémoire sur la théorie de la vision.*

L'auteur explique comment la vision peut être distincte à diverses distances. Les rayons émanés d'un point, après avoir traversé les milieux inégalement réfringents qui constituent l'œil, forment une surface caustique. Pour que la vision soit distincte, il suffit qu'une partie de cette caustique, qui se réduit presque à une ligne mathématique et dans laquelle les rayons sont plus condensés que partout ailleurs, vienne rencontrer la rétine.

38. Tome XXVI, p. 658. — *Note sur l'intégration des équations générales de la dynamique.*

Théorèmes d'Hamilton et de Jacobi.

39. Tome XXVIII, p. 66. — *Rapport sur un Mémoire de M. L. Wantzel ayant pour titre :* Théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques.

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS.

40. Tome V (1834), p. 267. — *Mémoire sur la com-*

pression des liquides. (En commun avec M. Colladon.)

Ce Mémoire a remporté le grand Prix de Mathématiques en 1827. Il a aussi été publié dans les *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXII, p. 113.

41. Tome VI (1835), p. 271. — *Mémoire sur la résolution des équations numériques.* (*Voir* plus haut n° 18.)

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

42. Tome X (1851), p. 419. — *Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

MANUSCRITS.

43. Un Mémoire très-étendu sur la *communication de la chaleur dans une suite de vases.*

44. Un Mémoire *sur les lignes du second ordre,* dont les dix premiers paragraphes seulement ont paru dans les *Annales de Gergonne.* (*Voir* plus haut n°s 16 et 17.)

Ces deux Mémoires sont en état d'être imprimés, et M. Liouville a bien voulu se charger de leur publication.

Les autres papiers de M. Sturm contiennent des calculs relatifs à des Mémoires déjà publiés, à des extraits de ses lectures, et enfin à des recherches particulières sur les équations. La plupart de ces calculs n'étant accompagnés d'aucun discours, il est très-difficile de suivre la pensée de l'auteur. On donnera des extraits de ce qu'une patiente investigation y fera découvrir d'intéressant.

COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

45. *Les Leçons d'Analyse et de Mécanique* ont été rédigées par des élèves de l'École Polytechnique et autographiées pour l'usage de cette école. Il n'en a été tiré qu'un petit nombre d'exemplaires.

Le texte de ces Leçons a été revu et corrigé en grande partie par M. Sturm et les théories les plus importantes ont été rédigées par lui. Leur ensemble formera quatre volumes. L'auteur de cette Notice est chargé de leur publication, conformément au désir exprimé par M. Sturm lui-même. Le premier volume paraîtra le 1[er] juillet prochain, et les trois autres suivront à des époques très-rapprochées.

E. PROUHET.

BIBLIOGRAPHIE.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS, publiées par *U.-J. Le Verrier,* directeur de l'Observatoire. Tome I[er]. Paris, Mallet-bachelier, imprimeur-libraire de l'Observatoire impérial de Paris, quai des Augustins, 55. In-4, VII-419 pages, une planche gravée; 1855. Prix: 27 francs (*).

Cet ouvrage fait époque. Nous assistons à la résurrection scientifique de l'Observatoire de France. Monsieur le Directeur annonce (V-VI) que chaque année on publiera les observations de l'année précédente, observations non pas *brutes,* mais *réduites, discutées, comparées* avec la théorie. Ces opérations, qui sont vitales pour l'astronomie, exigent des données précises, la construction de Tables *exactes, commodes,* d'une préparation longue et pénible. Ces données et ces Tables, en cours d'exécution, seront également publiées. En attendant, le célèbre directeur insérera dans les *Annales,* sous le titre de *Recherches astronomiques* (**), des Mémoires sur plu-

(*) Les tomes II et III sont *sous presse.*

(**) C'est aussi le titre d'un ouvrage de Bessel, *Astronomische untersuchungen.*

sieurs points de la science, et des chapitres didactiques destinés à résumer les formules et les théories les plus usuelles.

Ce volume commence (1-68) par un Rapport au Ministre de l'Instruction publique sur l'Observatoire impérial de Paris et projet d'organisation (décembre 1854).

On peut distinguer dans ce Rapport trois parties :

1°. *Historique.*

Un exposé historique succinct, lucide, instructif, des progrès de la science depuis Hipparque jusqu'à Herschel, Olbers, Bessel. L'astronomie complète comprend l'uranoscopie et l'uranologie. M. Le Verrier fait ressortir avec force et raison que l'uranoscopie, c'est-à-dire l'art d'observer avec précision, a créé l'astronomie et en est le fondement. Kepler dit qu'il a été mis sur la voie de réformer toute l'astronomie par les efforts qu'il a faits pour faire disparaître dans l'orbite de Mars une différence de *huit minutes* que présentaient les observations de Tycho comparées avec la théorie. Aujourd'hui, depuis l'admirable découverte de Neptune, qui a rectifié les écarts du mouvement d'Uranus, dans toutes les planètes les erreurs ne s'élèvent plus qu'à *quelques secondes;* comme elles existent partout, on ne peut pas les négliger et il faut s'efforcer de les faire disparaître. Ce plaidoyer en faveur de l'*observation* est d'autant plus méritoire, que l'auteur doit sa célébrité uniquement à des travaux uranologiques. La *Mécanique céleste,* qui a donné une si forte impulsion à la théorie, a eu en France la malheureuse conséquence de faire négliger et même de faire dédaigner, reléguer au second rang l'uranoscopie. On attacha plus d'importance à établir des séries convergentes qu'à installer des instruments de précision. Aussi « l'Observatoire de Paris, nous » sommes forcé de l'observer, n'a pris aucune part aux

» études d'astronomie sidérale : tout ce grand mouvement s'est accompli en dehors de lui. » (P. 31.) On doit ajouter que ce n'est qu'en 1852 qu'on a découvert en France le premier astéroïde ; que cette découverte a été faite à Paris, *en dehors de l'Observatoire,* par un *étranger,* intelligent amateur d'investigations célestes (*).

Décrivant la formation et l'organisation des mondes, le style répond toujours à l'élévation du sujet, et rappelle souvent, par sa majestueuse simplicité, Laplace, Fourier, Arago. C'est une lecture agréable à tout homme instruit, obligée pour tout professeur de cosmographie.

2°. *État de l'édifice et des instruments.*

Il est indispensable, pour la précision, que la température des salles soit égale à celle de l'air extérieur. « A Poulkova, les murailles sont en bois, et la pénétration de la » chaleur à travers le toit est combattue par une épaisse » couche de terre glaise. De larges fenêtres, ouvertes en » temps convenable, permettent d'obtenir la même tem- » pérature à l'intérieur qu'à l'extérieur. Ces précautions » n'ont pas été prises à Paris et à l'égard de la salle aux » observations. La couverture, entièrement *métallique,* » et disposée en forme de caisson, concentre et transmet » à l'intérieur, dans les beaux jours, une forte portion » de la chaleur qu'elle reçoit du soleil. Il en est de même » des murailles, qui sont épaisses et complétement con- » struites en pierre. Aussi la température de la salle » reste-t-elle presque toujours pendant les nuits, et quelque soin qu'on ait d'ouvrir les fenêtres, plus élevée » que la température extérieure. C'est souvent le con- » traire pendant le jour. » (Page 19.)

(*) M. Goldschmidt, peintre allemand. Polymnie a été découverte en 1854 à l'Observatoire par M. Chacornac, assidu et zélé astronome.

Il est encore indispensable, pour certaines observations, qu'on puisse se procurer un horizon artificiel, tel qu'un bain de mercure qui réfléchisse nettement les images. « Or l'incertitude des images est telle, que la plupart » du temps il est difficile de les observer. Le mal provient ici de deux causes : de la situation de l'observatoire *au sein d'une grande ville* et de la *vicieuse construction* de l'observatoire lui-même. Lorsque je » cherchai, il y a huit mois, à introduire l'usage indispensable du bain de mercure dans le service régulier de » l'Observatoire, aucune observation n'était habituellement possible pendant le jour. Dans la nuit, on pouvait obtenir un bain assez calme; mais alors une voiture, même assez légère, venait-elle à entrer dans » Paris, en franchissant une des barrières Saint-Jacques » ou d'Enfer, l'observateur était prévenu de sa présence » par une légère trépidation du mercure. Bientôt, en effet, on entendait la voiture s'avancer, et lorsqu'elle » était parvenue dans les environs de l'Observatoire, l'agitation du mercure était telle, que toute observation » devenait impossible au cercle : souvent même le bruit, » empêchant d'entendre les battements de la pendule, » forçait l'observateur à la lunette de s'arrêter à son » tour. » (Page 20.)

Instruments de passage.

La force de la lunette méridienne de Greenwich est à celle de la lunette de l'Observatoire de Paris comme 16 est à 9, « c'est-à-dire presque double. Ce fait n'a pas besoin de commentaire. Nombre de petits astres, que » nous ne pouvons voir dans la lunette méridienne de » Paris, sont observés à Greenwich; et quant à ceux que » nous pouvons apercevoir, comme ils nous apparaissent » deux fois plus faibles qu'à Greenwich, il est trop évi-

» dent que nous en fixons plus difficilement la position. » (Page 14.)

Défauts de l'instrument. 1°. Il existe entre les diamètres des deux tourillons une petite différence. 2°. L'axe de rotation de la lunette n'a pas la stabilité nécessaire. 3°. L'axe optique de la lunette laisse aussi à désirer.

Cercle de déclinaison de Gambey.

« La lunette du cercle de déclinaison est encore plus » faible que la lunette méridienne. Tandis qu'à l'égard de » la puissance optique, les instruments de passage de » Greenwich et Paris sont dans le rapport de 16 à 9, ainsi » que nous l'avons vu plus haut, les instruments qui ser- » vent à la mesure des déclinaisons sont dans le rapport » de 16 à 7! Aussi, tandis qu'à Greenwich les observa- » tions de toutes les petites planètes peuvent être faites » sans difficulté et avec exactitude, il arrive les trois » quarts du temps à Paris, qu'après avoir attendu jusqu'à » une heure ou deux heures du matin, les observateurs » sont réduits à inscrire sur le registre que, nonobstant la » beauté du ciel, il leur a été impossible de voir l'astre; » ou bien, si l'on est parvenu à l'observer à la lunette » méridienne, sa détermination au cercle n'a pu être ef- » fectuée, le second instrument étant plus faible que le » premier. Aussi l'observation est incomplète : d'où ré- » sultent deux conséquences : un découragement profond » atteint inévitablement les observateurs consciencieux, » et, ce qui est plus grave, lorsque les observations se- » ront publiées, elles se trouveront, vis-à-vis des obser- » vations étrangères, dans un état d'infériorité impos- » sible à supporter. » (Page 18.)

Grande lunette parallatique.

Il s'est passé pour cet instrument des choses d'une

étrangeté incroyable. Il semble que le bâtiment, la lunette, le pied et la base aient été construits isolément sans penser à les mettre en relation. Ainsi les deux tiers de la surface du plateau, destinée à porter un poids de 7 à 8000 kilogrammes, sont en porte-à-faux. Le poids d'un homme placé sur le bord de la plaque, lui imprime une flexion très-notable (p. 33); bien plus, les dimensions du pied ont été établies sur une lunette ayant 8 mètres de distance focale; on a reconnu depuis que la distance focale est plus longue de 8 décimètres. Cet excès de dimension a des conséquences fâcheuses; « car si l'on considère que, tout en remplissant les conditions posées ci-dessus, il faut encore faire en sorte, d'une part, de ménager à l'astronome une place suffisante pour qu'il puisse observer dans la position verticale de la lunette, et de l'autre, que cette lunette puisse s'abattre dans une position horizontale sans heurter les parois de la coupole. » (Page 34.)

3°. *Palliatifs.*

Dire la vérité à un malade sur sa situation est souvent l'acte d'un méchant; lorsque ce malade est une institution publique ayant un intérêt national, dire la vérité est le devoir d'un bon citoyen, et M. Le Verrier a bien mérité du pays en montrant l'état au vrai. Il indique aussi les remèdes. Cette troisième partie est la partie faible de ce beau Rapport. Les remèdes ne sont que d'impuissants palliatifs, tandis qu'il faut un remède héroïque. Le célèbre Directeur déclare que, quoi qu'on fasse, on ne fera jamais de l'observatoire actuel qu'un observatoire de *second ordre*. « Mais entreprendre de refaire avec les dispositions actuelles un observatoire de *premier ordre*, ce qui exigerait qu'on rectifiât les fondations et qu'on en fît de nouvelles pour les collimateurs, qu'on modifiât complète-

» ment la construction de la salle elle-même, qu'on ac-
» crût enfin le pouvoir optique des instruments en même
» temps qu'on y introduirait des modifications mécani-
» ques, c'est-à-dire, en un mot, *tout changer*, construc-
» tions et instruments, constituerait une entreprise qui
» donnerait beaucoup plus de peine et coûterait beaucoup
» plus cher qu'une construction nouvelle. » (Page 22.)

Second ordre n'est pas français. La nation doit être partout au premier rang. Pour cela que faut-il faire? Écoutons encore M. Le Verrier. « Déjà la Russie s'était
» signalée par la culture de l'astronomie, notamment
» dans l'observatoire de Dorpat, lorsque son gouverne-
» ment résolut de fonder un observatoire modèle, supé-
» rieur à tout ce qu'on avait édifié jusque-là. L'empereur
» accorda un crédit *illimité* pour la fondation du nou-
» vel établissement, choisit lui-même l'emplacement, et
» ordonna que la construction des instruments serait
» mise au concours entre les artistes de toute l'Europe.
» L'exécution de ce vaste plan, confiée à l'un des plus
» éminents astronomes de l'époque, ancien directeur de
» Dorpat, fut digne de la pensée du fondateur. En 1838,
» l'observatoire était construit, les instruments installés.
» Sur le crédit illimité accordé pour la construction, il
» avait été dépensé une somme de *deux millions et demi*,
» indépendamment du prix du terrain. Enfin l'observa-
» toire recevait une dotation *annuelle* de *quatre-vingt*
» *mille* francs. » (Page 12.)

La position financière de la France est-elle moins bonne que celle de la Russie? Devons-nous reculer devant une dépense que la Russie a faite et fait encore annuellement? Les vainqueurs d'Alma seront-ils vaincus à Pulkova? Croit-on que le souverain qui a achevé le Louvre, changé Paris en une ville monumentale, rendu au pays sa prépondérance politique et militaire, croit-on que Napo-

léon III sera moins bien disposé, se montrera moins libéral envers la plus sublime des sciences qu'un empereur de Russie? *Absit, absit.* M. Le Verrier n'a qu'à vouloir, et bientôt nous verrons s'élever aux environs de Paris un observatoire du *premier ordre*, et bientôt aussi, grâce au génie français, il s'y formera des *astronomes du premier ordre*. Une puissante impulsion serait l'établissement d'observatoires secondaires dans nos principaux ports, en Algérie, dans nos colonies, et surtout dans la Nouvelle-Calédonie, récente possession (*). Que de découvertes à faire dans l'hémisphère austral? Nous ne savons rien sur les aurores *australes:* phénomène qui, bien étudié, paraît destiné à nous révéler un jour de grands mystères.

Nous consacrerons un second article aux *Recherches astronomiques*.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES, composées de plusieurs problèmes plaisants et facétieux en fait d'arithmétique, géométrie, méchanique, optique et autres parties de ces belles sciences. Seconde édition, reveue, corrigée et augmentée. A Paris, chez Rollet Boutonné, au Palais, en la gallerie des libraires. MDCXXVI. Petit in-8 de 188 pages.

La dédicace est signée H. Van Etten. C'est un pseudonyme. L'ouvrage est du P. Jean Leurechon, jésuite lorrain. La première édition est de Pont-à-Mousson, 1624. Cette seconde édition, de Paris, a été revue la même année par Denis Henrion. Il y a deux éditions de Rouen (1627 et 1628); une autre de Paris (1630), donnée

(*) Lire une Lettre de M. Caillet, examinateur hydrographe, contenant à ce sujet d'excellentes vues telles qu'on peut les attendre d'un savant si compétent, d'un calculateur si exercé (*Annales de l'Observatoire impérial de Paris*, tome Ier, page 47).

par Claude Mydorge, le célèbre ami de Descartes. La cinquième et dernière édition est de Paris 1661.

L'arithmétique renferme des questions pour deviner des nombres pensés, des objets cachés, etc.; on les trouve déjà dans le *Lilawati* et dans l'*Anthologie grecque*, et plusieurs se sont conservées dans nos Traités d'Algèbre. Le 74e problème roule sur l'aimant. On y lit (p. 96) :

« Quelques-uns ont voulu dire que par le moyen d'un » aimant ou autre pierre semblable les personnes ab- » sentes se pourroient entreparler. Par exemple, Claude » étant à Paris et Jean à Rome, si l'un et l'autre avait » une aiguille frottée à quelque pierre, dont la vertu fût » telle, qu'à mesure qu'une aiguille se mouvrait à Paris, » l'autre se remuât tout de même à Rome, etc. »

L'électricité s'est chargée de résoudre le problème posé en 1636.

Le problème 86 (p. 143) traite des canons et comment on peut lancer des boulets sans *pouldre* au moyen de la vapeur d'eau employée comme force projective (*).

Les *Récréations mathématiques* de Jacques Ozanam (1648, 1694, 1735, la même édition avec la date 1741) ont fait oublier celles du jésuite. On a encore sous le même titre un ouvrage de Guyot (Guillaume-Germain) en 4 volumes in-8 de 1769. Enfin Montucla a publié des *Récréations mathématiques*, d'abord sous le pseudonyme de Chanla, géomètre forésien, Paris, 1778, et avec les lettres initiales de son nom une nouvelle édition en 1790.

Muser (F.-W) a publié en allemand des *Récréations arithmétiques*; Munster, 1831; et Cattois (C) : *Calendrier mental grégorien* ou *Curiosités mathématiques, utiles, instructives et amusantes*. In-12; Orléans, 1852.

(*) C'est ce que Perkins a voulu réaliser naguère.

Des Méthodes en Géométrie, par M. *Paul Serret*, professeur de mathématiques. Paris, Mallet-Bachelier, 1855. In-8 de xvi-144 pages. Prix : 6 francs (*).

Les philosophes distinguent deux grandes routes ou méthodes générales propres à conduire à la connaissance de la vérité, savoir : l'analyse et la synthèse ; et, suivant leur habitude, ils ont beaucoup disserté sur les caractères essentiels de chacune de ces méthodes ainsi que sur la préférence qu'il convient d'accorder à l'une ou à l'autre. Les géomètres se mêlent rarement à de pareilles discussions : d'abord ils ne voient pas ce que la science peut gagner à une description minutieuse de l'analyse et de la synthèse, car l'important n'est pas de savoir, dans le dernier détail, en quoi consiste une méthode, mais plutôt d'en tirer un heureux parti ; ensuite la question de préférence leur semble tout à fait oiseuse et même nuisible. Elle revient, comme l'observe judicieusement le rédacteur de ce journal, à se demander ce qui vaut le mieux de notre bras droit ou de notre bras gauche. Ainsi posée, il n'y a pas besoin de philosophie pour la résoudre : le bon sens suffit.

On prend quelquefois le nom de méthode dans une acception plus restreinte, et l'on désigne ainsi certains procédés généraux au moyen desquels on peut traiter toute une classe de questions : telles sont la méthode des coordonnées, celle des projections, etc. Toutes sont bonnes quand elles conduisent rapidement au but. Les meilleures sont celles qui ont le caractère de l'intuition, et qui nous font découvrir, presque sans effort, une longue suite de vérités. « Pour connaître, dit M. Chasles (**),

(*) M. Paul Serret vient de présenter à l'Académie un Mémoire sur la théorie géométrique des courbes à double courbure. Commissaires, MM. Cauchy, Bertrand.

(**) *Aperçu historique*, page 115.

si l'on a rencontré les vraies routes de la vérité définitive et pénétré jusqu'à son origine, nous croyons pouvoir dire que, dans chaque théorie, il doit toujours exister, et que l'on doit reconnaître, quelque vérité principale dont toutes les autres se déduisent aisément, comme simples transformations ou corollaires naturels; et que cette condition accomplie sera seule le cachet de la véritable perfection de la science. Nous ajouterons, avec un des géomètres modernes qui ont le plus médité sur la philosophie des mathématiques (M. Gergonne), « qu'on ne peut se » flatter d'avoir le dernier mot d'une théorie, tant qu'on » ne peut pas l'expliquer en peu de paroles à un passant » dans la rue. » Et en effet les vérités grandes et primitives, dont toutes les autres dérivent, et qui sont les vraies bases de la science, ont toujours pour attribut caractéristique la simplicité et l'intuition. »

M. Paul Serret, déjà avantageusement connu des lecteurs de ce journal, s'est proposé, comme l'indique le titre de son ouvrage, de faire connaître les divers procédés que l'on peut employer pour résoudre les questions de géométrie, et il a pensé avec raison que le meilleur moyen de les enseigner était de les appliquer à un certain nombre de questions choisies.

La première Partie de l'ouvrage de M. Serret (1-43) traite des *méthodes relatives à la géométrie des figures finies* et est divisée en deux chapitres.

Le chapitre Ier (1-21) commence par quelques réflexions sur l'utilité d'une classification des méthodes. L'auteur ne se dissimule point qu'une pareille classification n'ait quelque chose d'arbitraire et que des méthodes données comme distinctes ne puissent se confondre dans certains cas. Malgré ces inconvénients inévitables, mais dont il ne faut pas s'exagérer l'importance, une classification aura l'avantage de présenter dans un certain ordre un nombre

fini de moyens parmi lesquels des essais successifs feront connaître celui qui convient à la question proposée.

Après avoir caractérisé en peu de mots l'analyse et la synthèse, M. Paul Serret décrit onze méthodes particulières, mais sans prétendre faire une énumération complète.

1° Méthode *par substitution*, qui consiste à faire dépendre la solution de la question proposée d'une question plus simple, celle-ci d'une troisième, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à un dernier problème dont la solution soit évidente ou simplement connue; 2° *par construction*, qui consiste à substituer à la définition en langage ordinaire de certains éléments d'une figure une construction équivalente qui met souvent en lumière des relations utiles à la solution de la question; 3° *par duplication*, quand on fait tourner une figure autour d'un axe pour lui donner une position symétrique de celle qu'elle occupait d'abord; 4° *par abstraction et généralisation*; 5° *par composition et décomposition*; 6° *par les limites*; 7° *par réduction à l'absurde*; 8° *par inversion*, lorsque, renversant la question, on prend pour inconnues les quantités données et réciproquement; 9° *par les lignes, les aires ou les volumes auxiliaires*; 10° *par les solides auxiliaires*, c'est-à-dire par l'emploi de la géométrie à trois dimensions, dans les questions de géométrie plane; 11° *par la transformation des figures*.

M. Serret donne des exemples bien choisis de chacune de ces méthodes : mais comme la dernière lui paraît d'une importance fondamentale, il lui consacre en entier le chapitre II (21-44) dans lequel il expose les procédés de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous y avons remarqué d'élégantes démonstrations des principes de la trigonométrie sphérique et un théorème analogue à celui de Legendre sur les triangles dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

La seconde Partie (44-144) traite *des méthodes relatives à la géométrie infinitésimale*. Elle est divisée en six chapitres.

Le chapitre I[er] est consacré aux tangentes. On y trouve un exposé très-complet et très-instructif des méthodes d'Archimède, de Descartes, de Fermat et de Barrow.

Le chapitre II traite des courbes enveloppes et en particulier des caustiques.

Dans le chapitre III, on trouve une théorie complète du cercle osculateur. M. Serret fait connaître avec un grand détail les travaux de Maclaurin et de M. Ch. Dupin sur ce sujet.

Les chapitres IV et V se rapportent à la *théorie des maxima et des minima absolus ou relatifs*.

Le chapitre VI a pour objet la méthode *par décomposition en éléments correspondants*. L'attraction d'une sphère sur un point extérieur, la rectification des épicycloïdes, la théorie des courbes tautochrones, le théorème de Fagnano sont les principales applications que l'auteur fait de cette importante méthode.

En résumé, M. Paul Serret a composé un livre plein de choses, et dont nous ne saurions trop recommander la lecture aux élèves et aux professeurs.

On doit savoir gré à l'auteur, dont l'érudition paraît si étendue, de nous avoir fait connaître tant de procédés ingénieux employés par les plus grands géomètres des temps passés et que notre insouciance condamnait à l'oubli. Il rend en cela un grand service à la science, car, suivant la judicieuse réflexion de M. Poncelet, dans le passage qui sert d'épigraphe au livre de M. Serret : « Ce ne sont pas tant les vérités particulières que les méthodes qu'il ne faut pas laisser périr. »

E. Prouhet.

Thèses présentées a la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès Sciences; par M. *Guiraudet*, agrégé de l'Université, professeur-adjoint de mathématiques au lycée Saint-Louis :

Thèse de Mécanique. — Recherches sur le mouvement d'un point libre rapporté à des coordonnées curvilignes; suivie d'une proposition de mécanique céleste (attraction des ellipsoïdes) donnée par la Faculté.

Thèse d'Analyse. — Aperçu historique au sujet des problèmes auxquels s'applique le calcul des variations, jusqu'aux travaux de Lagrange.

Soutenues le 17 mars 1856 devant la Commission d'examen composée de MM. Duhamel, *président*, Lamé et Puiseux, *examinateurs*. Paris, in-4° de 54 pages.

Soient trois surfaces données par des équations et renfermant explicitement ou implicitement le *temps* comme paramètre variable. A chaque instant ces surfaces, deux à deux, se coupent suivant une ligne; les intersections de ces trois lignes d'intersection déterminant, généralement parlant, la position d'un point, sont dites les *lignes coordonnées* de ce point; le temps variant, ce point décrit dans l'espace une ligne nommée sa *trajectoire;* les formules dynamiques font connaître, à chaque instant, la vitesse du point, grandeur et direction; les forces, accélératrices et centripètes, qui l'animent, causes efficientes du mouvement.

Le but de cette thèse est de trouver des formules qui donnent ces quantités dynamiques considérées dans les *lignes coordonnées*. Supposons que ces lignes soient des droites. On peut considérer le point comme se mouvant sur une des droites pendant que cette même droite se meut sur la seconde droite, qui se meut elle-même sur la

troisième droite ; les lois de ces trois mouvements étant données, on peut déterminer les trois quantités dynamiques relativement à chacune de ces droites et aussi les pressions exercées sur les trois plans passant par les droites prises deux à deux. Les mêmes considérations s'appliquent à des lignes coordonnées quelconques ; ce sont ces mouvements de lignes coordonnées que le savant auteur de la thèse désigne sous le nom de *mouvements d'entraînement*. Ils sont extrêmement simples, intuitifs, et amènent des formules qui, pour être très-générales, sont pourtant très-symétriques, courtes, élégantes et susceptibles de nombreuses applications.

L'auteur choisit les surfaces orthogonales ; les lignes coordonnées sont des droites. Soient

$$\rho = f(xyz),$$
$$\rho_1 = f_1(xyz),$$
$$\rho_2 = f_2(xyz)$$

les équations de trois de ces surfaces ; les ρ sont des paramètres variables avec le temps. Faisant

$$h_1^2 = \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2$$

et désignant par R la pression sur la surface R, agissant suivant la normale à cette surface, on trouve

$$\mathrm{R} = \frac{1}{h}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{1}{h^2}\frac{dh}{d\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{h}{h_1^3}\frac{dh_1}{d\rho}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \frac{h}{h_2^3}\frac{dh_2}{d\rho}\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2$$
$$- \frac{2}{h_2}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{2}{h^2}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\rho_2}{dt},$$

et deux autres expressions semblables pour R_1 et R_2 ; ce sont les équations (A), et dans une note l'auteur montre la coïncidence de ces expressions avec celles de Lagrange.

Si l'on désigne par v_1, v_2, v_3 les trois composantes de la vitesse des mobiles ; par γ_1, c_2 les valeurs des rayons

de courbure pour la surface (ρ) à leurs points d'intersection; par γ_2, c les valeurs des rayons de courbure pour la surface (ρ_1) à leurs points d'intersection; par γ_1, c_1 les valeurs des rayons de courbure pour la surface (ρ_2) à leurs points d'intersection; l'équation pour R se change en celle-ci

$$R = \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{v_1^2}{\gamma_1} + \frac{v_2^2}{c_2} - \frac{2vv_1}{c} - \frac{2vv_2}{\gamma};$$

où $d\rho$ est l'arc élémentaire décrit par le point. De même pour R_1, R_2.

Ce sont les équations (B), d'une élégance remarquable et qui sont le pivot de toutes les déductions. L'auteur y parvient d'abord par le calcul et ensuite par des moyens géométriques.

Ces généralités terminent la thèse, mais elle débute par des considérations sur des coordonnées polaires planes et sphériques qui facilitent la compréhension de vues plus élevées.

La seconde thèse est un exposé historique très-clair des travaux sur le calcul des variations depuis Newton jusqu'à Lagrange (*voir* Strauch, *Nouvelles Annales*, t. X, p. 433). Nous répétons pour la centième fois que *Bernoulli* ne s'écrit pas *Bernouilli*. Il est désagréable de voir un géomètre ne pas savoir orthographier un nom aussi illustre. Comment un prote laisse-t-il passer un tel barbarisme?

Nous étudions, pour en rendre compte, une thèse fort remarquable de M. Houel sur l'intégration des équations fondamentales de mécanique et les applications de la méthode Hamilton aux perturbations de Jupiter. Ce sont des travaux qui restent; tandis que le temps, ce formidable balai, jettera dans le gouffre de l'oubli le fatras mathématique qui fait invasion de toute part.

Ramus (Pierre de la Ramée), sa vie, ses écrits et ses opinions; par *Charles Waddington*, professeur agrégé de philosophie à la Faculté des Lettres de Paris et au lycée Louis-le-Grand. Paris, 1855; in-8 de 480 pages.

On entend souvent citer, d'après Royer-Collard, que le respect s'en va. Je crois qu'on n'a pas bien compris la pensée du philosophe. En effet, le respect, cet hommage rendu à la vertu, est un sentiment qui ne dépend pas de la volonté. Il nous est imposé par ce tribunal que la puissance divine a érigé au dedans de nous : par la conscience qui dicte ses sentences sans nous consulter, et nous fait obéir intérieurement, quelles que soient nos actions extérieures (*). Le respect implanté dans l'organisation ne peut pas plus s'en aller que la respiration. Prenez l'homme d'Horace, le *justum et tenacem propositi virum,* celui qui persévère à soutenir une cause juste, non-seulement au prix de la vie, ce qui est peu, mais au prix de la fortune, de l'existence sociale, du repos, et chacun s'inclinera forcément. Tandis que s'il y a des gens dont les opinions, les principes, les actions tourneboulent au gré de leurs intérêts, de leurs passions et dont les actions sont aux antipodes de la morale qu'ils écrivent : *qui Curios simulant et Bacchanalia vivunt*; vous pourrez rechercher leur protection s'ils sont puissants, accorder de l'estime à leur talent, de l'admiration à leur génie, vous pourrez leur accorder tout, tout excepté le respect. C'est à ces gens que Royer-Colard a peut-être fait allusion, et alors son assertion peut se traduire ainsi : *Les hommes respectables s'en vont.* Quoi qu'il en soit, l'homme d'Horace au XVI[e] siècle, c'est Ramus. Le génie le plus vaste, le plus profond du XVI[e] siècle, c'est encore Ramus.

Petit-fils d'un charbonnier, fils d'un pauvre laboureur,

(*) *Vox Dei,* c'est la conscience. *Vivimus in Deo,* dit saint Jean, répète Mallebranche. La réciproque est vraie aussi.

toutefois champion inébranlable de la raison, de la vérité, de la science, profligateur inexorable du vice, du mensonge, de l'ignorance, restaurateur des connaissances humaines en Europe, fondateur de l'enseignement mathématique en France, tel était Pierre de la Ramée. Tel est le résumé de cette vie écrite avec une rare impartialité, dans un style simple et avec une élévation de sentiments digne du sujet. Le jeune professeur n'a pas reculé devant des investigations pénibles et minutieuses pour nous reproduire les moindres linéaments sans confusion de cette admirable physionomie d'un athlète de la raison, d'un Hercule qui, le premier, a balayé d'un bras vigoureux les écuries de la scolastique, et dont la vie a été constamment militante : *Socratis præter cicutam nihil nobis admodum abfuit* (*Schol. math.*, lib. III). Lutte contre la misère, lutte contre des misérables qui, ne pouvant le terrasser, l'ont fait égorger. Agé d'environ 59 ans, il a été *éventré,* traîné dans les rues le 24 août 1572. Sa dernière parole est : *Pardonne-leur, ils ne savent ce qu'ils font,* et comme chez le Juste de Jérusalem, la plèbe est l'instrument du crime; le bras est dans la classe supérieure.

M. Waddington nous fait connaître le précurseur de Galilée, de Descartes. Sans Ramus, auraient-ils pu se produire? M. Waddington, juge éminemment compétent, nous fait connaître l'orateur cicéronien, le grand réformateur de la grammaire, de la logique, de l'enseignement des lettres et de la philosophie. Esprit indépendant, Ramus n'admet d'autre autorité que la raison. *Amicus Plato, amicus Socrates, magis amica veritas, et tamen istius antiquæ philosophiæ severitas nulla unquam in arte major quam in mathematis fuit, in quibus nulla authoris cujusquam quantumlibet præstantis excellentis authoritas pro argumento fuerit : ratione opus est eaque necessaria, secus ignorantia judicatur* (*Schol. mathem.*, lib. III).

« Aimons Platon, aimons Socrate, mais plus encore

la vérité. Dans aucune partie de la philosophie ancienne, on ne rencontre une telle rigueur que dans les mathématiques. Là, l'autorité d'un écrivain, quelque distingué qu'il soit, ne passe pas pour un argument; la raison, voilà ce qu'il faut et une raison convaincante. Autrement, on est taxé d'ignorance. »

Comme toutes les natures fougueuses rencontrant d'injustes et de sottes résistances, souvent Ramus dépasse malheureusement le but. Prochainement nous mettrons en regard le géomètre, mais il faut lire M. Waddington et écouter M. Cousin :

« Quelle vie! quelle fin! Sorti des derniers rangs du » peuple, domestique au collége de Navarre, admis par » charité aux leçons des professeurs, puis professeur lui- » même; tour à tour en faveur et persécuté, banni, rap- » pelé, toujours suspect, il est massacré dans la nuit de la » Saint-Barthélemy, comme protestant et à la fois comme » platonicien.... Depuis, on n'a pas daigné lui élever le » moindre monument qui gardât sa mémoire; il n'a pas » eu l'honneur d'un éloge public, et ses ouvrages mêmes » n'ont pas été recueillis. »

Lorsqu'on élève tant de statues au Louvre, pourquoi oublierait-on Ramus? N'est-il pas aussi célèbre, aussi connu que Cambiche et Dupéras? N'y-a-t-il pas autant de mérite d'avoir donné une direction rationnelle aux études dans toute l'Europe que d'avoir tracé une corniche, imaginé un entablement? Ramus avec Calvin est un des premiers qui aient cultivé la langue française. Pourquoi l'Académie française, au milieu de tant d'Eloges, oublie-t-elle l'éloge de Ramus? Pourquoi un de ses illustres membres, qui nous rappelle sans cesse les événements, les personnages et surtout le style magique du grand siècle; pourquoi M. Cousin ne fait-il pas cesser cet oubli, qui est presque de l'ingratitude?

Logarithmic Tables to seven places of decimals, containing logarithmic sines and tangents to every second of the circle, with arguments in space and time; by *Robert Shortrede*, F. R. A. S, etc. Edinburgh, 1849. In-8, titre et préface IV pages, Tables 597 pages.

Chaque Table contient les logarithmes des sinus, tangentes, cotangentes, cosinus avec sept décimales et les arcs croissant de seconde en seconde depuis 0° 0′ 1″ jusqu'à 44° 59′ 60″, et les arcs (*space*) sont aussi réduits en temps (*time*) : 4 secondes de temps correspondent à 1 minute circulaire. Les rectangles qui renferment les quatre lignes trigonométriques ci-dessus dénommées sont divisés chacun en trois colonnes et chaque colonne contient soixante logarithmes; au bas de chaque colonne, la moyenne commune différence est donnée avec les figures décimales. A droite de chaque page, on trouve les parties proportionnelles en dixièmes de secondes circulaires et en centièmes de secondes de temps. Pour le premier degré où les différences varient sensiblement d'une seconde à la suivante, l'auteur se sert d'un coefficient pour corriger les secondes différences, ou bien encore de ces deux formules de Maskelyne

$$\log \sin x = \log \sin 1'' + \log x'' - \frac{1}{3} \log \text{séc}\, x,$$

$$\log \text{tang}\, x = \log \text{tang}\, 1'' + \log x'' + \frac{2}{3} \log \text{séc}\, x,$$

x étant un très-petit arc.

L'ouvrage est terminé par des formules trigonométriques et par les logarithmes et cologarithmes de plusieurs constantes qui se présentent dans les calculs arithmétiques et trigonométriques. La première édition est de 1844. Elle renfermait aussi les logarithmes des nombres de 1 à 120000; dans la seconde édition, les logarithmes des

nombres forment un volume à part. M. Shortrede était employé dans le grand levé topographique exécuté par les Anglais dans les Indes orientales.

LOGARITHMIC TABLES, containing logarithms to numbers from 1 to 120000; numbers to logarithms from 0 to 100000 to seven places of decimals; Tables with centesimal and decimal arguments for finding logarithms and antilogarithms as far as sixteen and twenty-five places; Tables to five places for finding the logarithms of the sums and differences of antilogarithms; also Tables for barometric and thermometric heights: together with several other Tables of frequent use; by *Robert Shortrede,* F. R. A. S., capitain, first assistant in the great trigonometrical Survey of India. Edinburgh, 1849. In-4; préface XXV pages, Tables 209 pages.

La première édition, de petit format, a paru en 1844; celle-ci est considérablement améliorée et augmentée. La préface consiste en une introduction.

1°. Nature et propriétés des logarithmes; théorie exponentielle.

2°. Calcul des logarithmes par séries; formules de Borda et de Delambre.

3°. Calcul des logarithmes par la méthode des différences.

4°. Sur le calcul des antilogarithmes; en rendant compte de l'ouvrage de Dodson, le premier qui ait paru sur les antilogarithmes, nous donnerons une formule de Legendre pour calculer ces antilogarithmes.

5°. Sur les Tables pour trouver avec un grand nombre de chiffres les logarithmes et les antilogarithmes.

6°. Avantages du système de Briggs relatifs à la caractéristique.

7°. Sur les logarithmes des fractions.

8°. Construction des Tables pour trouver les logarithmes des sommes et des différences des logarithmes.

Soit d un nombre donné,

$$A = \log x,$$
$$A_1 = d + \log x = \log 10^d x = \log x_1,$$
$$B = \log(1 + x),$$
$$B_1 = \log(1 + x_1),$$
$$C = A - B = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1},$$
$$C_1 = \log\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{-1},$$
$$\Delta B = B_1 - B = \log\left[1 + \frac{x}{1+x}(10^d - 1)\right],$$
$$\Delta C = C_1 - C = \log\left[1 - \frac{1 - 10^{-d}}{1 + x}\right]^{-1};$$

on développe ΔB et ΔC par les méthodes connues et on fait successivement

$$d = 0,1,\ 0,01,\ 0,001, \ldots.$$

La Table I contient les logarithmes avec 7 décimales des nombres depuis 1 à 120000; l'argument sexagésimal correspondant à chaque nombre est placé dans une colonne serrée à gauche. Les différences et leurs multiples sont au bas de la page, ce qui est plus commode que lorsqu'elles sont placées latéralement (pages 2 à 110).

La Table II contient les antilogarithmes ou les nombres correspondants aux logarithmes; ceux-ci croissent par dix-millièmes. Exemples : Aux logarithmes 29300, 29301 correspondent les nombres 1963360, 1963405; ces deux derniers nombres sont écrits dans la même ligne ho-

rizontale, et la partie commune 196 est seulement écrite pour le nombre qui correspond à 29230, où elle apparaît pour la première fois (pages 112-195).

La Table III contient les longueurs des arcs circulaires en degrés, minutes et secondes (moitié de la page 195).

Les Tables IV, V, VI, VII servent à calculer, avec un grand nombre de figures décimales, les logarithmes, antilogarithmes et logarithmes de Gauss. On ne peut en donner une exposition claire, qu'en ayant les Tables sous les yeux (pages 196-203). Elles contiennent les valeurs numériques des constantes qui entrent dans les formules.

La Table VIII donne les logarithmes des produits continuels des nombres naturels au-dessous de 1000, ou

$$\log(1.2.3\ldots x) \text{ et } x = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 1000 \text{ (page 205)}.$$

La Table IX, comparaison entre les degrés du thermomètre Farenheit et centésimal.

La Table X pour la mesure des hauteurs par le baromètre, ayant égard à la latitude, à l'état thermométrique et hygrométrique de l'atmosphère (pages 206-207).

La Table XI, mesure des hauteurs par le thermomètre avec les mêmes éléments que pour la Table IX (on indique les corrections qu'il faut faire aux résultats d'après les expériences de M. Regnault faites depuis l'impression de la Table) (page 207).

L'ouvrage est terminé par une Table de constantes (page 208).

SUR L'ORIGINE DES MOTS CHIFFRE ET ZÉRO

(voir page 108);

D'APRÈS NESSELMAN.

En arabe le mot *sifr* signifie ce qui est vide et désigne le zéro. C'est l'explication que donne un scholiaste sur le *Khalaset-el-hisab* de Beha-Edden et c'est ce qu'on lit aussi dans une arithmétique en hébreu du savant israélite Élie Hamisrachi, imprimée à Constantinople en 1534 (*). Ainsi le mot chiffre, quoique ayant changé d'acception, vient de l'arabe *sifr*. En anglais, il a même conservé cette acception. Le zéro se nomme *cipher*.

Sahara en arabe signifie un champ, et *sahrasifr* un champ vide, un endroit vide; d'où, selon Nesselman, peut venir le mot zéro. Le zéro est l'âme de toute numération écrite. M. C.-I.. Gerhardt, dans un savant appendice à son ouvrage : *Die Entdeckung der hohern analysis*, Découverte de l'analyse supérieure, 1855, admet l'origine indienne, par l'intermédiaire arabe, de notre numération chiffrée, opinion à laquelle nous adhérons complétement. L'opinion opposée n'est fondée que sur une explication contestable de passages obscurs, d'une authenticité douteuse. L'origine orientale s'accorde avec toutes les traditions historiques, claires, s'accorde avec le bon sens. L'origine occidentale ne s'appuie que sur des devinations, sur des déchiffrements de mots énigmatiques : vaste champ où l'esprit et l'érudition peuvent se donner carrière.

Zéro peut venir de *ziffer o, o* prononcé comme voyelle et par contraction zéro.

(*) Élie Misrachi (l'oriental) était chef de la synagogue de Constantinople en 1490; il a composé plusieurs ouvrages technologiques. Son *Arithmétique* a été traduite en latin par Schrekenfuss et imprimée à Bâle en 1546.

BIBLIOGRAPHIE.

Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota, etc., ou Correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVIIe siècle, relative à l'Analyse supérieure, réimprimée sur l'édition originale de 1712 avec l'indication des variantes de l'édition de 1722, complétée par une collection de pièces justificatives et de documents, et publiée par *J.-B. Biot*, membre de l'Institut, et *F. Lefort*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, Mallet-Bachelier, gendre et successeur de Bachelier, imprimeur-libraire de l'École impériale Polytechnique, quai des Augustins, 55. In-4, xv-293 pages; 1856. Prix : 15 francs.

Nemo in causa propria sibi testis est.
(Newton, *Recensio libri*, p. 25.)

Une idée n'existe pour le public que lorsqu'elle est rendue publique. Car il est impossible de deviner ce que les savants écrivent dans leurs cabinets, ce qu'ils se communiquent entre eux dans l'intimité. La publicité seule constitue la priorité; une invention appartient à celui qui la fait connaître le premier. Vous auriez beau prouver victorieusement que vous avez eu la même idée il y a vingt ans, rien n'y fait. Il fallait publier. On ne doit de la reconnaissance qu'à celui qui ne cache pas ses pensées, qui n'en fait pas mystère. Lorsque, ayant trop tardé, on a été ainsi prévenu, par esprit de dépit, par sentiment de vengeance, on a recours à l'accusation banale de plagiat; à cet effet, des documents intimes sont invoqués comme pièces à l'appui : moyen bien précaire.

Comment établir que ces pièces n'ont pas été fabriquées pour la cause? qu'elles n'ont pas été altérées, mutilées? qu'on n'en a pas supprimé pouvant nuire à la cause? Comment *peser* les témoignages sous le rapport de la moralité? comment faire le départ des mauvaises passions, des mauvaises intentions? Aussi, dans l'impossibilité de se reconnaître au milieu de tant de difficultés, le grand public reste indifférent à des discussions qui n'intéressent que des vanités blessées, et s'en tient avec raison à l'inventeur qui s'est révélé le premier. Ainsi Leibnitz est le premier qui ait publié sans aucun déguisement une méthode pour calculer les quantités infinitésimales : il est donc l'inventeur. On l'a accusé d'avoir appris cette méthode de Newton, par conséquent de la lui avoir prise. Quoique, comme pièces de conviction, on ait divulgué une collection de documents intimes, sous le titre de *Commercium epistolicum, etc.*, le nom de Leibnitz ne reste pas moins irrévocablement attaché à la plus grande création qui ait jamais eu lieu dans le domaine des sciences mathématiques. D'ailleurs M. Lefort montre avec une logique irrésistible, sans phrases, que ces documents empreints des défauts que nous avons signalés ci-dessus, ne prouvent absolument rien contre Leibnitz et prouveraient malheureusement beaucoup contre Newton, si l'on ne prenait en considération l'influence d'un mauvais entourage qui a habilement exploité quelques expressions ambiguës pour jeter des excitants dans l'esprit d'un vieillard. Le génie le plus divin, le plus angélique, contient des éléments terrestres. C'est une triste vérité qui ressort de l'historique que nous allons essayer de donner de cette malheureuse discussion. Nous croyons utile de donner tout de suite les noms des personnages principaux et secondaires, avec l'année de la naissance, et classés d'après l'année de la mort.

	Naissance.	Mort.
Neper.............	1550	1617 (*)
Cavalieri..........	1598	1647 (**)
Fermat............	1590	1665 (***)
*Gregory (Jacques)...	1636	1675
*Barrow (Isaac)......	1630	1676 (****)
*Oldenbourg........	1626	1677
*Borelli (Alphonse)...	1608	1679
Ricci.............	1619	1682 (*****)
*Collins............	1624	1683
Brounker..........	1620	1684
*Sluze.............	1623	1685 (******)
Mercator..........	1660	1687
Mouton...........	1618	1694
Huyghens.........	1629	1695
*Wallis............	1616	1703
L'Hôpital..........	1661	1704
Hudde............	16...	1704 (*******)
Bernoulli (Jacques)..	1654	1705
*Gregory (David)....	1661	1708
*Tschirnhauss.......	1651	1708
*Leibnitz...........	1646	1716 (14 nov.)
Rémond de Montmort.	1678	1719
*Keill.............	1671	1721
Varignon..........	1654	1722
*Newton...........	1642	1727 (20 mars)
Brook Taylor.......	1685	1731
Halley............	1656	1741

(*) *Logarit. canonis*, 1614.
(**) *Geometriæ indiv.*, 1635.
(***) Sa *Méthode* parut en 1644. *Cursus meth.*, de Herigone.
(****) *Lectiones*, 1669.
(*****) *Geom. exercitatio*, 1666.
(******) *Mesolabum*, 1668.
(*******) Sa *Méthode* est de 1655.

	Naissance.	Mort.
Bernoulli (Jean).....	1667	1748
Conti (l'abbé)......	1677	1748
* Sloane............	1660	1752

Les astérisques désignent ceux dont les Lettres composent le *Commercium*.

HISTORIQUE.

Nous allons d'abord signaler les pièces publiques destinées dès le principe à être publiées, et nous signalerons ensuite quelques pièces intimes qui n'avaient pas cette destination.

Pièces publiques.

1684, octobre. Leibnitz publie dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig les principes du calcul différentiel sous le titre :

Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.

« Nouvelle méthode pour les maxima et les minima et aussi pour les tangentes, qui ne s'embarrasse ni des quantités fractionnaires, ni des quantités irrationnelles, et nouveau genre de calcul pour ces objets. »

C'est la pièce publique, la première en date. Selon l'esprit du temps qui laissait toujours quelque chose de mystérieux à deviner, l'exposition est très-condensée. L'auteur ne donne pas la succession des idées qui ont amené ce nouveau genre de calcul, ce qui rend la compréhension assez difficile. Il montre la manière d'appliquer le calcul différentiel aux problèmes de géométrie, mais il ne mentionne nullement le calcul intégral; seulement à la fin du Mémoire, il y fait allusion en faisant entendre qu'il possède encore d'autres moyens de solution.

Et hæc quidem initia sunt tantum geometriæ cujus-

dam multo sublimioris, ad difficillima et pulcherrima quæque etiam mistæ Matheseos problemata pertingentis, quæ sine calculo nostro differentiali aut simili non temere quisquam pari facilitate tractabit.

« Et ce sont là seulement les commencements d'une géométrie beaucoup plus sublime, s'étendant même aux problèmes les plus difficiles et les plus beaux des mathématiques mixtes, et que d'aventure personne ne traitera avec la même facilité sans notre calcul différentiel ou un calcul semblable. »

Cette réticence a même donné lieu à une discussion de priorité avec Jean Bernoulli. Celui-ci nommait calcul intégral l'inverse du calcul différentiel et se servait de la lettre initiale I, tandis que Leibnitz le nommait calcul sommatoire, et se servait du signe $\int$. Ils firent entre eux un compromis qui fut généralement adopté; on conserva le nom donné par Bernoulli et le signe établi par Leibnitz (*).

1687, mai. Première publication des *Philosophiæ naturalis Principia mathematica, authore* Is. Newton, *Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos professore Lucasiano et Societatis Regalis sodali. Londini, typis Josephi Streater, anno* 1687.

La préface est sans date. Mais, dans la seconde édition de 1773, on lit: *Dabam Cantabrigiæ è collegio S. Trinitatis, Maii* 8, 1687. Dans le second livre (section II), à la page 250, on trouve le lemme II, où, pour la première fois, Newton explique ce qu'il entend par *moments* ou *fluxions*. Il considère des quantités croissant ou décroissant par un mouvement ou un flux perpétuel; les

---

(*) J. Bernoulli, dans la préface de son Mémoire sur le mouvement des muscles, reconnaît les droits de Leibnitz à l'invention du calcul intégral. (*Opera omn.*, t. 1er, p. 96.)

accroissements ou décroissements instantanés sont des moments ou des fluxions. Il démontre que le moment de A étant a, b celui de B, le moment de AB est $Aa + Bb$; le moment de $A^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} A^{\frac{m}{n}-1} a$, etc. Il n'y a pas de notations. Ce lemme est suivi de ce célèbre scolie :

In literis quæ mihi cum geometra peritissimo G.-G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes et similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, et literis transpositis hanc sententiam involventibus [*data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa*], *eandem celarem : rescripsit vir clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis. Utriusque fundamentum continetur in hoc lemmate.*

« Dans une correspondance que j'ai entretenue il y a une dizaine d'années avec le très-habile géomètre G.-G. Leibnitz, lui ayant annoncé que j'étais en possession d'une méthode pour déterminer les maxima et les minima, pour mener des tangentes et faire autres choses semblables, qui s'appliquent aux quantités irrationnelles aussi bien qu'aux rationnelles et ayant celé l'idée de cette méthode sous des *lettres transposées* renfermant ce sens [Étant donnée une équation renfermant un nombre quelconque de quantités fluentes, en trouver les fluxions, et *vice versâ*], l'homme célèbre me répondit qu'il était tombé sur une méthode de même genre, et il me communiqua sa méthode qui diffère à peine de la mienne, si ce n'est dans les termes et dans les notations. Le fondement de l'une et de l'autre méthode est contenu dans ce lemme. »

Il est de toute évidence que Newton reçonnaît ici publiquement les droits de Leibnitz.

Newton démontre tout par une analyse discursive, sans algorithme, ce qui en rend la lecture extrêmement pénible et fatigante. Euler lui-même dit n'avoir pu souvent comprendre les propositions des *Principes* qu'en les *écrivant* algébriquement. Aussi cet ouvrage n'a pu avoir qu'un très-petit nombre de lecteurs, même en Angleterre. Il est à remarquer que par délibération du 19 mai 1686 la Société Royale ordonne l'impression immédiate des *Principes*, en beaux caractères, en charge Halley, mais à condition que Halley *en fera les frais*. Il y a là un enthousiasme peu dispendieux pour la Société Royale (Edleston, *Corresp.*, p. xxx).

La notation si commode de Leibnitz servit à propager sa méthode différentielle sur tout le continent et même en Angleterre. Dès 1685, John Graig emploie la méthode différentielle qu'il rapporte toujours à Leibnitz dans son ouvrage : *Methodus figurarum curvilinearum quadraturas determinandi*, London, 1685, et en 1696 on voit paraître un Traité complet de calcul différentiel sous le titre de *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, par le marquis de l'Hospital; ouvrage capital, encore précieux aujourd'hui. On n'y trouve rien sur le calcul intégral. Ce n'est qu'en 1693 que Newton a publié pour la première fois sa *notation* des fluxions, en l'insérant avec les règles du calcul dans le tome II des *Opera mathematica* de Wallis (*).

1704. Newton publia ces mêmes règles sous forme d'introduction à son *Tractatus de quadratura curvarum*, opuscule qu'il joignit avec un autre : *Enumeratio linearum tertii ordinis*, dans la première édition de son *Optique*, 1704.

(*) Il emploie le *point supérieur* pour les *fluxions* et le *carré* pour les quantités fluentes (intégrales).

Dans ce *Tractatus*, il donne les différentielles secondes et troisièmes avec la même erreur qu'il avait commise dix-huit années auparavant dans la première édition des *Principes* (lib. II, prop. X, corol. II).

Il développe $\overline{z+o}^n$ et trouve

$$z^n + noz^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ooz^{n-2} + \frac{n^3-3n^2+2}{6}oooz^{n-3} + \ldots$$

et il dit que la différence première de z^n est noz^{n-1}, ce qui est juste; ensuite que la différence seconde est, les zéros indiquant des infiniment petits,

$$\frac{n^2-n}{2}ooz^{n-2};$$

la différence troisième

$$\frac{n^3-3n^2+2}{6}oooz^{n-3}\ldots,$$

ce qui est faux.

Jean Bernoulli, appliquant ces formules au problème résolu par Newton dans l'endroit des *Principes* cité ci-dessus, trouva que sa solution était fausse et toutefois les raisonnements justes, et il vit que l'erreur gisait dans le calcul où l'on avait pris des différentielles *divisées* au lieu des différentielles (Jean Bernoulli, *Opera omnia*, t. I, p. 535; 1713).

1699. Le commencement de la querelle date de cette année. L'auteur est Nicolas Fatio, du château de Duiller, près de Genève, assez habile géomètre et esprit orgueilleux, très-extravagant (ce qui n'est nullement incompatible), tellement qu'il finit par s'attirer un châtiment judiciaire infamant. Huyghens, dont il était le correspondant, lui proposait souvent des problèmes, et, lorsque Fatio déclarait ne pouvoir les résoudre, Huyghens s'adressait à Leibnitz qui les résolvait facilement à l'aide de son calcul, et Huyghens en instruisait Fatio, dont l'amour-propre, âme de l'âme des savants, a dû être singulièrement froissé. Etabli à Londres, il eut des relations avec

Newton. En 1699, il publia sa dissertation *Lineæ brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quo minima fiat resistentia*. Lond., in-4.

Parlant du nouveau calcul, il s'exprime ainsi, p. 18 :

Newtonum primum, ac pluribus annis vetustissimum, hujus calculi inventorem, ipsa rerum evidentia coactus agnosco : a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius, secundus ejus inventor, malo eorum, quam meum, sit judicium, quibus visæ fuerint Newtoni Literæ aliique ejusdem manuscripti Codices.

« Forcé par l'évidence même des choses, je reconnais Newton comme le premier inventeur de ce calcul, et le plus ancien de beaucoup d'années. Leibnitz, le second inventeur, a-t-il emprunté quelque chose de Newton? Au lieu d'énoncer mon propre jugement, je préfère m'en rapporter à ceux qui ont vu les lettres et les autres registres manuscrits de Newton. »

Cette malicieuse insinuation, transparente accusation de plagiat, fut repoussée par Leibnitz avec beaucoup de modération dans les *Actes de Leipsig*, mai 1700. Nous traduisons :

« Lorsque j'ai publié, en 1684, les éléments de mon calcul, je ne connaissais rien de ses inventions (*) en ce genre, si ce n'est qu'il m'avait écrit qu'il pouvait mener des tangentes sans faire disparaître les irrationnelles ; depuis, Huyghens m'a annoncé qu'il pouvait la même chose, bien qu'il ignorât ce calcul ; mais ayant vu les *Principes*, j'ai assez compris que Newton avait acquis des propositions de beaucoup supérieures. Cependant, je n'ai appris qu'il se servait d'un calcul semblable au calcul différentiel que depuis la publication des tomes II et III des œu-

(*) De Newton.

vres du grand géomètre Jean Wallis. Huyghens, voulant complaire à ma curiosité, m'envoya tout de suite copie de l'endroit où il s'agit de Newton. »

D'ailleurs, déjà en 1686, Leibnitz avait parfaitement et avec une grande sincerité, signalé ce qu'il devait à ses devanciers.

1686. Voici comment il s'exprime dans les *Actes de Leipsig*, juin 1686 :

Quod superest, etc.

« Afin que je ne paraisse pas vouloir trop m'attribuer ou trop enlever aux autres, il me reste à dire, en peu de mots, ce que, selon moi, on doit, en ce genre de géométrie, principalement aux grands mathématiciens de ce siècle. Galilée et Cavalieri commencèrent les premiers à débrouiller les préceptes très-obscurs de Conon et d'Archimède. Mais la géométrie des indivisibles de Cavalieri ne fut que l'enfance de la renaissance de la science. Trois hommes célèbres amenèrent de plus puissants secours : *Fermat*, par sa méthode de maximis et minimis; *Descartes*, en montrant comment on exprime par des équations les rapports des lignes de la géométrie ordinaire (car il exclut les lignes transcendantes); *Grégoire de Saint-Vincent*, par plusieurs belles inventions. A quoi j'ajouterai la belle règle de Guldin relative au mouvement du centre de gravité. Mais ceux-ci restèrent entre certaines limites, que franchirent, s'étant ouvert une nouvelle voie, les fameux géomètres Huyghens et Wallis. Car il est assez probable que ce sont les travaux de Huyghens qui ont fourni à Heuratius (*), et les travaux

(*) On trouve, dans la *Géométrie* de Descartes avec les Commentaires de Schooten (3e édition, Amst., 1683) une Lettre de Henri Van Heuraet : *De Transmutatione linearum curvarum in lineas rectas*. La Lettre est du 13 janvier 1659. Montucla donne cette méthode de rectification (*Hist.*, t. II, p. 151). (PROUHET.)

de Wallis à Neil et à Wreen, l'occasion de faire leurs plus belles inventions, ayant été les premiers à montrer des droites égales en longueur à des lignes courbes, ce qui pourtant n'ôte rien à l'éloge que méritent leurs inventions. Ils furent suivis de Jacques Gregory, Écossais, et de Isaac Barrow, Anglais, qui enrichirent merveilleusement la science de plusieurs beaux théorèmes. Pendant ce temps-là, Nicolas Mercator, de Holstein, mathématicien très-distingué, exprima, le premier que je sache, certaine quadrature par une série infinie. Mais Isaac Newton, géomètre d'un génie extrêmement profond, parvint aux mêmes résultats, non-seulement par ses propres forces, mais il le découvrit par certain raisonnement général. S'il publiait ses méditations, qu'il tient en réserve, nul doute qu'il nous ouvrirait de nouvelles routes qui amèneraient de grands progrès et profits pour la science. Etant encore apprenti dans ces études, il m'arriva que la vue d'une certaine démonstration de l'aire de la sphère m'éclaira subitement d'une vive lumière. Car je voyais que généralement la figure que l'on obtient en menant des perpendiculaires à la courbe (les rayons dans le cercle) et les prolongeant jusqu'à l'axe, est proportionnelle à la surface du solide engendrée par cette figure tournant autour de l'axe (*). Étant extrêmement charmé de ce théorème (je ne savais que telle chose était déja venue à la connaissance d'autres), j'imaginai tout de suite, dans toute courbe, un triangle que j'appelai *caractéristique,* dont les côtés étaient indivisibles (soit, à parler plus exactement, des infiniment petits) ou bien des quantités différentielles; et je produisis tout de suite, sans aucune peine, une foule de théorèmes que j'ai rencontrés depuis chez les Grégoire (**)

(*) C'est celle de Heuraet, comme on peut voir dans Montucla.

(**) Grégoire de Saint-Vincent et Jacques.

et chez Barrow, mais je ne faisais alors point usage du calcul algébrique; lorsque je l'ai admis, je parvins bientôt à découvrir ma quadrature arithmétique et bien d'autres choses. Toutefois, je ne sais pourquoi le calcul algébrique ne me satisfaisait pas dans cette affaire, et pour beaucoup de choses que je voulais obtenir par l'analyse, j'étais forcé d'avoir recours à des détours par des figures, lorsque enfin je découvris un supplément à l'algèbre pour les transcendantes, savoir mon calcul des infiniment petits, que j'appelle différentiel ou sommatoire ou *tétragonistique*, et plus convenablement, si je ne me trompe, analyse des *indivisibles* et des infinis; ce calcul une fois découvert, tout ce que j'avais tant admiré auparavant dans ce genre, ne me parut plus qu'un jeu et un amusement. »

On voit que Leibnitz répond ici d'avance aux perfides insinuations de Fatio.

Tout serait probablement resté là, sans une expression et une citation assez ambiguës dont se servirent les rédacteurs des *Actes de Leipsig*, en rendant compte de l'ouvrage de Newton *De Quadratura* mentionné ci-dessus. Ils disent, janvier 1705 :

Pro differentiis igitur Leibnitianis D. Newtonus adhibet, *semperque* adhibuit fluxiones; *iisque tum in suis Principiis naturæ mathematicis, tum in aliis postea editis eleganter est usus, quemadmodum et Honoratus Fabrius in sua Synopsi geometrica motuum progressus Cavallerianæ methodo substituit.*

« Ainsi, au lieu des différentielles Leibnitziennes, Newton applique et a toujours appliqué les *fluxions*. Il s'en est servi élégamment dans ses *Principes mathématiques de la nature* et ensuite dans plusieurs autres écrits; de même que Fabrius (Honoratus) dans sa *Synopsis geometrica* a substitué les mouvements progressifs à la méthode de Cavalieri. »

On sait maintenant que cet article est de Leibnitz, car son nom se trouve au bas dans une copie conservée des *Actes* (Guhrauer, *Biog.* v. Leibnitz, p. 311; Breslau, 1846). C'est un grand tort.

On pouvait croire, en effet, qu'à l'instar de Fabrius, substituant sa méthode à celle de Cavalieri, Newton avait de même substitué les fluxions aux différentielles. Ce n'est certainement pas là le vrai sens, puisque, dans ce même journal, Leibnitz avait déclaré en 1700 (*voir* ci-dessus) que Newton possédait une méthode analogue à la sienne. Ce qui montre bien qu'on n'admettait pas non plus un tel sens, c'est qu'on est resté trois années sans y faire la moindre attention. Ce n'est qu'en 1708, dans une Lettre sur les forces centripètes adressée à Halley et insérée dans les *Transactions philosophiques* (1708, septembre et octobre, page 185), que Jean Keill s'énonce ainsi :

Hæc omnia sequuntur ex celebratissima nunc dierum fluxionum arithmetica, quam sine omni dubio primus invenit D. Newtonus, ut cuilibet ejus epistolas a Wallisio editas legenti facile constabit; eadem tamen arithmetica postea, mutatis nomine et notationis modo a D. Leibnitio in Actis Eruditorum edita est.

« Tout cela découle de l'arithmétique des fluxions, la plus célèbre de notre temps, et dont Newton fut sans aucun doute le premier inventeur; de quoi restera facilement convaincu tout lecteur des Lettres de Newton, publiées par Wallis; et pourtant, ayant changé seulement le nom et la notation, Leibnitz publia depuis la même arithmétique dans le *Actes de Leipsig.* »

1711, 4 mars. Hans Sloane, secrétaire de la Société Royale, ayant adressé ce volume à Leibnitz en 1710, année de la publication, il ne lui parvint qu'en 1711, étant alors à Berlin. Le 4 mars 1711, Leibnitz accuse réception : il

est surpris de ce qu'on ait laissé insérer l'assertion de Keill, d'autant que semblable accusation soulevée par Fatio de Duiller et repoussée par Leibnitz, avait été désapprouvée par Sloane dans des Lettres qu'il lui a écrites, et, à ce qu'il a appris, désapprouvée par Newton lui-même. Il pense d'ailleurs que Keill a péché par étourderie, et ne le considère pas comme un calomniateur; mais, comme l'assertion est calomnieuse, pour empêcher qu'elle ne se renouvelle, il désire que la Société Royale engage Keill à se rétracter (*Cogor remedium ab inclyta vestra Societate Regia petere*).

Le 22 mars 1711, cette Lettre fut lue en partie devant la Société Royale. Le 24 mai 1711, Keill lut sa réponse, et ordre fut donné de la communiquer à Leibnitz et de l'insérer dans les *Transactions* dès qu'on aurait la réponse de Leibnitz. Keill y dit qu'il ne prétend nullement que Leibnitz ait eu connaissance du nom que Newton a donné à sa méthode, ni de sa notation; mais que, d'après deux Lettres de Newton à Oldenbourg, communiquées à Leibnitz, celui-ci a pu facilement y puiser sa méthode, et que n'ayant pu obtenir par le raisonnement les formules et les notations de Newton, il y a substitué les siennes. D'ailleurs, lui Keill ne fait que repousser les allégations hostiles à Newton des rédacteurs des *Actes de Leipsig;* que ce n'est pas du tout une calomnie de revendiquer pour Newton ce qui lui appartient, savoir d'être le premier inventeur, et qu'il n'y a pas lieu à rétractation.

1711, 29 décembre. Cette Lettre communiquée à Leibnitz, celui-ci répondit de Hanovre le 29 décembre : « Qu'aucune personne équitable et sensée ne pouvait prétendre qu'à son âge (il avait 65 ans) et après tant de travaux il aille se commettre et accepter pour juge un homme savant, mais novice, n'ayant pas mandat de juge dans cette affaire; que Keill invoque vainement les *Actes;*

qu'on y a toujours rendu justice à chacun ; que lui, Leibnitz, et ses amis avaient toujours admis que l'illustre auteur des fluxions était parvenu de lui-même à des principes semblables à ceux des différentielles. » Il termine par ces paroles :

Itaque vestræ acquitati committo, annon coercendæ sint vanæ et injustæ vociferationes quas ipsi Newtono viro insigni et gestorum optime conscio, improbari arbitror; ejusque sententiæ suæ libenter daturum indicia mihi persuadeo.

« Je laisse à décider à votre équité s'il n'est pas convenable de réprimer de vaines et injustes clabauderies, qui, je pense, sont désapprouvées par Newton lui-même, homme illustre, qui a conscience parfaite de tout ce qui s'est fait, et je suis persuadé qu'il donnera volontiers sa propre opinion. »

Le 31 janvier 1712, cette Lettre fut lue à la Société Royale et délivrée à Newton. Newton se garda bien de répondre à cet appel, et cela probablement pour plusieurs raisons : 1° il savait mieux que personne qu'il n'avait rien communiqué à Leibnitz ; 2° il était convaincu que la notation de Leibnitz valait mieux que la sienne ; 3° il voyait que sa méthode, comprise par un très-petit nombre de géomètres, restait stationnaire et confinée dans un coin, tandis que celle de Leibnitz était en progrès et se propageait dans toute l'Europe ; 4° il était blessé, avec quelque raison, par les expressions malencontreuses, équivoques, des *Actes de Leipsig*. Dans cet état d'irritation, il aima mieux déférer toute l'affaire au jugement de la Société Royale dont il était président, où siégeaient tous ses amis, tous ses partisans, tous ses admirateurs.

Comme Leibnitz avait appelé de Keill, homme novice, à la Société Royale, un comité de six membres fut établi, le 17 mars 1712, pour examiner les Lettres

et les Mémoires relatifs à cette discussion, et en faire un Rapport à la Société. Ces commissaires étaient : Arbuthnot, Hill, Halley, Jones, Machin, Burnet; on y joignit Francis Robert le 20 mars, Bonet, l'envoyé de Prusse, le 27 mars, et de Moivre, Aston, Brook Taylor le 17 avril. Le Rapport fut lu le 24 avril. Le jugement, rédigé en anglais et en latin, renferme quatre considérants. Le dernier est « que la *méthode différentielle* est une et la » même que la *méthode des fluxions*, excepté le nom » et le mode de notation, M. Leibnitz appelant *diffé-* » *rences* ce que Newton appelle *moments* ou *fluxions*, » et faisant avec la lettre *d* un signe non employé par » Newton, et, à cause de cela, nous posons que la ques- » tion n'est pas de savoir qui a inventé telle ou telle » méthode, mais qui a été le premier inventeur; et nous » pensons que ceux qui ont réputé Leibnitz être le pre- » mier inventeur, savent peu de chose ou rien de sa Cor- » respondance avec Collins et Oldenbourg longtemps au- » paravant, ni que M. Newton possédait cette méthode » quinze années avant que Leibnitz l'ait publiée dans les » *Actes de Leipsig*. Par ces raisons, nous reconnaissons » M. Newton comme le premier inventeur, et sommes » d'opinion que M. Keill, en avançant la même opinion, » n'a pas été injuste envers M. Leibnitz. Nous soumettons » au jugement de la Société s'il convient de publier les » extraits des Lettres et des Mémoires que nous lui pré- » sentons, ainsi que ce qui est relatif à cet objet dans le » IIIe volume du docteur Wallis. »

Ce Rapport, bâclé au bout d'un mois, fut adopté et le tout imprimé sous ce titre :

Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis Regiæ in lucem editum.

L'ouvrage parut sous format in-4 en 1713 et fut im-

primé par les soins de Halley à un très-petit nombre d'exemplaires distribués aux membres de la Commission, et envoyés à quelques universités et à quelques savants distingués ; de sorte que cette édition est excessivement rare. Les frais d'impression, payés à Halley, se montèrent à $22^{l}\ 2^{sh}\ 6^{d}$ (557 francs).

La seconde édition, format in-8, est de 1722 avec ce titre :

Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota jussu S. R. in lucem editum ; una cum ejusdem recensione præmissa, et judicio primarii, ut ferebatur, mathematici subjuncto iterum impressum. Londini ex officina J. Tonson et J. Watts. MDCCXXII.

A plusieurs exemplaires de cette édition on a mis ce nouveau titre, qui n'est qu'un carton :

Commercium epistolicum de varia re mathematica inter celeberrimos præsentis seculi mathematicos, viz
Isaacum Newtonum equitem auratum,

Dnum Isaacum Barrow,	*Dnum J. Collinium,*
Dnum Jacobum Gregorium,	*Dnum Gulielmum Leibnitsium,*
Dnum Johannem Wallisium,	*Dnum Henricum Oldenbourgum,*
Dnum J. Keillium,	*Dnum Franciscum Slusium,*

et alios. Jussu, etc. (comme ci-dessus).

Londini impensis J. Tonson et J. Watts. Prostant venales apud J. Mac Euen ad insigne Georgii Buchanani et regione templi Sancti Clementis in vico vulgo dicto the Strand, 1725.

L'iniquité de ce jugement est flagrante. On peut appliquer à ce tribunal ce qu'on a dit dans un procès tristement célèbre : « Je cherche des juges et ne trouve que des accusateurs. » Il y a neuf Anglais, et, par dérision, on y a adjoint vers la fin deux étrangers. Selon l'observation

judicieuse de M. Lefort, Moivre, nommé le 17 et se prononçant le 24, a dû former son jugement bien vite. On n'y rencontre que quatre géomètres. Les autres sont des amis de Newton; c'est le seul mérite qu'on leur connaisse; ils ont jugé sans entendre la défense de l'accusé. D'ailleurs, c'est le contraire du dernier considérant qui est vrai. La question fondamentale est de savoir qui est l'auteur de telle ou telle méthode. La véritable invention existe dans la hiérarchie des infiniment petits et dans les signes *d* et ∫ qui s'y rattachent: hiérarchie que la méthode fluxionnelle ne pouvait pas donner et sur laquelle Newton avait des idées inexactes qui l'ont amené à des résultats erronés (*). On peut remarquer ici deux singularités. D'abord l'original du jugement, écrit entièrement de la main de Halley, ne porte *aucune signature;* ensuite, en 1713, en même temps que le jugement, parut aussi une 2e édition des *Principes*, sous les yeux de Newton et soignée par R. Cotes. Non-seulement Newton conserve le scolie rapporté ci-dessus, où il reconnaît patemment les droits de Leibnitz, mais il améliore cette reconnaissance par une addition très-importante; car, parmi les différences qu'il signale entre sa méthode et celle de Leibnitz, il ajoute, après *notarum formulis*, ces mots : *et idea generationis quantitatum*, « et par l'idée de la génération des quantités »; car c'est bien cette idée qui établit entre les deux méthodes une différence profonde; c'est probablement Cotes, éminent géomètre, qui a indiqué cette addition *fondamentale*. Le scolie n'a été supprimé que dans l'édition de 1722. Mais alors Newton octogénaire avait pour éditeur Pemberton. Il y avait six ans que Cotes était mort, la même année que Leibnitz. Il paraît

(*) Lagrange disculpe Newton (*Fonctions analytiques*, p. 246-250; Paris, an V). M. A. Genocchi croit que Lagrange a raison : c'est à examiner.

qu'on n'a pas envoyé d'exemplaire du *Commercium* à Leibnitz; il ne l'avait pas encore lu le 14 avril 1714. Il voulait publier aussi un *Commercium epistolicum* où il aurait mis les lettres *omises* et complété les lettres *tronquées*. Les voyages continuels, les occupations multipliées et la mort arrivée le 14 novembre 1716, ne permirent pas de réaliser ce projet qui vient d'être exécuté. Car il s'est rencontré un homme d'un savoir profond, d'un excellent jugement, animé d'un zèle infatigable (*indefessus*), investigateur toujours consciencieux, qui a établi d'une manière irréfragable, sur pièces authentiques, que Leibnitz est le premier, le seul inventeur de son calcul, et que, pour son algorithme, il ne doit rien à personne. Cet homme, c'est M. Lefort. Il établit avec une rigueur apodictique qu'il règne dans presque toutes les pièces réunies dans le *Commercium* anglais une foi qui est bien loin d'être bonne, et, malheureusement, c'est aussi ce que l'on remarque dans le célèbre résumé (*Recensio*) qui est en tête de la seconde édition du *Commercium*, résumé que Newton attribue à Keill et qu'on sait maintenant être l'œuvre de Newton même. On a retrouvé l'original de la main de Newton et portant sa signature.

Tantæne animis cœlestibus iræ!

Cela ne doit pas diminuer le culte que tout être pensant doit à la sublimité du génie de Newton, supérieur, sous quelques rapports, à celui de Leibnitz; seulement, il faut se rappeler que si tous les peuples placent les anges au ciel, c'est qu'ils n'en ont pas rencontré sur la terre.

Dans une Note biographique sur Leibnitz, nous insérerons les traductions de quelques lettres, pièces importantes de ce procès.

Le *Commercium* contient quatre-vingt-cinq extraits de lettres trouvées la plupart dans les papiers de Collins, se-

crétaire de la Société Royale, mort en 1683, par conséquent trente ans avant la publication, et, comme on peut vérifier sur la page 115, les auteurs de ces lettres avaient aussi disparu de la scène du monde. Disons tout de suite que ces extraits sont arrangés avec un tel art, choisis, mutilés, commentés et annotés avec un tel discernement, et le *Recensio* est écrit avec une logique si serrée, qu'on reconnaît partout la présence de Newton. Ceci explique pourquoi les juges n'*ont pas signé* une œuvre qu'en toute conscience ils ne pouvaient regarder comme la leur, et cependant, dans le *Recensio*, Newton proclame cette belle maxime : *Nemo in causa propria sibi est testis*, ce qui rappelle cet aphorisme d'anthropologie : *Aliud est scribere, aliud est agere.*

M. Lefort termine cette publication par un sommaire aussi curieux qu'instructif des principaux travaux mathématiques qui, au XVIIe siècle, ont préparé l'invention de l'analyse infinitésimale ; les auteurs sont Cavalieri, Descartes, Fermat, Hudde, Ricci, Barrow, Sluze.

La science doit cette précieuse acquisition à l'illustre et vénérable polymathe, ornement de trois Académies, qui a aidé de ses conseils son savant petit-fils (*). C'est devant de tels travaux que doivent s'ouvrir les portes de l'Académie des Inscriptions. C'est surtout l'érudition qui s'attache à l'histoire de la *pensée* qui mérite d'être encouragée ; là est la dignité humaine. Malheureusement, cette érudition se porte principalement sur l'histoire de nos actions : là sont nos misères.

M. Mallet-Bachelier s'est montré digne successeur de son beau-père, en prêtant ses presses à une production qui devra prendre place en toute bibliothèque sérieuse.

Note. Dans le *Commercium*, on lit (p. 101, édition

(*) M. Lefort, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a épousé une petite-fille de M. Biot.

de Paris) que David Gregory est le frère de Jacques; les biographes disent qu'il est le *neveu*. A-t-il existé deux David (*)?

Programme détaillé d'un Cours d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie analytique, comprenant les connaissances exigées pour l'admission aux Ecoles du Gouvernement et suivi de Notes et des Énoncés d'un grand nombre de problèmes; par MM. *Gerono* et *Roguet*. Quatrième édition, entièrement refondue. Paris, Mallet-Bachelier, in-8 de 216 p., 1856. Prix: 3f 50c.

Ce n'est pas ici, comme on pourrait le craindre, un squelette décharné, sans muscles, sans nerfs; c'est, au contraire, un corps bien organisé où la vie coule partout: il y a même un certain charme à monter graduellement, sans lacunes, sans brusques transitions, depuis les premiers linéaments de la numération jusqu'aux régions qui confinent à la géométrie et à l'algèbre supérieures. Cet ouvrage, indispensable pour les élèves studieux, utile aux professeurs méthodiques, agréable à tout géomètre, ajoute à la haute réputation que les savants auteurs ont acquise depuis long temps dans l'enseignement.

Les définitions sont placées aux endroits convenables. C'est ainsi que la définition des mathématiques est placée à la page 12, qualité logique bien rare.

Le *Chapitre IX* (p. 28) traite des opérations abrégées, approximations numériques, erreurs relatives. C'est aujourd'hui la *crux* de l'arithmétique, des élèves et des professeurs. On pourrait faire un gros volume de ce qu'on a écrit, et l'on écrira encore, sans dissiper complétement l'obscurité, sans diminuer entièrement les

---

(*) Page 116, *Nec irrationales quantitates moratur, etc.* (N'est arrêtée ni par les quantités irrationnelles, etc.) (A. Genocchi.)

difficultés. C'est que l'objet fait partie de la théorie de la convergence sériaire et du calcul des probabilités, objets qui exigent l'algèbre *écrite*, tandis que dans l'arithmétique on est tenu à l'algèbre *parlée*, la plus mauvaise, la plus difficultueuse, la plus traînante des algèbres. Pourquoi prendre des *coucous* quand on a des locomotives? Aussi je crois que tout ce manége approximatif, utile aux calculateurs de profession, est une surcharge inutile aux élèves. Je persiste à croire que le but moral de l'éducation des lycées doit être de faire des logiciens habitués à la rigueur géométrique, et cela suffit. Qu'on fasse des Manuels à l'usage des calculateurs du Cadastre, du Bureau des Longitudes, de l'Observatoire, à la bonne heure, rien de mieux, pourvu toutefois qu'on en dispense nos élèves (*). Malheureusement *in calculatorum ditione sumus,* et il ne faut pas oublier que *vanter* et *vendre* viennent du même verbe latin *venditare*, ce qui explique bien des choses.

Dans le Complément d'Arithmétique (p. 31), on parle du plus grand commun diviseur des fractions, etc.; je ne comprends plus ce qu'on veut dire par là. Je me rappelle bien avoir lu quelque chose de semblable dans je ne sais quelle Arithmétique et l'avoir trouvé complétement inutile.

A la page 35, à l'occasion des quantités négatives, on parle de *conventions*. Ce sont des hérésies qui, admises, ruineraient la certitude de l'analyse algébrique. Les signes + et — sont des *qualités* et non des conventions; c'est ce qu'a dit M. Cauchy: la vérité ne perd rien à s'appuyer sur une telle autorité (*voir* p. 172).

Chapitre VIII (p. 58). Séries dérivées. Pourquoi ne

(*) Les Tables de logarithmes rendent superflues les méthodes d'approximation numérique mille fois sur une.

pas donner aux choses leurs véritables noms et appeler calcul différentiel et *noter* comme tel ce qui est calcul différentiel? Quand cette superfétation, souverainement absurde, du calcul des dérivées disparaîtra-t-elle? quand le vœu émis par d'Alembert, il y a cent ans, s'accomplira-t-il dans l'enseignement? Lorsque le bon sens y régnera. Ainsi bientôt.

Trois chapitres (p. 83, 90, 91) renferment les deux trigonométries. Il est singulier, lorsqu'on insiste tant sur l'appréciation des *erreurs*, qu'on néglige complétement les différentielles des formules trigonométriques, dont l'utilité est vraiment pratique, bien plus que de savoir calculer à un billionième près $\pi^{\log 3}$ ou $(\log 3)^{\pi}$.

La géométrie analytique ne renferme rien sur le rapport anharmonique, sur les transversales, sur les faisceaux, etc., rien qui puisse préparer à la géométrie supérieure professée en Sorbonne. A la page 113, on cite *timidement* pôle et polaire. On comprend parfaitement qu'il serait injuste de reprocher aux auteurs l'existence de cette honteuse et calamiteuse omission; elle est imposée de haut.

Six Notes précieuses terminent cette remarquable production.

Note I (p. 141). Calcul numérique de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

lorsque a est très-petit, une des racines devient très-grande et l'autre s'approche de $-\frac{c}{b}$; c'est cette seconde racine qu'on évalue. De semblables évaluations pour les équations du troisième et quatrième degré ne seraient pas faciles.

Note II (p. 146). Sur une question d'intérêt composé:

Un capital de 10,000 francs est placé à intérêts com-

posés et devient 157,917^{f},60 au bout de 10 ans 4 mois $\frac{1}{2}$, on demande le taux?

Réponse : 4^{f},50, à un centime près.

Note III (p. 148). Valeurs de la fonction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$; discussion intéressante pour la construction de l'hyperbole cubique. Nous ferons remarquer que dans l'*Encyclopédie mathématique*, en voie de publication, on lit qu'*un nombre infini divisé par un nombre infini donne un quotient fini:* énoncé très-souvent faux. Du reste, si l'auteur, prenant Wronsky pour guide, s'est proposé de verser des flots d'encre sur la plus limpide des sciences, il a parfaitement réussi.

Note IV (p. 152). Plan tangent; démonstration que les tangentes en nombre infini qu'on peut mener par un point d'une surface à cette surface, sont dans un même plan.

Note V (p. 153). Conditions pour qu'une équation du second degré représente un cône droit; axes rectangulaires.

Note VI. Théorie des polynômes homogènes du second degré.

Ab ungue leo cognoscitur.

Cette Note contient cinq parties.

Ire Partie. Des déterminants (voir *Nouvelles Annales*, t. X, p. 124; t. XI, p. 307; t. XIII, p. 71).

IIe, IIIe et *IVe Parties*. De l'invariant des polynômes homogènes du second degré et du polynôme adjacent; applications à la géométrie analytique; sur la réduction des polynômes homogènes du second degré, à coefficients réels, à des sommes des carrés.

L'invariant est ce que nous avons désigné par L dans nos relations d'identité. C'est une certaine fonction des six coefficients de l'expression générale d'une fonction

homogène quadratique à trois variables. Les dérivées de cette fonction par rapport à chacun de ces coefficients donnent six fonctions dérivées qui, avec la fonction principale, renferment toutes les propriétés des coniques. Il existe de même un *invariant* pour les fonctions quadratiques à quatre variables. C'est une certaine fonction homogène des dix coefficients de l'expression générale d'une telle fonction. Les dérivées de cet invariant par rapport à chaque coefficient donnent dix fonctions qui, avec la fonction principale, suffisent pour trouver les propriétés des surfaces du second ordre. Dans cette Note VI on prend pour invariant ce qui n'est qu'une de ces fonctions dérivées, savoir la dérivée par rapport à la quantité toute connue. Donnons un exemple.

Soit

$$u = \sum a_{pq} x_p x_q ;$$

en donnant à p et q successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 et posant

$$a_{pq} = a_{qp},$$

on obtient les dix termes de la fonction homogène quadratique à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 où les rectangles ont le multiplicateur 2 à cause de l'équation

$$a_{pq} = a_{qp}.$$

Prenant les dérivées de a successivement par rapport à ces quatre variables, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_1} = u_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4,$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_2} = u_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4,$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_3} = u_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4,$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx_4} = u_4 = a_{41} x_1 + x_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4.$$

Le déterminant cramérien de ces équations est l'invariant de la fonction u.

On a le déterminant

$$H = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} - P + Q - 2R + 2S,$$
$$P = a_{11} a_{22} a_{34}^2 + a_{11} a_{33} a_{24}^2 + a_{11} a_{44} a_{23}^2 + a_{22} a_{33} a_{14}^2 + a_{22} a_{44} a_{13}^2 + a_{33} a_{44} a_{12}^2,$$
$$Q = a_{12}^2 a_{34}^2 + a_{13}^2 a_{24}^2 + a_{14}^2 a_{23}^2,$$
$$R = a_{12} a_{34} a_{14} a_{23} + a_{12} a_{34} a_{13} a_{24} + a_{13} a_{23} a_{14} a_{24},$$
$$S = a_{11} a_{23} a_{24} a_{34} + a_{22} a_{13} a_{14} a_{34} + a_{33} a_{12} a_{14} a_{24} + a_{44} a_{13} a_{12} a_{23};$$

dans chaque terme les chiffres 1, 2, 3, 4 paraissent deux fois et pas davantage. Considérant $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ comme les coordonnées d'un point de la surface $u = 0$, alors a_4 est la quantité toute connue et l'on a

$$\frac{dH}{da_4} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23}^2 + a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2 + 2 a_{12} a_{13} a_{23}.$$

C'est cet invariant que l'on considère ici (p. 162) et il est insuffisant. Par exemple, il ne peut servir à trouver dans quel cas l'équation complète

$$u = 0$$

donne un ellipsoïde imaginaire; dans quel cas elle représente deux plans, un cône, etc. Il existe des relations d'identité entre les dix fonctions dérivées et qui facilitent les calculs. De même pour une surface algébrique de degré m, il existe un invariant, fonction de $\frac{m^2 + 3m + 2}{2}$ coefficients avec autant de dérivées partielles. Lorsque l'invariant général est identiquement nul, la surface devient un cône (théorème de Otto Hesse, si élégamment démontré par M. Brioschi, *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 402). Le déterminant d'une fonction littérale est la valeur extrême maximum de cette fonction. La disparition des rectangles dans une fonction quadratique est exposée ici

et se trouve aussi dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret; il a été l'objet de beaux travaux de M. Sylvester. La découverte de ce qu'il appelle la *loi d'inertie* est fondamentale, même sous le point de vue géométrique (*voir* le beau Mémoire de M. Otto Hesse, *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 467, et Brioschi, t. XV, p. 269).

Le polynôme adjoint n'est autre que la polaire réciproque. Ses propriétés se rapportent à la classe de la courbe; c'est ce que nous ferons voir ailleurs.

Ve Partie. Sur la détermination du nombre des racines réelles des équations numériques qui sont comprises entre des limites données.

C'est nouveau et très-beau. On lit ici une démonstration très-simple du théorème Sylvester sur la composition des fonctions *sturmiennes*. Le célèbre analyste a bien voulu nous autoriser à insérer cette cinquième partie, et sa haute position dans la science et dans l'enseignement permettent d'espérer que ce travail agira sur le professorat et médiatement sur les élèves, et que tous se familiariseront avec ces mots encore étranges : déterminant, invariant, forme, adjoint, etc.

Terminons par une observation assez opportune. Les géomètres éminents, doués du génie d'invention, ont peu d'inclination à lire les travaux d'autrui et se trouvent assez riches de leurs propres idées. Il résulte de là souvent qu'en publiant ces idées ils s'exposent, comme on dit, à découvrir la mer Méditerranée. *A fortiori* ceux qui n'ont ni génie, ni lecture.

Note. M. Laguerre-Werly ramène la réduction des formes quadratiques à la réduction du système linéaire, et parvient ainsi facilement à des propriétés que M. Hermite démontre assez péniblement, par exemple à celles de la fonction dite *ff* dans le beau Mémoire sur les fonctions abéliennes.

NOUVELLES PREUVES DES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE; par *Auguste Bouché*, professeur de Mathématiques pures et appliquées au lycée impérial d'Angers. Paris, 1856; in-8 de 23 pages.

« Reconnaître si le résultat d'une opération est exact » ou inexact, et, dans le cas où il est inexact, trouver » dans quelle partie de l'opération la faute a été com- » mise, tel est le double problème que nous allons ré- » soudre. »

Ce début explique clairement le but, qui consiste dans le contrôle par 9. Les quatre opérations, la multiplication et la division abrégées, l'extraction de la racine carrée et cubique, sont successivement soumises à ce moyen de vérification. Il y a des signes certains qui annoncent que le calcul est inexact; il n'en existe point qui donnent une certitude que les résultats sont exacts. Les machines arithmétiques et certaines organisations jouissent seules de ce privilége. L'auteur fait des vérifications sur les diverses parties, ce qui peut faire découvrir l'endroit où l'on s'est trompé.

BIOGRAPHIE.

SIMON LHUILIER.

Simon-Antoine-Jean Lhuilier naquit à Genève le 24 avril 1750. Il montra de bonne heure des dispositions pour les mathématiques et eut pour professeur Louis Bertrand, l'auteur du *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* (*). Ce professeur était si

(*) Connu par sa démonstration des parallèles.

content des progrès de son élève, qu'il le désigna comme devant être un jour son successeur; mais ce qui était de plus grande importance pour le jeune Lhuilier, c'est l'amitié que lui a constamment témoignée son parent, le célèbre philosophe George-Louis Lesage, qui l'aida constamment de ses conseils et de ses leçons dans les mathématiques. Ces relations commencèrent le 26 juin 1766, à l'époque où Lhuilier, âgé de 16 ans, sortit du collége le premier. Il fut placé comme précepteur chez M. Rilliet-Plantamour, où il resta deux années, et suivit les leçons de physique de Lesage en 1768 et 1769 et aussi celles de M. de Saussure. N'ayant pas de fortune, Lhuilier manifesta à son parent le désir de chercher une meilleure condition au dehors. L'occasion s'en présenta en 1775. Le célèbre Wurtembergeois Christophe-Frédéric Pfleiderer (*), qui était élève et collaborateur de Lesage (1766-1769), avait été placé en 1766, à sa recommandation, comme professeur de mathématiques à l'Académie militaire fondée à Varsovie par le roi Stanislas-Auguste. Une Commission d'éducation, dont Pfleiderer était le membre le plus influent, mit en 1775 au concours un projet d'enseignement. Pfleiderer envoya les programmes à Lesage, qui aurait désiré que Lhuilier traitât la physique. Se défiant de ses connaissances en cette science, il préféra les mathématiques, et son ouvrage fut couronné et imprimé avec une traduction en polonais sous ce titre: *Arithmétique pour les écoles palatinales*; Varsovie, 1777. In-8. C'est son début, si l'on excepte l'opuscule : *Lettre en réponse aux objections élevées contre la gravitation newtonienne. Journal encyclopédique,* février 1773. Le roi Stanislas fit féliciter le jeune auteur, et le prince Czartorinski l'invita à venir à Varsovie faire l'éducation de son fils, devenu aujourd'hui le chef de l'émigration polo-

(*) Né en 1736, mort en 1821.

naise. Lhuilier accepta l'invitation. La longue suite d'années qu'il passa dans la maison du prince fut l'époque la plus heureuse de sa vie et aussi la plus féconde en travaux. Il publia successivement :

1. Mémoire sur le minimum de cire des alvéoles des abeilles et en particulier sur un minimum-minimorum relatif à cette matière (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1781).

2. De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometriæ considerata. Varsoviæ, 1782, in-4.

3. Sur les pyramides isopérimètres (*Nov. acta Peters.*, III).

4. Théorème sur les centres de gravité (*ibid*, IV).

5. Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, qui a remporté le prix proposé par l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres pour l'année 1786. Berlin; in-4.

La Commission qui a adjugé le prix était présidée par Lagrange. Le principe est celui des limites de d'Alembert.

6. Examen du Mémoire sur les poids et mesures, où l'on se propose d'avoir des étalons ou modèles de mesures et de poids qui soient réglés par des principes certains et invariables (*Journal encyclopédique*, juillet 1785).

7. Théorème sur les solides plans superficiels (*Mém. de Berlin*, 1786 et 1787).

8. Sur la décomposition en facteurs de la somme et de la différence de deux puissances à exposants quelconques de la base des logarithmes hyperboliques, afin de dégager cette décomposition de toute idée de l'infini (*Mém. de Berlin*, 1788 et 1789).

Vers la fin de son séjour en Pologne, il conçut le plan

de sa *Polygonométrie*. Etant allé trouver à Tubingue son ami Pfleiderer, retourné dans sa patrie depuis 1781 comme professeur de mathématiques et de physique, celui-ci lui fit connaître les travaux sur le même objet que venait de publier Lexell dans les Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg. Toutefois, revenu à Genève, il publia :

9. Polygonométrie, ou de la Mesure des figures rectilignes et abrégé d'isopérimétrie élémentaire. Genève, 1789; in-4.

Pendant les troubles révolutionnaires qui agitèrent Genève, Lhuilier jugea prudent de se retirer auprès de son ami à Tubingue, où il passa plusieurs années. Il y publia :

10. Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris ad normam dissertationis ab. Acad. Scient. Reg. Prussica, A. 1786 præmii honore decoratæ elaborata. Tubingæ, 1795; in-4.

Il revint en 1794 à Genève et publia :

11. Examen du mode d'élection proposé à la Convention nationale de France en février 1793 et adopté à Genève. Genève, 1784; in-8.

12. Catéchisme d'Arithmétique, destiné aux écoles primaires.

En juillet 1795, il fut nommé enfin professeur à l'Académie de Genève comme Bertrand l'avait prédit.

13. Manière élémentaire d'obtenir les suites par lesquelles s'expriment les quantités exponentielles et les fonctions trigonométriques des arcs circulaires (*Philos. Trans.*, 1796).

Il avait été nommé membre de cette Société pendant son séjour à Tubingue.

14. Solution algébrique du problème suivant : A un cercle donné, inscrire un polygone dont les côtés passent par des points donnés (*Mém. de Berlin*, 1796).

15. Sur les probabilités (*Mém. de Berlin*, 1796).

16. Sur l'application du calcul des probabilités à la valeur des témoignages (*Mém. de Berlin*, 1797).

Ces deux derniers Mémoires avec la collaboration de Pierre Prévost.

17. Anleitung zur elementar-algebra. Zwei theile. Tubingue, 1799-1801; in-8.

18. Théorèmes de polyédrométrie présentés à l'Académie de Paris le 1er avril 1800 (11 germinal an VIII) et imprimés en 1805.

Contient le principe qui a servi à Carnot (*).

19. Eléments raisonnés d'Algèbre. Genève, 1804; 2 vol. in-8.

Traduction de l'ouvrage n° 17.

20. Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliqués à la recherche des lieux géométriques. Paris, 1809; in-4. (Dédié à son ancien élève le prince Czartorinski, alors ministre de l'Instruction publique en Russie).

On trouve de lui, dans les trois premiers volumes des *Annales* de Gergonne :

21. Analogie entre les triangles rectangles, rectilignes et sphériques (tome I).

22. Recherche du plan de la plus grande projection orthogonale d'un système de surfaces données de grandeurs sur des plans donnés de position dans l'espace (tome II).

(*) Carnot et Lhuilier sont deux géomètres similaires : mêmes qualités, mêmes défauts.

23. Détermination du centre des moyennes distances du triangle sphérique (tome II).

24. Lieux aux sections coniques (tome II).

25. Eclaircissements sur le troisième et le sixième cas de la trigonométrie sphérique (tome II).

26. Solution d'un problème de combinaison (tome III).

27. Démonstrations diverses du théorème d'Euler sur les polyèdres et examen des divers cas d'exception auxquels ce théorème est assujetti (tome III).

28. Mémoire sur la possibilité et la construction des polyèdres réguliers (tome III).

29. Solution d'un problème de probabilité.

On ignore pourquoi la collaboration de Lhuilier a cessé avec ce III[e] volume, qui a paru en 1812; car il a conservé son activité littéraire jusqu'à un âge très-avancé. Il ne prit sa retraite qu'en 1823 à l'age de 73 ans. Jusque-là il remplit ses fonctions avec une telle conscience, qu'attaqué de la goutte, il se faisait porter en classe pour donner ses leçons. Plusieurs de ses élèves, parmi lesquels fut pendant quelque temps M. Guizot, se distinguèrent dans les carrières scientifiques. Lhuilier donna beaucoup de soins à M. Sturm, devenu membre si distingué de l'Institut de France. Soigné par un fils et une fille, Lhuilier put jouir encore longtemps d'un repos si bien mérité. Il chercha toutefois à diverses fois à étendre ses idées.

30. Expressions de la capacité d'un polyèdre dans ses éléments extérieurs (*Bibl. univers.*, 1828).

31. Eléments de la doctrine générale des polygones et des polyèdres (manuscrit de 8 pages in-4 sans titre).

32. Discussion générale des doctrines des polygones et des polyèdres, par le professeur Lhuilier, plus qu'octogénaire (manuscrit de 3 pages in-4 sans titre.)

Cependant son intelligence s'obscurcissait peu à peu; en certains moments, il eut la triste conscience de cette décadence; il écrivit un jour d'une main tremblante :

... Je suis hors de saison,
On ne veut plus d'un être octogénaire,
Je suis voisin de perdre la raison,
Je suis un poids qui surcharge la terre.

Il quitta la terre le 28 mars 1840, âgé de près de 90 ans.

Note. Cette biographie est extraite des *Mittheilungen der Naturforsanden Gesellschaft in Bern*, Communications de la Société des Explorateurs de la nature de Berne, ouvrage périodique d'un haut intérêt et rédigé avec beaucoup de talent par le professeur R. Wolf, secrétaire de la Société (voir *Nouvelles Annales*, t. X, p. 163).

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Mécanique, exposés suivant le *Programme* de M. le Ministre de l'Instruction publique et des Cultes, du 30 août 1852, pour le baccalauréat ès Sciences; par *M. Furiet*, ingénieur au corps impérial des Mines, à l'usage des candidats aux Écoles spéciales, aux élèves des Écoles professionnelles, des ingénieurs, conducteurs et de toutes les personnes qui désirent s'initier aux principes de la mécanique pratique. Paris, 1856; in-8 de xx-318 pages. Prix : 6 francs, chez Mallet-Bachelier, libraire.

On connaît maintenant deux méthodes pour enseigner la mécanique : l'ancienne méthode, celle des *couples*, la nouvelle ou celle des *quantités de travail*. Nous les dé-

signons par ce qu'elles ont de plus caractéristique. Le titre de l'ouvrage annonce bien qu'il appartient au nouveau système. L'auteur consacre vingt pages d'avertissement à faire l'éloge de ce système et la critique de l'ancienne école. L'auteur est élève de cette ancienne école : quelque défectueuse qu'on la suppose, elle peut donc donner de bons produits.

Contrairement à l'opinion de d'Alembert, l'auteur considère les lois dynamiques et statiques comme des faits *contingents* et non comme des vérités apodictiques. La conservation des forces vives a été *démontrée* par Lagrange, Carnot, etc.; il est plus simple, selon M. Furiet, d'admettre cette conservation comme axiome, moyen d'abréviation.

M. Furiet ne fait aucun emploi de l'algorithme algébrique et s'en félicite. Nous regrettons de ne pouvoir partager ces opinions.

Avant d'aller plus loin, comparons les deux systèmes mentionnés ci-dessus. Voyons les connaissances qu'exige chacun d'eux, ce qui permettra de juger du degré de simplicité de l'enseignement.

I. *Connaissances exigées dans l'ancien système.*

1°. Composition et décomposition des forces de translation et de rotation (couples).

2°. Équations d'équilibre.

3°. Forces accélératrices.

4°. Equations-définitions;

$$v=\frac{de}{dt},\quad \varphi=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2e}{dt^2},$$

$$\varphi de=mvdv,\quad 2\int\varphi\, de=mv^2+\text{constante}.$$

5°. Mouvement hélicoïdal; double cône de M. Poinsot.

6°. Théorie du choc.

II. *Connaissances exigées dans le nouveau système.*

1°. Composition et décomposition des mouvements.

2°. Composition et décomposition des vitesses.

3°. Composition et décomposition des forces.

4°. Composition et décomposition des forces accélératrices.

5°. Composition et décomposition des travaux élémentaires.

6°. Composition et décomposition des quantités de travail.

En outre, forces motrices, forces de résistance, forces vives, etc.

Les équations-définitions, au lieu d'être *écrites*, sont *parlées* et traduites en théorèmes qui chargent la mémoire d'une foule de notions plus ou moins obscures.

Il est vrai que depuis qu'on a adopté une *unité* pour y rapporter $\int \varphi\, de$ et qu'on a inventé des instruments pour mesurer facilement cette intégrale, la science des machines s'est éclaircie et s'est beaucoup simplifiée en prenant cette intégrale comme point de départ; mais ajoutons que les machines sont dans la mécanique et la mécanique n'est pas dans les machines. Le système du monde, la dynamique électrique, magnétique, optique, ne sont pas des machines, et il faut pourtant les expliquer.

Dans ce gouvernement de l'univers physique, on ne rencontre ni pistons, ni roues, ni bielles, ni engrenages, etc., et quoique ne faisant usage que de mécanique rationnelle, cela ne marche pas moins bien que nos engins de mécanique pratique, et même un peu mieux.

On connaît la grande collection de Borgnis publiée par feu Bachelier; l'ouvrage de M. Furiet est pour ainsi dire

un *synopsis* de cette collection, mais un *synopsis* raisonné, méthodique et tenant compte des progrès faits dans la science des machines.

L'ouvrage est divisé en trente-deux leçons; les quinze premières leçons sont consacrées à la théorie fondée sur la pratique.

Ire Leçon (1-12). Décrit les diverses espèces de mouvements : le pendule, le balancier, les échappements, instruments chronométriques.

IIe Leçon (13-22). Pesanteur comme application du mouvement continu; gravitation universelle.

IIIe Leçon (23-33). Plan incliné de Galilée; machine d'Atwood et ses applications. Appareil à indications; un pinceau en mouvement trace une courbe sur un plateau qui a un mouvement uniforme connu; à l'aide de ce mouvement et de la forme de la courbe, on peut trouver le mouvement du pinceau et du corps auquel il est attaché.

IVe Leçon (34-42). Composition des mouvements, des chemins parcourus et des vitesses. Balistique.

Ve Leçon (43-53). Plan incliné; poulies de diverses espèces; treuil; courbes à la Vaucanson pour obtenir un mouvement de translation à l'aide d'un mouvement de rotation; une courbe tracée sur un plan vertical tournant et appliquée contre une saillie faisant partie d'une tige verticale soulève cette tige et l'on peut tracer la courbe de telle sorte que le mouvement de translation soit uniforme. Transmission de mouvement à l'aide de courroies et de la chaîne de Vaucanson.

VIe Leçon (54-65). Engrenages: roues, pignons, lanternes, crémaillère; tracés géométriques et pratiques; développantes du cercle. Cette dernière partie, si importante pour transmettre le mouvement à une grande distance, exigeait plus de développements.

VIIe Leçon (65-74). Engrenages coniques ; vis et son écrou ; vis sans fin ; engrenage de Watt : ce sont des dents hélicoïdales en saillie sur une roue qui engrène dans des hélices creusées dans une autre roue. On donne la transformation du mouvement circulaire en rectiligne de La Hire sans le citer. On ne parle pas de l'engrenage imaginé par Olivier.

VIIIe Leçon (75-84). Forces de diverses natures ; dynamomètres à ressorts.

IXe Leçon (85-91). Proportionnalité des forces aux vitesses ; unité de force. On définit la masse par la *quantité de résistance,* ce qui est peu clair. C'est le poids qui donne la mesure des masses : mais la pesanteur disparaissant, la masse n'en subsistera pas moins.

Xe Leçon (92-100). Dynamomètre, frein de Prony, cheval-vapeur, etc.

XIe, XIIe, XIIIe et XIVe Leçon (101-134). Principes théoriques sur la composition des forces, sur le centre de gravité, etc.

C'est à la XVe Leçon que commence la mécanique pratique proprement dite.

Parlant du principe de Carnot, M. Furiet dit : « On se demande comment un principe aussi évident a pu faire honneur à son auteur au point d'en porter le nom (p. 131). » Singulière demande !

Les Leçons XV, XVI, XVII roulent sur les machines simples, ayant égard aux frottements, à la roideur des cordes, etc., avec les expériences principales qui s'y rapportent ; description de diverses balances, peson, pèse-lettres ; le tout assez succinctement.

L'hydraulique commence à la XVIIIe Leçon et finit à la XXIe Leçon. En un si petit nombre de pages, on ne

peut s'attendre à trouver de grands détails sur les diverses espèces de roues, à augets, à aubes, à la Poncelet, turbines, etc. Pour bien comprendre ces engins, il faut les connaître.

Toutes les espèces de pompes, la vis d'Archimède, les norias, chapelets, sont l'objet de la XXIIe, XXIIIe et XXIVe Leçon. On considère ensuite le vent comme moteur. On donne des notions sur la mouture du blé dans la XXVe Leçon. Des expériences récentes obligent de modifier quelques énoncés sur les effets du blutage et la formation du gruau. La XXVIe Leçon, consacrée aux moteurs animés, homme, cheval, bœuf, mulet, renferme des données curieuses et instructives. Les six dernières Leçons traitent des machines à vapeur. On en donne d'abord l'historique (XXVIIe leçon) dont l'absence ne serait pas regrettée. Viennent ensuite les descriptions des machines de Newcomen, de Watt, des bateaux à vapeur, des locomotives, etc.; on explique la détente, l'effet simple et double, et comment ce dernier est remplacé par des tiroirs qui communiquent simultanément avec le condenseur et avec la chaudière, et alternativement en sens opposé.

L'auteur termine ainsi :

« Nous n'avons dû faire qu'une esquisse rapide des » principes de la mécanique et présenter les faits géné- » raux de la science seulement, avec les objets dont elle » s'occupe, non avec leurs dimensions réelles, mais pour » ainsi dire réduites. »

On a, en effet, ici beaucoup de faits et de données numériques qu'il est commode de trouver réunis et les connaissances pratiques de l'auteur inspirent toute confiance. L'ouvrage sera consulté avec fruit par ceux qui ne sont pas étrangers à la langue de la technologie et qui connaissent les engins, au moins de vue.

Memoria intorno ad alcune transformazioni d'integrale multiplici; del signor *Angelo Genocchi* (juillet, 1853).

On parvient souvent, au moyen de *transformations*, à ramener une équation à une autre de degré moindre; d'une manière analogue, par des procédés métamorphiques, on ramène souvent une intégrale à une autre d'une multiplicité moindre, quelquefois intégrable ou du moins évaluable lorsque l'intégrale est *définie*, cette dénomination étant prise dans un sens général, c'est-à-dire lorsqu'il existe une certaine relation entre les variables indépendantes. De grands géomètres se sont occupés de cette matière, et dans les derniers temps MM. Lamé, Catalan, W. Roberts, etc. Le but du présent Mémoire est de parvenir aux résultats obtenus par ces géomètres à l'aide de transformations uniformes et très-simples. Il ne nous est pas permis d'entrer dans de grands détails et nous devons nous borner à citer un spécimen.

Soit φ une fonction des n variables indépendantes x_1, $x_2,\ldots, x_n$ assujettie à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

et soit l'intégrale multiple

$$\int \varphi\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_{n-1}.$$

Posons

$$a_r x_r = \rho y_r;$$

r prenant successivement les valeurs $1, 2, 3,\ldots, n$, les a sont des constantes, et supposons

$$\sum_1^n (y_r)^2 = 1,$$

nous aurons

$$\rho^2 = \sum_1^n (a_r x_r)^2, \quad \frac{1}{\rho^2} = \sum_1^n \left(\frac{y_r}{a_r}\right)^2,$$

d'où

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} = \rho^{n+1} dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1},$$

$$\int \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{a_n^2} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \int dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}$$

$$= \frac{1}{a_n^2 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Par ce genre de considérations, l'auteur parvient facilement aux intégrales données dans le *Journal* de M. Liouville par M. Catalan, t. IV, p. 333, et par M. William Roberts, t. XI, p. 201 et à l'aire de l'ellipsoïde donnée par M. Cayley dans le même journal, t. XIII, p. 267.

La IIe Partie traite des intégrales abéliennes, c'est-à-dire des intégrales $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$, P et R étant des fonctions entières de x^2. L'auteur prend pour équation de condition

$$\frac{x_1^2}{a_2 - a_1^2} + \frac{x_2^2}{a^2 - a_2^2} + \frac{x_3^2}{a^2 - a_3^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a^2 - a_{n-1}^2}$$

$$+ \frac{x_n^2}{a^2 - a_n^2} = 1.$$

On voit que c'est là une généralisation des coordonnées elliptiques de M. Lamé; faisant

$$n = 3,$$

l'auteur parvient à des relations entre des fonctions elliptiques et à de très-beaux théorèmes, dont plusieurs sont

connus, mais démontrés ici d'une manière très-uniforme et fort simple. Puissions-nous inspirer le désir de lire cette instructive et attrayante production !

TABLES OF LOGARITHMS OF THE NATURAL NUMBERS FROM 1 TO 108000, by *Charles Babbage,* esq. Fellow R. S. L., etc. Stereotyped. London. Printed for J. Mawman, 1827, by William Clowes. Grand in-8. Préface et Introduction xx pages, Tables 202 pages.

Ces Tables sont à 7 décimales et ne contiennent que les logarithmes des nombres.

L'ouvrage est dédié à M. Colby, lieutenant-colonel du génie, ami de l'auteur, qui a examiné avec lui beaucoup de Tables logarithmiques.

Voici les précautions prises pour assurer l'exactitude de l'impression.

Un exemplaire de Callet (7 décimales) a été comparé avec les Tables in-folio de Vega (10 décimales), et, lorsque par suite de cette comparaison la dernière décimale de Callet a dû être augmentée d'une unité, on l'a *marquée* à l'encre rouge, et cette dernière décimale était ensuite *imprimée* avec un point au-dessous du chiffre. Chaque première épreuve de ces Tables a été lue trois fois et :

1°. Conférée avec les Tables *marquées* de Callet.

2°. Conférée avec les Tables de Hutton, 4ᵉ édit., 1804.

3°. Conférée avec les Tables de Vega in-folio.

4°. 2ᵉ épreuve. Conférée avec les Tables de Vega de 1 à 100 000 et les derniers 8 000 avec les Tables de Callet.

5°. Les premiers 20 000 avec la *Trigonometria britannica* de Briggs. Folio, Goudæ, 1633.

Alors cette épreuve a été stéréotypée et les épreuves des planches étaient conférées :

6°. Avec les Tables de Vega jusqu'à 47 500.

7°. En entier avec les Tables de Gardiner. In-4; London, 1742.

8°. Les Tables de Taylor. In-4, 1792.

9°. Et encore par divers lecteurs avec ces dernières Tables.

C'est M. Colby qui a surveillé et dirigé toutes les collations à partir de la quatrième.

Dans les Tables de Vega avec 10 figures décimales il y en a 73 terminées par 500 ou 499, 40 terminées par 4999 et 5000 et 2 par 49999 et 50000. Pour lever le doute qui pouvait en résulter sur la 7e décimale conservée, il fallait des Tables avec 15 figures. M. Babbage se rendit à cet effet à Paris, et grâce à Laplace, Bouvard et aux autres membres du Bureau des Longitudes, il put consulter les célèbres Tables manuscrites calculées sous la direction de Prony et conservées à l'Observatoire, et il exprime le vœu que ces *treasures of calculation* puissent être rendus indestructibles par la stéréotypie, vœu qui pourra être exécuté en 2440 quand nous aurons un observatoire digne de la France.

De la comparaison faite avec la coopération de M. Colby de toutes les Tables existantes, M. Babbage déduit ces douze règles :

I. La clarté et la facilité de la lecture ne dépendent pas seulement de la grandeur du type, mais de la proportion entre ce type et les intervalles entre les lignes horizontales.

II. Les chiffres de même hauteur ou à peu près sont préférables à ceux où quelques-uns tombent au-dessus et d'autres en dessous de la ligne (*).

(*) Qu'un auteur anglais préconise l'usage des *chiffres anglais*, c'est-à-dire de chiffres ayant tous une égale hauteur, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 et les préfère aux *chiffres français* d'inégale hauteur 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0.

III. Les filets verticaux séparant les colonnes ne doivent pas être placés au milieu de l'espace blanc qu'on ménage entre chaque colonne, mais près de la colonne de gauche, de sorte que chaque série verticale de chiffres est précédée d'un espace blanc, disposition favorable à la vue.

IV. Lorsqu'une partie de la Table doit être séparée du reste d'une manière plus saillante, un seul filet *mince* est plus en évidence que deux filets maigres adjacents (C'est ce qui a lieu dans Callet pour séparer les minutes des nombres).

V. Les chiffres qui servent d'entrée doivent être distingués soit par la position, soit par la grandeur, de manière à frapper l'œil rapidement.

Dans les Tables de Babbage, les quatre premières décimales sont d'un plus grand type que les autres, de même les chiffres placés au haut et au bas de chaque page.

VI. Lorsque les dixièmes, centièmes, millièmes restent les mêmes dans plusieurs lignes, on ne les imprime qu'une fois; sous plusieurs rapports, il vaudrait mieux les répéter. L'œil n'aura pas besoin de chercher.

---

cela s'explique par la longue habitude qu'il a de lire les premiers. Mais il suffit de comparer les deux types pour comprendre et justifier la préférence que les mathématiciens français ont toujours accordée aux chiffres qui, par les différences de leurs hauteurs, attirent et fixent mieux l'attention et offrent par là moins de chances d'erreur. Ainsi soit le nombre 1327698—1327698, écrit avec les deux genres de types : il est évident que les chiffres du second sont plus distincts et partant plus lisibles que les premiers. Soutenir le contraire, ce serait dire qu'il est plus facile de lire une page de majuscules qu'une page imprimée en minuscules ordinaires : ce qui est contraire à l'opinion et à l'expérience de tous les typographes. Aussi l'imprimerie Mallet-Bachelier, en restant dans la voie des saines traditions, a constamment reçu les encouragements de nos plus grands géomètres.

(BAILLEUL, Directeur de l'imprimerie Mallet-Bachelier.)

Dans les Tables de Babbage cette règle n'a pas été observée, on s'est aperçu trop tard de son utilité. Elle est observée dans toutes les petites Tables in-12.

VII. Lorsque au milieu d'une même ligne la troisième décimale change, il faut indiquer ce changement par un signe quelconque sans déplacer les quatre derniers chiffres.

M. Babbage indique ce changement au moyen de la quatrième décimale écrite en petits caractères.

Par exemple, le logarithme de 23334 est 3679892, les trois premiers chiffres sont 367; le logarithme du nombre suivant de la même ligne, savoir celui du nombre 23335, est 3680078; on voit que le troisième chiffre 7 est changé en 8; cela est indiqué en écrivant 0078 où le premier des quatre chiffres est en petit caractère. Dans les Tables de Callet, cette indication consiste à abaisser 0078 au-dessous de la ligne et à laisser une partie blanche, ce qui est désagréable à la vue.

VIII. Lorsqu'un renseignement additionnel peut être donné dans la Table sans augmenter le volume ni la dépense, il faut le donner, à moins que cela ne distraie trop l'attention des recherches les plus fréquentes.

La réduction des nombres en degrés, minutes, secondes est une addition utile. Ces résultats sont placés à la gauche de chaque page, mais sont séparés des nombres par une large ligne noire. Les minutes sont en plus gros caractères que les secondes; les unes et les autres sont en plus petits caractères que les nombres; chaque page ne contenant que 50 nombres et non 60 comme dans Callet, l'indication des trois premiers chiffres des nombres en tête de la Table devient plus facile.

Une autre addition est d'indiquer si le logarithme est par excès. Alors on a placé un *point* sous la 7[e] décimale,

moyen très-simple et de facile exécution et qui devrait être généralement adopté.

IX. Chaque page doit être encadrée par de larges filets ou par des lignes de diverses couleur.

Chaque Table doit avoir un titre courant en tête de chaque page et aussi concis que possible.

X. Il faut éviter que les chiffres d'une page ne déteignent sur le côté opposé.

Cela arrive souvent lorsque le volume est broché avant que l'encre ne soit entièrement sèche.

XI. Il faut éviter, par la même raison, de prendre un papier trop transparent.

XII. Un papier *coloré* rend les caractères plus distincts qu'un papier blanc (*).

M. Babbage a essayé des papiers de diverses couleurs et teintes. Toutes les personnes qu'il a consultées ont donné unanimement la préférence au papier de couleur, mais il y a diversité sur la teinte. Il a donné la préférence à la couleur jaune. Les tables sont imprimées sur du papier jaune.

(*) Cette assertion n'est vraie qu'en ce sens qu'une teinte moins vive que le blanc fatigue moins la vue; mais *en soi* elle ne rend pas les caractères plus distincts. (Bailleul.)

BIOGRAPHIE.

NEWTON.

Isaac Newton est né à Woolsthrope près Grantham (Lincolnshire) le 25 décembre 1642, à 1 ou 2 heures du matin, en temps de pleine lune.

13 ans (1655). — Est envoyé à l'école de Grantham.

14 ans (1656). — Est retiré pour vaquer à des travaux agricoles. Lit des ouvrages mathématiques en gardant les moutons.

18 ans (1660). — Renvoyé à l'école pour se préparer au collége.

19 ans (1661). — Admis comme *subsizar* au collége de la Trinité à Cambridge. Devient *sizar*.

22 ans (1664). — Observe deux halos autour de la lune.

23 ans (1665, janvier). — Prend les premiers degrés (B. A.); John Pulleyn est le *tutor* de Newton : chaque professeur peut choisir son pupille. — 20 mai, Mémoire sur les fluxions; il se sert du *point;* différentiation d'une équation à plusieurs variables. — 13 novembre, application aux tangentes des courbes.

24 ans (1666, 25 mars). — Apprend à polir les verres, fait un prisme; découvre l'inégale réfrangibilité des rayons; a l'idée du télescope à réflexion, qu'il reprend deux ans après; forcé de quitter Cambridge à cause de la peste. Pendant le temps de ces expériences pour maintenir son attention, il vivait de pain et de quelques verres de vin d'Espagne (sec). Les écoliers boursiers, tel était Newton, recevaient pendant ce temps 3 sh. 4 d. par semaine.

25 ans (1667). — *Fellow minor*. Obtient une chambre devenue depuis la sacristie.

26 ans (1668). — *Fellow major* en mars et maître ès-arts (M. A.) en octobre.

Il était le vingt-troisième sur une liste de 143 signée par le pro-recteur Thomas Burnet, auteur de la *Theoria telluris sacra*.

Fait un télescope à réflexion : 6 pouces de long ; ouverture un peu plus de 1 pouce, verre plan convexe, épaisseur $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$ de pouce, force amplifiante 40.

27 ans (1669). — Lettre sur son télescope à son ami Francis Aston. — 31 juillet, son ouvrage *De analysi* envoyé par Barrow à Collins. — 29 octobre. Nommé professeur Lucasien (chaire établie le 19 décembre 1663).

Objets d'enseignement : géométrie, arithmétique, astronomie, géographie, optique, statique. D'après les statuts : une leçon d'une heure une fois par semaine et deux fois par semaine pendant deux heures ; le professeur doit laisser accès libre auprès de lui.

28 ans (1670). — Sommation de séries harmoniques ; solution du problème d'annuités.

29 ans (1671). — Construit son second télescope à réflexion ; existe dans la collection de la Société Royale. — 21 décembre. Est proposé comme membre de la Société Royale ; perfectionne la méthode des séries infinies.

30 ans (1672). — Élu membre le 6 janvier. — 2 février. Lettre à Oldenbourg annonçant sa découverte sur la lumière. Anecdote sur le combat naval du 28 mai entre les Anglais et les Hollandais. D'après le bruit du canon, il annonce, étant à Cambridge, la victoire des Hollandais. — 10 décembre. Lettre à Collins contenant l'histoire de sa méthode des tangentes citée dans la 3e édition des

Principes, p. 246; au lieu de deux autres lettres à Leibnitz dans les deux premières éditions; cette lettre envoyée à Leibnitz le 26 juillet 1676 (*).

31 ans (1673).— Désire se retirer de la Société Royale. Dans une lettre à Collins, il dit ne pas connaître assez le français pour lire sans dictionnaire.

32 ans (1674, 20 juin). — Lettre à Collins; la vitesse horizontale du boulet n'est pas uniforme.

33 ans (1675, 29 janvier). — Demande à être exempté de payer la rétribution hebdomadaire à la Société Royale (1 schelling); il obtient l'exemption à raison de sa position gênée. Explication des couleurs dans les bulles de savon et plaques minces. La libration de la lune, dans une lettre à Mercator. Longueur d'un arc elliptique.

37 ans (1679). — Propose le 28 novembre une expérience pour constater le mouvement de la terre par la chute des graves, devant tomber à l'est de la verticale.— 18 décembre. Charles Montagu est immatriculé comme *scholar* au collége de la Trinité. Montagu, comte d'Halifax, devenu veuf, prend pour diriger sa maison Catherine Barton, d'une beauté remarquable, nièce de Newton, veuve du colonel Barton; elle épouse Conduitt. Le comte, étant devenu ministre d'État, nomme Newton intendant de la Monnaie (**). Détermine la courbe décrite sous l'action d'une force centrale.

42 ans (1684, août). — Montre à Halley quelques théorèmes sur les lois des mouvements célestes.

43 ans (1685, avril 25). — Détermine les attractions des masses et complète la démonstration des lois de la gravitation. Finit le II[e] livre des *Principes*, dans l'été.

(*) Fameuse pièce au procès (*voir* le *Commercium epistolicum*, p. 89 et 19.), édition de Paris).

(**) Montagu est né en 1661 et mort en 1715.

44 ans (1686). — Premier livre des *Principes* (manuscrit) présenté à la Société Royale. — 2 juin. Halley entreprend l'impression des *Principes* à ses frais.

45 ans (1687).— Publication des *Principia* vers la fin de l'été. Prix : 5 et 10 schellings (*voir* de Moivre, *Histoire de l'Académie, Éloge,* 1754).

46 ans (1688). — Quitte le collége de la Trinité.

47 ans (1689).— Nommé un des députés de l'Université de Cambridge au Parlement-Convention (Laplace, *Système du Monde,* p. 372; Paris, 1824). Les principes du système social furent posés dans l'année suivante, et Newton concourut à leur établissement. Première connaissance avec Locke. Huyghens présente à la Société Royale sa théorie de la double réfraction. Prorogation du Parlement.

48 ans (1690). — Lettre à Locke sur la corruption de deux passages de l'Ecriture. (*Historical account of two notable corruptions of Scripture.*)

49 ans (1691). — Lettre à Locke sur Daniel et l'Apocalypse.

51 ans (1693). — Commencement de sa maladie. Ecrit une lettre singulière à Samuel Pepys; demande à ne plus être de ses connaissances. Se plaint de ne plus manger ni dormir.

51 ans (1693). — Lettre à Pepys sur le problème des chances.

52 ans (1694). — David Gregory vient à Cambridge consulter Newton. — 1[er] septembre. Visite Flamsteed à Greenwich qui lui montre cent cinquante observations de la lune. Correspondance entre eux. Lettre à Flamsteed: équation parallatique de la lune. Lettre à Flamsteed :

équation lunaire du soleil. Tables de réfraction. Moyen mouvement des satellites de Jupiter.

53 ans (1695). — Tables des réfractions terminées. Parallaxe horizontale de la lune; équation de l'apogée et de l'excentricité.

54 ans (1696). — Est nommé intendant de la Monnaie (*wardenship*) par le ministre comte d'Halifax, ami de la nièce de Newton, devenue épouse de Conduitt.

55 ans (1697). — Solution de deux problèmes de Bernoulli.

57 ans (1699). — Associé étranger à l'Académie des Sciences.

58 ans (1700). — Mémoire sur l'équinoxe vernal. Changement de calendrier.

59 ans (1701). — Échelle de chaleur. Elu par l'Université de Cambridge député au Parlement. Renonce à sa place de professeur et de fellow.

60 ans (1702). — *Lunæ theoria*, publiée dans l'*Astronomie* de Gregory.

61 ans (1703). — Président de la Société Royale.

62 ans (1704). — Miroir ardent. Publication de l'*Optique* en anglais.

63 ans (1705). — Actes de Leipzig. Expression équivoque. Commencement de la polémique. — Janvier. Nommé chevalier par la reine Anne; vient trop tard à Cambridge pour y soigner son élection. N'est pas renommé député au Parlement.

64 ans (1706). — Edition latine de l'*Optique*. Traduction de Samuel Clarke. Newton fait présent à Clarke de 500 liv. sterl. Moivre soigne et revoit la traduction.

65 ans (1707). — Coopère aux statuts de la chaire Plumian. Le Dr Plume, archidoyen de Rochester, prit tant de plaisir à la lecture du *Cosmotheoros* de Huyghens, qu'il légua 1800 liv. sterl. pour fonder une chaire d'astronomie à Cambridge. Cotes fut le premier professeur élu le 16 octobre 1707.

67 ans (1709). — Commencement de sa correspondance avec Cotes pour la 2e édition des *Principes*.

71 ans (1713). — 2e édition des *Principes*, au milieu de l'été. 1re édition du *Commercium epistolicum*.

72 ans (1714). — Longitude. Affaire des longitudes.

76 ans (1717). — Rapport sur la monnaie, par suite les guinées réduites de 21 sh. 6 d. à 21 sh.

79 ans (1718). — 2e édition de l'*Optique*.

79 ans (1721). — 3e édition de l'*Optique*.

80 ans (1722). — Attaque de la pierre.

82 ans (1724). — Lettre à Halley sur les comètes. Prépare une 3e édition des *Principes*.

83 ans (1725). — Attaque de goutte. Conversation avec Conduitt sur la formation des corps planétaires.

84 ans (1727, 2 mars). — La dernière fois à la séance de la Société Royale demande pourquoi l'astronome royal Halley n'a pas envoyé la copie de ses observations annuelles.

Mort le 20 mars entre 1 et 2 heures du matin, laissant une fortune évaluée à 81,821 liv. st. 16 sh. 10 deniers = 616,420 francs partagés entre huit parents; une bibliothèque de 4,000 volumes vendue 400 liv. ster., et 100 paquets de brochures.

(Extrait de *Correspondance of sir Isaac Newton, etc.*, by Edlestone; 1850.)

NOTICE HISTORIQUE
SUR LA RESOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

D'APRÈS COSSALI, t. II, p. 96-184 (*).

Les Indiens, les Grecs et les Arabes savaient résoudre les équations binômes du troisième degré. Cette résolution se ramène immédiatement à une simple division ou à une extraction de racine carrée ou cubique. On doit la résolution d'une équation trinôme du troisième degré (**) aux Italiens du XVI[e] siècle. L'histoire de cette découverte jette un grand jour sur les mœurs et l'état des mathématiciens du temps. Les combats singuliers apportés en Occident par les Barbares du Nord, qui se livrent malheureusement encore aujourd'hui dans les champs de l'hon-

---

(*) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra. Storia critica di nuova disquisitione analitiche e metafisiche arrichita di* D. Pietro Cossali, C. R. Deux volumes in-4. I[er] volume 1797, 396 pages. II[e] volume 1709, 492 pages. Dalla reale tipografia Parmense.

Le P. Cossali, de l'ordre des Théatins, né en 1748, est mort à Vérone en 1815.

(**) M. Libri cite une solution de l'équation du troisième degré contenue dans un manuscrit du XIV[e] siècle : solution fausse donnée par analogie avec la solution des équations du second degré. *Exemple* :

$$px^3 = ax + b,$$

on donne

$$x = \frac{a}{2p} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2p}\right)^2 + b}.$$

(*Hist. des Mathém.*, t. II, p. 213.)

La disparition de M. Libri est une perte déplorable. C'était un vrai savant.

neur (*), existaient aussi alors dans les champs de la science. On se portait des défis publics, non-seulement pour acquérir de la gloire, mais aussi dans l'intérêt de l'existence. Le vaincu, perdu de réputation, ne trouvait plus de disciples : tandis que le vainqueur était appelé par diverses cités à venir professer et à expliquer les auteurs classiques. Dès lors les inventeurs se gardaient bien de divulguer leurs découvertes; car, munis de ces armes secrètes, il trouvaient plus avantageux de proposer des questions dont la solution reposait sur l'objet de ces découvertes. Pourtant ce secret intéressé porta malheur, comme nous l'allons voir, au célèbre Tartaglia, véritable auteur des formules qu'on s'obstine à nommer *formules de Cardan.*

Paccioli, dans son ouvrage (**) qui a paru en 1494, au VIII[e] chapitre du VI[e] traité de la VIII[e] distinction, énumérant les équations biquadratiques, dit : *Ma de capitoli de numero cosa et cubo composte over de numero censo e cubo over de numero cubo e censo de censo non se possut finora troppo bene formare regole generali per la disproporzionalita fra loro, perche fra loro non*

(*) Dénomination dérisoire ! Comment un homme vivant sous l'empire de l'Évangile peut-il tenir à honneur de *tuer* son semblable pour se venger d'une injure consistant le plus souvent en une parole blessante. On ferait disparaître ce vestige de barbarie féodale, en le flétrissant par une perte des droits politiques, par une exclusion des fonctions publiques.

(**) *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita.* In-folio, écriture gothique. A la fin, on lit :

Con spesa e diligentia e opificio del prudente huomo Paganino de Paganini da Brescia : nella excelsa cita de Venezia, con gratia del suo excelso dominio che per anni x *proximi nell altro in quello la possi restampare ne altrove stampata in quello portarla sotto pena in ditta gratia contenuta negli anno de nostra salute* MCCCCXCIII *a li* 10 *de novembre, Augustino Barbadico, serenessimo principe di quello. — Frater Lucas de Burgo, sancti Sepulcri ordinis Minorum et sacre theologie humilis professor, suo parvo ingenio ignaris compatiens hanc Summam Arithmetice et Geometrie proportionumque et proportionalitatum edidit ac impressoribus assistens die noctuque pro posse manu propria castigavit. Laus Deo* (voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 39).

sono intervalli equali. Cela signifie en écriture moderne que les trois équations

$$n = ax + bx^3,$$
$$n = ax^2 + bx^3,$$
$$n = ax^3 + bx^4$$

ne peuvent encore *jusqu'aujourd'hui* être généralement résolues. Il donne une singulière raison de cette impossibilité : c'est qu'entre x et x^3 il y a un milieu, c'est x^2 (*media el censo*), tandis qu'entre le nombre et la chose x il n'y a pas de milieu.

Néanmoins, il ne croit pas à une impossibilité absolue. Aussi un nommé Scipion Ferro ou dal Ferro, né à Bologne où, au dire d'Alidosi et de Cardan, il enseignait les mathématiques, de 1496 à 1526, réussit à résoudre l'équation de la forme

$$x^3 + px = q,$$

et il en communiqua la pratique à son élève Antonio Maria Fiore ou del Fiore.

C'est tout ce qu'on sait de cette découverte, dont on ignore complétement la méthode. Il n'en est pas ainsi de la découverte de Tartaglia, sur laquelle on a beaucoup de renseignements donnés par lui-même dans son ouvrage : *Quesite et inventioni diverse.*

Ce sont des questions adressées à Tartaglia par diverses personnes, avec les réponses, le tout sous forme de dialogues. Les huit premiers livres roulent sur la balistique, la fortification, l'art militaire, la mécanique, etc. (*).

Le IXe et dernier livre porte pour titre : *Sopra la scientia arithmetica, geometrica et in la pratica speculativa de algebra et almucabala, volgarmente detta*

(*) La partie balistique a été traduite par M. Rieffel, professeur à l'École d'artillerie de Vincennes.

Regola de la cosa, over Arte maggiore et massime della inventione de Capitoli de cosa e cubo equal a numero, et altri suoi ederenti et dependenti, et simelmente de censi et cubi equal a numero et suoi dependenti, qualli dalli sapienti sono stati giudicati impossibili (*).

Cardan se sert aussi du mot *capitulum* pour désigner une équation. On voit qu'il s'agit de la résolution des équations cubiques de ces deux formes

$$x^3 + px = q$$

et

$$x^3 + px^2 = q.$$

On arrangeait les équations de manière à ne renfermer que des termes positifs dans chaque membre, et une équation ainsi arrangée était considérée comme l'en-tête du problème, *Capitulum*.

Ce livre renferme quarante-deux questions; la quatorzième a été proposée en 1530 par Zuane de Torrini da Coi (**), qui tenait école d'arithmétique à Brescia. Il demande: 1° de trouver un nombre qui multiplié par sa racine augmentée de 3 fasse 5, et semblablement de trouver trois nombres tels, que le deuxième surpasse le premier de 2, que le troisième surpasse le deuxième de 2, et que le produit des trois nombres soit égal à 1000. Selon l'écriture actuelle, on parvient aux équations

$$x^3 + 3x^2 = 5,$$
$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1000.$$

Tartaglia répond qu'il possède une règle *générale* pour

(*) La première édition est de 1546, in-4. On lit à la fin :
Stampata in Venetia per Venturino Buffinelli ad instantia et requisitione et a proprie spese de Nicolo Tartalea Brisciano autore, nel mese de Luio, l'anno de nostre salute MDXLVI.

(**) Cardan le nomme da Colle et da Colla; Zuane pour Giovanne; les Vénitiens changent souvent le *g en z* ; *mazore* pour *maggiore*.

résoudre la question du cube et des *censi* égaux à un nombre; mais, pour plusieurs raisons, il veut, pour le présent, se taire (*per al presente voglio tacere per più respetti*); quant à la seconde question, il avoue ne pas en connaître la solution, mais qu'il est bien loin de la croire impossible, et commence par dire vertement à Zuano: « Je sais que les professeurs de Brescia vous craignent et vous fuient, parce que, pour vous faire passer pour un grand mathématicien, vous leur faites des questions que vous-même ne savez pas résoudre, et je parie dix ducats contre cinq qu'il en est ainsi de vos deux questions. C'est un procédé dont vous devriez rougir. » (*Et circa cio ve dovi resti alquanto a rossire.*)

Cette question XXV fut portée à Venise, où Tartaglia était professeur, par un nommé Antonio de Cellatica, et, dans sa question XXV, 10 décembre 1536, Tartaglia annonce qu'il a trouvé la solution de l'équation

$$x^3 + n = mx^2$$

le lendemain du jour où il a trouvé la solution de l'équation

$$x^3 + mx^2 = n.$$

Nous ferons observer une fois pour toujours que Tartaglia ne fait usage ni de nos signes ni de nos exposants. Comme les Arabes, il parle des *capitoli* et ne les écrit pas; dans son langage, la *cosa* c'est l'inconnue, le *censo* c'est le carré, et le *cubo* c'est le cube (*); ainsi, pour exprimer la dernière équation, il emploie cette locution: *cubo e censi egual a numero*, et ainsi des autres.

Cependant Antonio Maria del Fiore, ce disciple de Scipion Ferro dont nous avons parlé ci-dessus, se van-

(*) Cardan nomme aussi l'inconnue *res* et aussi *positio*, du verbe *ponere*; on ne posait que des quantités positives.

tait de venir humilier Tartaglia pour sa prétendue habileté dans la solution des problèmes. Tartaglia, sachant que del Fiore n'était qu'un arithméticien sans aucune connaissance théorique, ne tint aucun compte de ces vanteries; mais ayant appris que del Fiore était en possession de la règle générale de résoudre le *chapitre* (*capitole*) du *cube* et de la *chose* égale au nombre, qu'un grand maître lui avait enseigné, il y a une trentaine d'années, il commença à avoir des craintes, s'appliqua à ce *chapitre*, et parvint à en trouver la solution le 14 février 1535, et le lendemain il trouva la solution des équations

$$x^3 = px + q,$$
$$x^3 + mx^2 = n,$$
$$x^3 + n = mx^2$$

Bien lui en prit. Car, huit jours après cette découverte, le 22 février 1535, del Fiore vint à Venise où Tartaglia professait alors, et lui porta un défi public qui fut accepté. Del Fiore déposa chez le notaire Jacomo Zambelli trente questions et une certaine somme d'argent; Tartaglia en fit autant. Celui des deux qui, au bout de trente à quarante jours, aurait résolu le plus de questions serait déclaré vainqueur et gagnerait la somme déposée. Voici les trente questions de del Fiore, telles qu'elles sont énoncées dans la question XXXI des *Quesiti*.

1. Trouver un nombre qui ajouté à sa racine cubique fasse 6.

2. Trouver deux nombres en proportion double (x, $2x$) tels, que si l'on multiplie le carré du grand nombre par le plus petit nombre et qu'au produit on ajoute les deux nombres, on obtienne 40.

3. Trouver un nombre qui ajouté à son cube fasse 5.

4. Trouver trois nombres en proportion triple (x, $3x$, $9x$) tels, que le carré du plus petit multiplié par le plus

grand et ajoutant au produit le nombre moyen, la somme soit égale à 7.

5. Deux hommes mettent en société un capital de 900 ducats; le premier met la racine cubique du second. Quelle est la part de chacun?

6. Deux hommes gagnent ensemble 100 ducats; le gain du premier est la racine cubique de la part du second.

7. Trouver un nombre qui ajouté à deux fois sa racine cubique fasse 13.

8. Trouver un nombre qui ajouté à trois fois sa racine cubique fasse 15.

9. Trouver un nombre qui ajouté à quatre fois sa racine cubique fasse 17.

10. Partager 14 en deux parties dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

11. Partager 20 en deux parties dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

12. Un joaillier vend un diamant et un rubis pour 2,000 ducats; le prix du rubis est la racine cubique du prix du diamant.

13. Un juif prête un capital à cette condition qu'à la fin de l'année on lui payera pour intérêts la racine cubique du capital. A la fin de l'année, le juif a reçu 800 ducats, capital et intérêt. Quel est ce capital?

14. Partager 13 en deux parties telles, que le produit de ces deux parties soit égal au carré de la plus petite partie multipliée par elle-même.

15. Quelqu'un vend un saphir pour 500 ducats et y gagne la racine cubique de son capital.

Les quinze autres questions reviennent à partager les nombres 7, 12, 9, 25, 26, 28, 27, 29, 34, 12, 100, 140, 300, 810, 700 chacun en deux parts dont l'une soit la racine cubique de l'autre.

On voit que toutes ces questions amènent à l'équation

$$x^3 + px = q.$$

Aussi Tartaglia les résolut toutes en moins de deux heures, et Fiore ne résolut aucune des trente questions posées par Tartaglia ; du moins il ne voulut pas communiquer ses solutions et ne s'en rapporter qu'au jugement de ses amis. C'était s'avouer vaincu. Tartaglia se contenta de la gloire et renonça au prix.

On ne connaît que les quatre premières des trente questions posées par Tartaglia. On les trouvera plus loin.

Tel est le récit que fait Tartaglia à Zuane di Coi (*quesito* XXV), mentionné ci-dessus, qui s'était rendu à Venise, le 10 décembre 1536, pour prier instamment Tartaglia de lui donner communication des trente questions qu'il avait proposées. Tartaglia dit qu'il n'en avait pas gardé de copie, mais qu'en allant chez le notaire et lui offrant une légère rétribution (*donate gli una gentilezza*), il en aurait une copie ; mais, en tout cas, il refuserait de donner les solutions, de crainte que ces solutions ne fassent trouver la règle. Toutefois, il lui donna les quatre premières questions.

1°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en la multipliant par sa racine carrée augmentée de 40, le produit soit égal à un nombre rationnel donné.

2°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en la multipliant par 30 moins la racine carrée de cette quantité, on obtienne un nombre rationnel donné.

3°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en y ajoutant quatre fois la racine cubique, on obtienne 13.

4°. Trouver une quantité irrationnelle telle, qu'en en soustrayant trois fois sa racine cubique, il reste 10.

Les autres questions sont restées inconnues, mais elles roulaient sur la géométrie, l'algèbre.

Zuane vit tout de suite, ce qui annonce même une certaine perspicacité, que la première question mène à l'équation

$$x^3 + mx^2 = n,$$

la deuxième à

$$m^2 x^2 = x^3 + n,$$

la troisième à

$$x^3 + mx = n,$$

la quatrième à

$$x^3 = mx + n.$$

Comme il était tard, Tartaglia l'engagea à rester avec lui à souper. Zuane lui dit qu'il était invité chez un sien cousin. Piqué de ce refus, Tartaglia lui dit : Attendez que le désir me vienne encore que vous restiez (*Aspetti quanto voglia, che voglio, che restati*).

Zuane se mit en vain l'esprit à la torture pour trouver les solutions, et il retourna le 16 décembre vers Tartaglia et renouvela ses supplications. Tartaglia lui dit que ses découvertes lui avaient coûté beaucoup de peines et qu'il ne se croyait pas tenu de les publier sans en tirer aucun honneur, aucun profit; qu'il savait d'ailleurs qu'il n'était pas licite de vouloir ensevelir totalement de telles inventions; que son intention était que, lorsqu'il aurait fini d'autres travaux (*), de tout publier. Pour montrer qu'il n'attachait pas une importance exagérée à ses découvertes, il fit cette offre à Zuane : « Pour chaque problème que vous me donnerez et avec la solution, si je n'ai pu la trouver, je vous donnerai en échange une de mes formules générales. » Zuane accepta et proposa tout de suite ces deux questions : 1° dans tout triangle rectangle la somme des deux côtés de l'angle droit est égale à l'hypoténuse plus le diamètre du cercle inscrit; 2° dans un triangle ABC on a AB = 13, BC = 14, CA = 15;

(*) Il était occupé à traduire Euclide.

sur la hauteur AD, on prend dans l'intérieur DF = 3; on mène la droite BF et on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre AC en E. Trouver les segments AE et CE (*). Tartaglia lui répond : « Tout cela est si facile, que si vous me donnez une heure de temps, je vous en donnerai la solution. A cette occasion je vous rappellerai que l'année dernière me furent apportées de votre part trois questions, dont l'une était ainsi conçue : Trois hommes ont acheté chacun une certaine quantité de livres de viande dont la somme est 20 livres; la quantité moyenne est égale au produit des extrêmes, et le produit des deux moindres quantités est 8; et, selon votre habitude, vous ne pouvez en savoir la solution puisqu'elle est impossible (**) ». Enfin vaincu par les prières et les serments, Tartaglia lui donna la solution de sa première question pour le cas particulier où le nombre rationnel est 2888, et il lui dit qu'alors la quantité irrationnelle x^2 est $78 - \sqrt{308}$; en effet, on parvient à l'équation

$$x^4 + 40x^2 = 2888$$

et

$$x = -1 + \sqrt{77}.$$

De retour à Brescia, Zuane réfléchissant sur cette solution, en trouva de semblables; ainsi il trouva pour l'équation $x^4 + 8x^2 = 72$,

$$x^2 = 14 - \sqrt{52}, \quad x = -1 + \sqrt{13},$$

et pour l'équation $x^4 + 72 = 8x^2$

$$x^2 = 14 + \sqrt{52}, \quad x = 1 + \sqrt{13}.$$

(*) Il suffit de prendre un triangle dont les trois côtés et l'aire soient rationnels; alors les hauteurs et les segments formés par ces hauteurs sur les côtés sont rationnels. Posons

$$pq = PQ;$$

les trois côtés sont $p^2 - q^2 + P^2 - Q^2$, $p^2 + q^2$, $P^2 + Q^2$.

(**) Cette question exige la résolution d'une équation du quatrième degré.

Sa solution de l'équation

$$x^3 + mx^2 = 4$$

revient à prendre

$$x^2 = 2m - 2 - \sqrt{4(2m - 2 - 1)};$$

c'est le cas particulier où l'on aurait dans l'équation $x^3 + n = mx^2$:

$$n = \pm 2m^2 \mp 8m \pm 8;$$

on part d'une forme de la racine pour trouver l'équation correspondante à cette racine (*). Enflé de cette prétendue découverte, Zuane écrit à Tartaglia, en date du 8 janvier 1537, une lettre d'une extrême insolence, déniant la primauté de ses découvertes, et dit qu'en donnant cinq sols pour chacune de ses trente réponses à del Fiore, elles auraient été très-bien payées. Tartaglia dédaigna de répondre; mais Zuane étant revenu à la charge le 17 février 1537, Tartaglia lui annonça qu'il eût à cesser toute correspondance, et que s'il veut obtenir des explications, il n'avait qu'à se rendre de sa personne à Venise.

Ici finit la première partie de la vie militante de Tartaglia. Dans la seconde partie, la plus célèbre, il eut à lutter contre un homme de science universelle, d'un génie souvent très-pénétrant, d'une extravagance souvent gigantesque, muni de beaucoup de ruse, d'astuce et de peu de conscience : tel était Cardan. Tandis que Tartaglia, enfoncé dans Euclide et Archimède, d'un caractère candide, croyant naïvement que dans les affaires du monde la ligne droite est la plus courte, devait succomber, et il a succombé.

(*) Tartaglia ne fait pas cette observation, d'où Cossali est tenté de croire qu'à la fin de 1536 il ne possédait pas encore de règle générale. Mais sans la connaissance de cette règle générale, comment aurait-il pu, en moins de deux heures, résoudre les trente questions de del Fiore?

Zuane venait de quitter Brescia pour se transporter à Milan, où il fut bien accueilli de Cardan qui lui céda même un de ses cours. Il l'entretint de Tartaglia et de son invention. Cardan, occupé de publier son *Ars magna,* et vivement excité pour le duel algébrique de Tartaglia et de del Fiore, voulait enrichir son ouvrage de la découverte de la nouvelle invention. Il chargea un libraire, Zuan Antonio de Bassano, de prier de sa part Tartaglia :

1°. De lui envoyer la résolution de l'équation

$$x^3 + px = q;$$

2°. De vouloir bien lui résoudre les sept questions suivantes :

1. Partager 10 en quatre parties proportionnelles dont la première soit 2.

2. Partager 10 en quatre parties proportionnelles dont la seconde soit 2.

3. Trouver quatre nombres en proportion continue dont le premier soit 2 et dont la somme du second et du quatrième fasse 10.

4. Trouver quatre nombres en proportion continue dont le premier soit 2 et dont la somme du troisième et du quatrième fasse 10.

5. Trouver six nombres en proportion continue dont le second soit 2 et dont la somme du premier et du quatrième fasse 10.

6. Partager 10 en trois nombres continuellement proportionnels et dont le produit du premier par le second fasse 16.

7. Trouver un nombre qui multiplié par sa racine carrée augmentée de 3 fasse 21.

Ces questions amènent respectivement aux équations:

1. $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 10.$
2. $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 10x.$
3. $2x^3 + 2x = 10.$
4. $2x^3 + 2x^2 = 10.$
5. $2x^3 + 2 = 10x.$
6. $x^4 + 8x^2 + 8^2 = 10x^3.$
7. $x^3 + 3x^2 = 21.$

Cardan promit d'insérer la solution du cube et de la chose égale au nombre dans son ouvrage sous le nom de Tartaglia, ou bien, si tel est son désir, de garder le secret.

C'est l'objet de la question (*quesito*) XXXI du 2 janvier 1539.

Le libraire, pour appuyer sa demande, fit ressortir la haute position médicale et géométrique de Cardan, qui faisait à Milan un cours public sur Euclide avec tant d'éclat, que le marquis del Vasto l'en avait récompensé et qu'il était maintenant sur le point de publier un bel ouvrage sur la pratique de l'arithmétique et de la géométrie. Tartaglia répond que lui-même projetait un ouvrage sur l'algèbre, et qu'il préférait publier ses découvertes dans son propre ouvrage que dans celui d'autrui; qu'il ne donnerait pas ses trente solutions, parce qu'elles serviraient, à un savant homme comme Cardan, à trouver la règle; quant aux sept questions, elles ont été évidemment dictées par da Coi, maintenant à Milan; les deux dernières sont les mêmes que celles que da Coi lui a adressées il y a une année; qu'il est impossible qu'on ait la solution à Milan, puisqu'on n'y sait pas même *le cube et la chose égale au nombre*, et les sept questions mènent à des équations (*capitoli*) beaucoup plus compliquées. Il donna au libraire copie des questions de del Fiore et renvoya pour les siennes chez le notaire.

Cardan, irrité de ce refus et de cette allégation, écrit, le 12 février 1539, une lettre dictée par le ressentiment et la colère. Il lui reproche d'être, non moins que Zuano, un présomptueux, d'avoir la folie de se croire quelque chose d'important, qu'il n'est pas au sommet de la montagne, qu'il n'est qu'au pied, dans la vallée, et autres reproches semblables. Ensuite il se résume en quatre points.

1°. Il trouve singulier que Tartaglia attribue ses sept questions à dal Coi (il le nomme Zuane Colle) : comme s'il n'y avait personne à Milan sachant en faire de semblables; lui, Cardan, le savait avant que del Colle sût compter jusqu'à 10, s'il est aussi jeune qu'il le dit.

2°. Que Tartaglia croit parler à des écoliers lorsqu'il prétend qu'une seule des trente questions d'Antonio étant résolue, les sept questions le sont également; que les trente questions se réduisent à la résolution de $x^3 + x = n$ (*) et non pas à $x^3 + mx = n$; qu'en voulant paraître merveilleux dans notre art auprès du libraire, il s'est montré ignorant auprès des connaisseurs; toutefois Cardan veut bien ne pas le croire ignorant, mais seulement présomptueux.

3°. Que Tartaglia avait dit au libraire qu'une des sept questions résolues, toutes le seraient : chose complétement fausse et injurieuse; qu'il parie 100 écus que Tartaglia n'est pas capable de réduire ses questions ni à une seule, ni à deux, ni même à trois. — Au fait, Tartaglia n'a rien dit de semblable au libraire. C'est de l'invention de Cardan pour avoir un prétexte de récriminer, ou bien le libraire n'a pas compris ce que Tartaglia lui a dit.

4°. C'est une question de balistique où Cardan et Tartaglia raisonnent d'après la physique du temps et se trompent l'un et l'autre.

(*) En style de Cardan : *La radice pronica media.*

Et il finit par lui adresser ces deux nouvelles questions :

1°. Partager 10 en quatre parties formant une proportion continue, telles que leurs carrés fassent ensemble 60; donné mais non résolu par fra Lucca (Paccioli).

2°. Deux hommes font société et chacun gagne le cube de la dixième partie de son capital.

Il déclare mettre les solutions sous cachet, et si Tartaglia ne sait pas les résoudre, on lui remettra les solutions à condition qu'il donnera une des solutions des sept questions.

Mais Tartaglia ne fut pas dupe cette fois-ci et lui dit nettement : Puisqu'il demande la solution de sa première question, c'est qu'il n'est capable d'en résoudre aucune. Il lui donne la solution de là première de ses deux dernières questions; mais, quant à la seconde, elle exige la solution de l'équation cubique et qu'il ne la donnera pas; que Cardan veut l'attraper comme font les Bohémiens (*come costumano le cingheni*).

Cependant il se montre plus libéral qu'envers del Coi, et lui indique dix des trente questions : d'abord les quatre déjà mentionnées ci-dessus, puis les suivantes :

1°. Couper une droite de longueur donnée en trois segments avec lesquels on puisse construire un triangle rectangle.

2°. Couper une pyramide tronquée en trois parties égales.

3°. Inscrire géométriquement un carré dans un triangle scalène.

4°. Un tonneau est rempli de vin pur; on en retire chaque jour deux seaux qu'on remplace par deux seaux d'eau; au bout de six jours, il y a moitié vin et moitié eau. Quelle est la contenance du tonneau?

Cardan voyant que ni les injures, ni les subterfuges ne pouvaient réussir, changea de plan, eut recours aux

louanges et au mensonge. Dans une lettre du 19 mars 1539, qui commence par *Messer Nicolo mio carissimo,* il lui dit qu'il ne doit pas prendre en mauvaise part ses observations. Il rejette le tort sur dal Colle (c'est ainsi qu'il nomme ici dal Coi), qui, venu à Milan, lui a donné une idée défavorable du caractère de Tartaglia, et se plaint de l'ingratitude de ce dal Colle qui a quitté brusquement Milan, abandonnant soixante élèves qu'il lui avait procurés. Enfin il termine sa missive par inviter Tartaglia à venir à Milan le plus promptement possible. Le marquis del Vasto, Mécène très-libéral, auquel il avait remis de la part de Tartaglia deux instruments de son invention, désirait ardemment l'entretenir. — Il est probable que tout ceci n'était qu'un stratagème. Quoi qu'il en soit, après avoir hésité quelques instants, Tartaglia se rendit à Milan et accepta un logement dans la maison de Cardan. Leur entretien du 29 mars 1539 est l'objet du *quesito* XXIX. Comme le dialogue est caractéristique, nous en donnons la traduction :

Cardan. Je suis bien aise que vous soyez venu au moment où le marquis est allé à Vigevano; cela nous permettra de causer et de raisonner ensemble de nos affaires jusqu'à son retour. Certes, vous vous êtes montré de par trop peu complaisant de n'avoir pas voulu me donner la règle que vous avez trouvée sur l'équation (*il capitolo*) de la chose et du cube égal au nombre, lorsque je vous en ai si instamment prié.

Nicolo Tartaglia. Je vous dirai que j'ai fait l'avare non pas tant pour cette simple équation et pour les choses qu'elle m'a fait trouver, mais pour celles que cette équation doit faire découvrir; car c'est une clef qui ouvre la voie à l'investigation d'une infinité d'autres équations, et si je n'étais pas occupé aujourd'hui à traduire Euclide (je suis déjà arrivé au XIIIe livre), j'aurais déjà trouvé une

règle générale pour beaucoup d'autres équations; mais dès que j'aurai terminé mon travail sur Euclide, j'ai dessein de composer un ouvrage de pratique, avec une nouvelle algèbre, dans laquelle je publierai non-seulement mes inventions sur les nouvelles équations, mais beaucoup d'autres que j'espère découvrir, et je veux même encore montrer le moyen d'en découvrir beaucoup d'autres, ce qui, j'espère, sera une chose très-utile, très-belle. Et ce qui fait que je refuse de la communiquer à qui que ce soit, c'est qu'en ce moment je ne puis y donner aucun soin (comme je l'ai dit, étant occupé d'Euclide). Et si je l'enseignais à quelque esprit spéculatif (comme est Votre Excellence), il pourrait facilement découvrir d'autres équations et les publier comme de son invention, ce qui gâterait complétement mon affaire. C'est là la cause qui m'a forcé d'être si impoli envers Votre Excellence: d'autant plus qu'elle est occupée à imprimer un ouvrage sur une semblable matière et qu'elle m'a écrit vouloir insérer mes inventions sous mon nom dans cet ouvrage.

Cardan. Mais je vous ai écrit aussi que si vous n'êtes pas content, je m'engage à tenir la chose secrète.

N. Tartaglia. Quant à cela, il m'a été impossible de vous croire.

Cardan. Je vous jure sur les saints Evangiles de Dieu et comme vrai homme d'honneur que si vous m'enseignez vos inventions, non-seulement je ne les publierai jamais, mais encore je les noterai pour moi en chiffres, afin qu'après ma mort personne ne puisse les comprendre. Si vous voulez maintenant me croire, croyez-le; sinon, laissons cela.

N. Tartaglia. Si je n'ajoutais pas foi à un tel serment, je mériterais certainement d'être regardé comme un homme sans foi; mais j'ai résolu d'aller à Vigevano pour trouver monsieur le marquis, parce que voilà déjà trois

jours que je suis ici et que je m'ennuie d'attendre; à mon retour, je vous promets de vous découvrir tout.

CARDAN. Puisque vous allez voir monsieur le marquis, je veux vous donner une lettre (*) afin qu'il sache qui vous êtes; mais avant de partir, je veux que vous me montriez la règle que vous m'avez promise.

N. TARTAGLIA. J'y consens. Mais sachez que pour pouvoir en toute occasion imprévue me rappeler mes opérations, je les ai mises en vers; si je n'avais pas pris cette précaution, elles me seraient souvent sorties de la mémoire; et quoique ces vers ne soient pas très-bons, peu m'importe: il suffit qu'ils me servent à me rappeler la règle chaque fois que j'en ai besoin. Je veux vous en donner une copie par écrit, afin que vous soyez bien sûr que je vous ai bien donné mon invention telle qu'elle est.

1. *Quando chè'l cubo con le cose appresso,*
Se aggaglia a qualche numero discreto,
Trovati dui altri differenti in esso.

2. *Dapoi terrai questo per consueto*
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose netto.

3. *El residuo poi suo generale*
Delli lor lati cubi ben sottrati
Vorra la tua cosa principali.

4. *In el secundo de cotesti alti,*
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest'altri contratti.

5. *Del numer farai due, tal part'a volo*
Che l'uno e l'altro si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stelo.

6. *Delle qual poi, per commun precetto,*

(*) Cela montre bien que le désir du marquis de voir Tartaglia est une pure invention de Cardan.

Torrai li lati cubi insieme gionti,
Et cotal somma sarà il tuo concetto.

7. *El terzo poi de questi nostri conti*
Se solve con secondo, se ben guardi
Che ser natura son quasi congionti.

8. *Questi trovai, et non con passi tardi*
Nel mille cinquencente quatro et trenta
Con fundamenti ben saldi e gagliardi,
Nel città dal mar intorno centa.

Nous allons essayer une traduction avec l'explication qui la rende intelligible.

1. Quand le cube joint avec les choses,
Égalent quelque nombre donné,
Trouve deux autres dont la différence tienne lieu du nombre.

Explication. Soit

$$x^3 + px = q,$$

posons

$$t - u = q.$$

2. Après tu feras, selon l'usage,
Que leur produit soit toujours égal
Au cube du tiers des choses.

Explication. Pose

$$ut = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = \frac{1}{27}p^3.$$

3. Ensuite le résidu général
Des côtés de leurs cubes
Donnera ton inconnue principale.

Explication.

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u},$$

t et u sont inconnues auxiliaires, x est l'inconnue principale.

4. Dans la seconde de ces opérations,
Lorsque le cube reste seul,
Tu observeras ces autres préceptes.

Explication. Lorsque $x^3 = px + q$.

5. Du nombre, fais deux parts de manière
Que l'un et l'autre produisent exactement
Le cube du tiers de la chose.

Explication.

$$t + u = q, \quad tu = \left(\frac{1}{3}p\right)^3.$$

6. Ensuite par un précepte connu
Tu mettras ensemble les côtés des cubes
Et cette somme sera ce que tu cherches.

Explication.

$$x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}.$$

7. Puis la troisième de ces opérations
Se résout par la seconde, si tu remarques bien
Qu'elles sont quasi conjointes par leur nature.

Explication.

$$x^3 + q = px;$$

elle se déduit de la seconde $x^3 = px + q$ en prenant q négativement.

8. J'ai trouvé ces choses, non à pas tardif,
En mil cinq cent trente-quatre,
Sur des fondements solides et vigoureux,
Dans la cité entourée de la mer.

Cela est si clair, que, sans autre exemple, je crois que Votre Excellence comprendra le tout.

CARDAN. Je l'ai quasi compris jusqu'à présent; partez, et, lors de votre retour, je vous ferai voir si je l'ai compris.

N. TARTAGLIA. Maintenant qne Votre Excellence s'applique à ne pas manquer à la foi promise, car si, par malheur, Votre Excellence manquait de foi envers moi, soit en imprimant dans votre ouvrage, soit autrement,

même en y mettant mon nom et me proclamant l'inventeur, je vous promets et vous jure que je ferai imprimer immédiatement après quelque chose qui ne vous sera pas très-agréable.

CARDAN. Ne doutez pas que je ne tienne ce que je vous ai promis. Allez et soyez tranquille. Donnez cette lettre de ma part au marquis.

N. TARTAGLIA. Je me recommande.

CARDAN. Bon voyage.

N. TARTAGLIA (*à part*). Par ma foi! je n'irai pas à Vigevano, mais je veux retourner tout de suite à Venise, advienne que pourra.

Ici se termine le *quesito* XXXIV.

9 avril. Dans le *quesito* suivant, Cardan lui témoigne sa surprise de ce qu'il a subitement quitté Milan sans voir le marquis, seigneur si généreux et qui était revenu pour le Samedi Saint; lui annonce que son ouvrage, presque terminé, paraîtra la semaine prochaine; et il finit par cette prière : « J'ai trop présumé de mes forces : je ne comprends pas entièrement votre règle et vous prie de m'envoyer la solution de cette équation $x^3 + 3x = 10$. » A cela Tartaglia répond, le 23 avril, qu'il avait promis à ses amis d'être sans faute de retour à Venise pour le Samedi Saint, et que Cardan s'est trompé sur le sens du dernier vers du second tercet en posant

$$ut = \frac{1}{3}p^3,$$

tandis qu'il faut poser

$$ut = \left(\frac{1}{3}p\right)^3,$$

alors

$$t = \sqrt{26} + 5 \quad \text{et} \quad u = \sqrt{26} - 5,$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}}.$$

Il résout de même l'équation

$$x^3 + x = 11,$$

mais ne fait aucune mention de la multiplicité des racines.

12 mars. Cardan lui envoie son premier ouvrage d'algèbre avec prière de ne pas trop le répandre pour ne pas nuire au libraire, et renouvelle sa promesse de ne pas parler des découvertes de Tartaglia.

27 mars. Réponse de Tartaglia qui s'excuse sur ses occupations et sur une indisposition de n'avoir pu que jeter les yeux sur l'ouvrage de Cardan et y signale pourtant une grosse erreur sur une règle pour extraire la racine cubique par approximation. Cardan pose

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2}.$$

10 juillet. *Quesito* XXXVII. Maphio Paviciani, un disciple de Tartaglia, résidant à Bergame, lui écrit qu'un de ses amis de Milan lui annonce que le médecin Cardan avait publié un second ouvrage d'algèbre où il a parlé de nouvelles équations qui ne sont probablement pas autres que celles de Tartaglia.

19 juillet. Tartaglia répond qu'en effet ces équations nouvelles ne peuvent être autres que les siennes; qu'il en est extrêmement contrarié, et que le proverbe ne ment pas qui dit : *Quello che tu non voi che si sappia, nel dire ad alcuno.* (Ce que tu ne veux pas que l'on sache, ne le dis à personne.)

4 août. *Quesito* XXXVIII. Cardan se plaint de ce que Tartaglia a laissé sans réponse plusieurs de ses questions; qu'il comprend bien la règle, mais qu'il ne sait plus s'en tirer lorsque le cube du tiers de la chose surpasse le carré de la moitié du nombre, et lui demande la résolution de

l'équation

$$x^3 = 9x + 10.$$

C'est ce qui est devenu si célèbre sous le nom de *cas irréductible*. La racine — 2 se présente sous une apparence irrationnelle. Quant à l'extraction de la racine cubique par approximation (*voir* ci-dessus), il y a dans son ouvrage d'autres règles pour cela et qui sont très-exactes.

7 août. Tartaglia ne pouvant résoudre la difficulté et déjà irrité, fait une réponse assez impertinente; veut faire accroire à Cardan qu'il applique mal la règle et lui dit que ses secondes règles d'approximation ne valent pas mieux que la première.

18 octobre. Cardan écrit : Tartaglia a-t-il perdu l'esprit, peut-être à force d'étudier et de lire? que lui est sûr de bien comprendre la règle; il veut parier 100 écus contre 25 qu'il sait résoudre l'équation

$$x^3 = 12x + 20.$$

Tartaglia ne veut plus répondre.

5 janvier 1540. *Quesito* XL. Cardan avertit *fraternellement* (*quanto fratello*) Tartaglia que ce diable de Zuane dal Colle (*quel diavolo de messer Zuane Colle*) vient encore d'arriver à Milan, ayant appris que je voulais lui céder un de mes cours, celui d'Arithmétique; se croyant un homme fort, je l'ai examiné et ne le trouve pas ce qu'il croit être; je vous avertis qu'il possède votre équation de la chose et du cube égal au nombre et celle de la chose et du nombre égal au cube, et se vante que, lors de son séjour à Venise, il est entré en discussion avec del Fiore, et, par cette voie, il est parvenu à ce qu'il cherchait; la discussion lui a fait connaître la nature de l'équation, et, après diverses conjectures, aidé d'un de ses compagnons, il a trouvé la solution. Sachez qu'il a encore trouvé la racine cubique de $10 + \sqrt{108}$; elle est égale à

$1 + \sqrt{3}$; et aussi

$$\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt{3} - 1,$$

et de là

$$\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} - \sqrt[2]{10 - \sqrt{108}} = 2.$$

Je vous engage à chercher la règle, je n'ai pas pu la trouver. Je vous avertis encore qu'il a la solution de la question que j'ai faite de partager 10 en trois nombres formant une proportion continue et tels, que le produit du premier par le second fasse 8, et qu'il m'enseignera sa solution si je lui cède mon cours. Ainsi veuillez la chercher; j'avoue ne pouvoir la trouver, pas plus que la suivante que Zuane ne sait pas non plus : Trouver trois nombres en proportion continue tels, que la somme du premier et du troisième fasse 10 et que le produit du premier et du second fasse 7. Il dit avoir aussi la démonstration que le cercle contient une aire maxima entre toutes les figures de même contour; que cette proposition, qui se trouve peut-être dans Proclus ou dans Théon, lui a été enseignée par messer Philène, de Bologne. Il propose encore ce problème : Soit donné le rectangle ABCG et soit encore donné le centre D du rectangle; trouver sur le prolongement de AB un point F et sur le prolongement de AC un point E tels, que les trois points E, F, G soient en ligne droite et que DE soit égal à DF. Si l'on prend

$$AB = 2, \quad BC = 3,$$

quelle est la valeur de DE?

Cette lettre est suivie des observations de Tartaglia. « Je trouve, dit-il, que Cardan a un esprit plus obtus que je ne croyais. Zuane n'est pas venu pour qu'il lui cède son cours, mais pour le lui enlever. Cardan en a peur. Aussi Zuane lui en donne à garder lorsqu'il dit posséder la solution des équations (*capitoli*). L'extraction

de la racine cubique de $10 + \sqrt{108}$ ne présente pas de difficulté : il suffit de décomposer 10 en deux nombres dont l'un soit un cube et l'autre divisible par 3, et on trouve de même le *résidu* (*). »

Il découvre encore d'autres traces de simplicité dans la conduite de Cardan, et ses observations se terminent ainsi :

Et per questo non li voglio dar altra risposta per che è non vi ho piu affectione à lui che à messer Zuane, e pero li voglio lassar far tra loro; ma me la vedo che lui e perso d'animo, non so mo comme l'andera.

« C'est pour cela que je ne veux plus lui faire d'autre réponse, parce que je n'ai pas plus d'affection pour lui que pour messer Zuane ; je veux les laisser faire entre eux, mais je vois qu'il a perdu l'esprit et ne sais maintenant comment cela ira.

Depuis, toute correspondance cesse avec Cardan. Le pauvre Tartaglia croit que Cardan est la dupe de Zuane et il ne soupçonne pas d'être lui-même dupe de Cardan, qui fait intervenir ce Zuane pour se ménager un prétexte de dégager sa parole et d'être impunément parjure.

1541. Le *quesito* XLII a encore rapport à l'équation cubique. C'est un dialogue entre Tartaglia et un gentilhomme anglais nommé Ricardo Ventuorthe, son disciple et son ami (*compare*).

Tartaglia refuse de lui donner ses règles ; mais, après qu'il aura fini son travail sur Euclide et Archimède, il publiera un ouvrage qu'il dédiera à ce gentilhomme (**) et où toutes les règles seront développées et démontrées ; le

---

(*) Euclide nomme *binôme* les expressions $a + \sqrt{b}$ et *apotome* (segment) les expressions $a - \sqrt{b}$; de là en latin *recisus* et en italien *reciso;* c'est le *résidu* de Tartaglia.

(**) La première partie du *General Trattato* est en effet dédiée à ce gentilhomme, dont il vante les bienfaits qu'il en a reçus.

disciple consent d'attendre, mais demande au moins quelques exemples; Tartaglia donne les suivants :

$$x^3+6x^2=100,\quad x=\sqrt[3]{42+\sqrt{1700}}+\sqrt[3]{42-\sqrt{1700}},$$
$$x^3+9x^2=100,\quad x=-2+\sqrt{24},$$
$$x^3+3x^2=2,\quad x=-1+\sqrt{3},$$
$$x^3+7x^2=50,\quad x=-1+\sqrt{11}.$$

C'est pour avoir trouvé le premier exemple d'une vérification trop pénible, qu'il a donné les trois autres; et le gentilhomme ayant demandé un exemple de la forme

$$x^3+n=mx^2,$$

il lui donne

$$x^3+4=5x^2,\quad x=2+\sqrt{8},$$
$$x^3+6=7x^2,\quad x=3+\sqrt{15}.$$

Ventuorthe se montre satisfait et pense pouvoir, d'après ces solutions, trouver lui-même la règle. Tartaglia le dissuade de s'appliquer à de telles recherches qui sont très-fatigantes et sans résultats : on ne peut rien trouver par la voie des essais. Ces équations ont chacune deux solutions diverses et peut-être davantage, chaque solution nécessitera d'autres essais. Il l'exhorte à attendre patiemment la publication de son ouvrage. A cela, Ventuorthe dit qu'il est dur de croire que la même équation puisse avoir deux solutions et peut-être davantage. A cela Tartaglia répond :

Là è certo cosa dura a credere, et certamente se la sperientia non me ne facesse testimonianza, quesi che non il crederei.

« Certes la chose est dure à croire, et certainement si l'expérience n'en rendait témoignage, je ne le croirais presque pas. »

Il donne pour exemple l'équation

$$x^3+3x=14,$$

où l'on a évidemment $x = 2$ et cependant la règle donne

$$x = \sqrt[3]{7 + 41} - \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}},$$

solution différente de 2. Ici Tartaglia commet une erreur de calcul; il faut d'après sa règle

$$x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}},$$

et s'il s'était rappelé la règle donnée ci-dessus, il aurait trouvé

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2},$$

d'où

$$x = 2;$$

les deux autres racines sont

$$x = -1 \pm \sqrt{-6}.$$

Tartaglia ne mentionne nullement les racines imaginaires. Il paraît qu'il ne savait pas s'en rendre raison; en général, il n'avait pas une idée nette de la multiplicité des racines; mais il fait ici une observation importante: Il dit à son disciple que dans son ouvrage il fera voir que toutes les solutions des équations cubiques se ramènent à la solution des trois formes

$$x^3 + px = q, \quad x^3 + q = px, \quad x^3 = px + q,$$

généralisation qui indique un grand progrès analytique.

Tartaglia raconte encore dans le même *quesito* que dans la nuit de la Saint-Martin de 1536 qui était un samedi, étant au lit sans pouvoir dormir, il avait trouvé des règles pour

$$x^6 + fx^3 = 6, \quad x^6 = fx^3 + g, \quad x^6 + g = fx^3.$$

Il en indique les solutions à son disciple qui prend congé en promettant de lui écrire dès son retour en Angleterre, et Tartaglia lui dit :

Andati, messer compare, che Iddio va dia il buon

viaggo et vi prego che me scriveti subito, che vi seti aggiunto, come haveti detto.

« Allez, mon cher ami, que Dieu vous donne un bon voyage; et je vous prie de m'écrire dès que vous serez arrivé, comme vous l'avez promis. »

Le disciple répond : *Faro senza fallo.* (Je le ferai sans faute.)

Ce sont les derniers mots des *quesiti*. Nous voyons que Tartaglia avait l'affection de ses élèves ; c'est qu'il était lui-même très-affectueux.

Tartaglia, absorbé par sa traduction d'Euclide et par les corrections d'erreurs commises par les traducteurs d'Archimède, ne s'occupait des équations cubiques que de temps à autre, tandis que Cardan, aidé de son excellent élève Louis Ferraris (*voir* t. XI, p. 120), s'en occupant sans cesse, parvint à donner de l'extension aux règles de Tartaglia, à résoudre les équations du quatrième degré et à donner des éclaircissements sur la nature des équations. Il réunit toutes ces règles et ces connaissances nouvelles en une théorie qu'il publia en 1545 sous le titre : *Ars magna ;* il y joignit le livre *Regula aliza* (*) où il donne le cas irréductible. Le serment de foi prêté fut violé, et ce qui devait être écrit en chiffres pour être inintelligible après sa mort fut divulgué au monde entier par des milliers d'exemplaires imprimés. Non-seulement, il manqua de foi, mais même il ne fut pas entièrement juste envers Tartaglia. Il prétend qu'après d'instantes prières, il n'en avait reçu que la solution du cube et de la chose égale au nombre ; tandis que par les tercets rapportés ci-dessus il avait encore reçu les deux autres formes. Indigné d'une telle félonie, Tartaglia eut à soutenir, en 1547, une der-

(*) Cardan ne donne pas l'explication de ce mot.

nière lutte où pourtant il ne fut pas le provocateur. Voici comment il raconte ce fait dans son *General Trattato, etc.*, IIe partie, IIe livre, chapitre VII, § 7, imprimé en 1556.

« En 1547, Cardan et sa créature, Ludovic Ferraro, dans deux bulletins imprimés, me portèrent un défi. Je leur adressai trente et une questions, à condition qu'elles seraient résolues en quinze jours; passé ce délai, les solutions devaient être considérées comme non avenues. Ils restèrent deux mois sans donner signe d'existence, et puis ils m'envoyèrent trente et une questions sans me donner la solution d'aucune des miennes; d'ailleurs le terme fatal était dépassé de plus de quarante cinq jours. Je trouvai le jour même les solutions de dix, le lendemain de quelques autres, puis de toutes les autres, et, afin de ne pas dépasser l'intervalle de quinze jours, je me hâtai de les faire imprimer et de les envoyer à Milan. Pour cacher leur lenteur à répondre à mes questions ou du moins à quelques-unes, ils m'entretinrent d'autres choses pleines de longues sottises, et ce n'est qu'au bout de sept mois qu'ils m'envoyèrent une réponse publique, où ils se vantaient d'avoir résolu mes questions. D'abord, si même tout cela était vrai, ces solutions données si longtemps après le terme fixé n'étaient d'aucun mérite; ensuite la plus grande partie d'entre elles étaient complétement fausses. Désirant proclamer publiquement ces faussetés et me trouvant à Brescia, dans le voisinage de Milan, je m'y rendis et envoyai à tous les deux un cartel imprimé où je les invitais à se trouver vendredi prochain, 10 août 1548, à 10 heures, à l'église surnommée le jardin dit des Frères Zoccolanti, pour discuter publiquement mes réfutations de leurs prétendues solutions. Cardan, pour ne pas se trouver à l'examen, s'éloigna précipitamment de Milan, et, au jour fixé, Ferraro vint seul au rendez-vous, et accompagné

d'une foule d'amis et de plusieurs autres ; j'étais seul avec mon frère que j'avais amené avec moi de Brescia. Je me présentai en présence de toute cette multitude et commençai par exposer brièvement le sujet de la discussion et la cause de mon arrivée à Milan. Lorsque je voulus en venir aux réfutations des solutions, on m'interrompit pendant deux heures par des paroles et des gestes, sous prétexte qu'on devait choisir, en l'endroit même, un certain nombre de juges parmi les auditeurs présents, tous amis de Ferraro et à moi entièrement inconnus. Je ne voulus pas consentir à cette astuce, et dis que mon intention était que tous les auditeurs fussent juges, de même que ceux qui liront mes réfutations lorsqu'elles seront imprimées. Enfin ils me laissèrent parler, et, pour ne pas ennuyer l'auditoire, je commençai, non par des objets fastidieux sur les nombres et la géométrie, mais il me parut convenable de réfuter la solution d'une question sur le chapitre XXIV de la Géographie de Ptolémée, et je contraignis Ferraro à convenir publiquement qu'il s'était trompé. Voulant continuer, tous se mirent à crier que je devais maintenant parler de mes propres solutions obtenues en trois jours, des trente et une questions qui me furent proposées. J'eus beau objecter qu'on devait d'abord me laisser achever ce qui concernait mes réfutations, qu'ensuite j'aborderais ce qu'ils demandaient : ni raisonnements ni plaintes ne furent écoutés ; on ne me laissa plus parler, et on donna la parole à Ferraro, qui commença par dire que je n'ai pu résoudre la quatrième question sur Vitruve, et il s'étendit là-dessus jusqu'à l'heure du souper. Chacun vida le temple et s'en alla à la maison. »

Ainsi se termina ce duel, original même en ces temps.

Tartaglia s'éloigna tout de suite de Milan, et, craignant des violences, regagna Brescia par un chemin détourné.

Dans le *Trattato general*, III[e] partie, livre III, on lit vingt-deux des trente questions de Cardan, avec leurs solutions données par Tartaglia; il dit avoir des raisons pour ne pas envoyer à Cardan les solutions des huit autres. On y lit aussi les trente et une questions proposées par Tartaglia; la solution de la trente et unième et dernière question est la seule qui soit exacte. Il s'agit de trouver la valeur de x dans l'équation

$$27x^6 + 36x^5 + 54x^4 + 8x^3 = 1000,$$

ils extraient la racine cubique et trouvent $3x^2 + 2x = 10$, équation cubique, et Tartaglia ne manque pas de faire observer que c'est à lui qu'ils doivent cette solution.

Voici ce qui a occasionné le terrible échec de Cardan et de Ferrari : Les quinze livres d'Euclide renferment cinq cent quatorze propositions tant géométriques qu'arithmétiques. Ce nombre comprend cent cinq problèmes dont quatre-vingt-dix-huit sont géométriques; il y en a soixante-quinze sur un plan et vingt-trois dans l'espace. Or Tartaglia était parvenu à résoudre soixante-sept des problèmes plans à l'aide de la règle et d'une ouverture de compas invariable, et à démontrer l'impossibilité de construire ainsi les huit restants. Cardan, portant son défi, croyait que Tartaglia ne possédait que la règle du cube, et ne se doutait pas qu'il avait encore d'autres armes; la plupart de ses questions roulent sur cette méthode particulière de solution, à eux inconnue. Aussi furent-ils pris au dépourvu et honteusement vaincus: juste punition d'une trahison, utile, il faut en convenir, à la science; mais toutes les fois qu'une mauvaise action a de bons résultats, il faut en remercier la Providence et nullement l'auteur, qui reste toujours flétri. Tartaglia, sans avoir jamais manqué à l'honneur, n'est pas irréprochable. Sa découverte de 1530 n'est pas encore publiée par lui-même

en 1556. Il la tenait en réserve, comme il a été dit, pour son grand ouvrage *General Trattato,* divisé en six parties; or il est mort en 1556 pendant l'impression de la cinquième partie. La sixième partie, consacrée à l'algèbre, devait renfermer les règles pour la résolution de l'équation cubique. Curtio Trajano, libraire, qui a fait imprimer à Venise les cinq premières parties, chargea un savant mathématicien (*un dotto matematico*) de réunir et de mettre en ordre tous les manuscrits laissés par Tartaglia pour cette dernière partie. Or on n'a jamais imprimé que le premier livre de cette sixième partie, où l'on ne trouve que les règles pour les opérations algébriques et rien sur l'équation cubique. Le libraire a-t-il refusé les fonds pour imprimer le reste, ou le mathématicien s'est-il mal acquitté de sa besogne? Ce qui est certain, c'est que sans les traîtreuses révélations de Cardan, on serait resté encore longtemps sans savoir résoudre les équations cubiques, et, par conséquent aussi, les équations biquadratiques. En mathématiques, il ne faut, sous aucun prétexte, différer longtemps. Car ce que l'un découvre au Nord, un autre le découvrira au Midi, et, comme dit très-bien Arago, la priorité appartient à celui qui *publie* le premier; et dussiez-vous prouver invinciblement que vous avez eu la même idée il y a vingt ans, la réclamation est de nulle valeur, votre droit est périmé. Ce qui est arrivé à Tartaglia, et depuis à Newton pour le calcul infinitésimal, sont des enseignements que nos grands géomètres ne devraient pas oublier et qu'ils oublient toujours.

THÉORÈMES DE PASCAL ET DE BRIANCHON.

Dans l'ouvrage sur les *Méthodes en Géométrie* de M. P. Serret, on lit, page 19, une démonstration très-simple de ces deux théorèmes. Le savant auteur a trouvé depuis que de semblables démonstrations ont déjà été données par Dandelin dans les *Annales* de Gergonne (tome XVI).

Les observations de M. Serret sur la Note de M. Rouché relative au théorème de Legendre (*voir* page 354) seront insérées en 1857.

BIBLIOGRAPHIE.

RECUEIL D'EXERCICES SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL; par M. *F. Frenet*, ancien élève de l'Ecole Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. Ouvrage destiné aux élèves de l'Ecole Polytechnique, à ceux de l'Ecole Normale et aux auditeurs des cours de Mathématiques dans les Facultés des Sciences. Paris, 1856; in-8 de 220 pages, 2 planches lithographiées, chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 5 francs.

Nous nous empressons de dire que cet ouvrage important, dont nous rendrons compte, remplit son but. Les exemples sont puisés aux sources classiques; questions et solutions sont nettement rédigées, simplement résolues. En y joignant les excellents *Exercices de mécanique* de

M. l'abbé Jullien (*), les personnes qui se livrent aux hautes études auront un vade-mecum qu'on ne saurait trop leur recommander. Dans l'édifice mathématique, on ne connaît bien un étage qu'en habitant l'étage supérieur. C'est ce qu'on verra encore dans les exercices que M. Catalan va publier pour les classes des lycées.

FIBONACCI.

M. Baldassare Boncompagni vient de publier une seconde édition des *Opuscoli* du célèbre Pisan. (Firenze, 1856).

Nous avons parlé longuement (p. 1) de cette production qui fait époque dans l'histoire de la science et qui a attiré l'attention d'éminents géomètres. MM. A. Genocchi et Lebesgue avaient signalé quelques erreurs de copie et indiqué des corrections. Dans cette seconde édition, les erreurs ont disparu et l'on a admis les corrections. On a ajouté six nouvelles notes qui ne se trouvaient pas dans la première édition, et trois notes anciennes sont modifiées. De sorte que cette seconde édition est un nouveau service, un nouveau témoignage de la conscience scrupuleuse que le savant auteur met dans tous ses érudits travaux.

(*) 2 volumes in-8 chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 12 fr.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME II.)

Historique.

Bibliographie.

Biographie.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

ERRATUM.

Page 135, ligne 1 en rem., *au lieu de* 10,000 fr., *lisez* 100,000 fr.

FIN DU TOME II.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1857.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie,
Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME SEIZIÈME

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

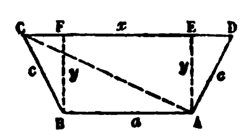
1857

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1856).



On donne la plus petite des deux bases AB, CD, *d'un trapèze* ABCD, *et la longueur des côtés non parallèles* BC, AD *supposés égaux entre eux : déterminer le maximum de l'aire du trapèze.*

Menons des points A, B les perpendiculaires AE, BF sur CD, et posons

$$AB = a, \quad BC = AD = c, \quad CD = x, \quad AE = BF = y.$$

L'aire du trapèze sera exprimée par $\left(\frac{x+a}{2}\right)y$. D'ailleurs les triangles rectangles ADE, BCF étant égaux entre eux, on aura

$$DE = FC,$$

et, par suite,

$$DE = \frac{CD - AB}{2} = \frac{x - a}{2}.$$

Ce qui donnera

$$y = \sqrt{c^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2 - (x-a)^2}.$$

De là résulte

$$\left(\frac{x+a}{2}\right) y = \frac{1}{4}\sqrt{(x+a)^2[4c^2 - (x-a)^2]}.$$

Il s'agit donc de trouver la valeur de x qui rend *maximum* le produit $(x+a)^2[4c^2 - (x-a)^2]$ que l'on peut écrire ainsi :

$$(1) \qquad (x+a)(x+a)(x+2c-a)(2c+a-x).$$

Cela posé, désignons par α, β, γ trois nombres quelconques et mettons le produit (1) sous cette forme :

$$\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+2c-a}{\beta}\right)\left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right) \times \alpha^2\beta\gamma.$$

Le nombre $\alpha^2\beta\gamma$ étant constant, il est clair que le maximum cherché correspond au maximum de

$$(2) \quad \left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+2c-a}{\beta}\right)\left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right).$$

Or, les valeurs des nombres α, β, γ étant arbitraires, on en pourra disposer de manière que la somme des quatre facteurs

$$\frac{x+a}{\alpha}, \quad \frac{x+a}{\alpha}, \quad \frac{x+2c-a}{\beta}, \quad \frac{2c+a-x}{\gamma},$$

soit constante, c'est-à-dire indépendante de x; il suffit, pour cela, d'attribuer aux nombres α, β, γ des valeurs telles, que le coefficient de x dans la somme dont il s'agit

soit nul. Ce qui donne

(3) $$\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{6}-\frac{1}{\gamma}=0.$$

Cette première condition étant supposée remplie, il faudra, pour que le produit (2) soit maximum, que ses facteurs soient égaux entre eux. On aura donc

(4) $$\frac{x+a}{\alpha}=\frac{x+2c-a}{6},$$

(5) $$\frac{x+a}{\alpha}=\frac{2c+a-x}{\gamma};$$

la valeur positive de x déduite du système des équations (3), (4), (5) représentera la plus grande des deux bases du trapèze maximum (*).

Des équations (4) et (5), on tire

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x+a}{x+2c-a}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x+a}{2c+a-x}\right);$$

et, en remplaçant $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{\gamma}$ par les expressions précédentes, dans (3), il vient

$$2+\frac{x+a}{x+2c-a}-\frac{x+a}{2c+a-x}=0,$$

d'où

$$2[4c^2-(x-a)^2]+2(x+a)(a-x)=0.$$

(*) Cette méthode élémentaire pour résoudre quelques questions relatives au maximum et au minimum d'une fonction d'une seule variable a été indiquée par M. Grillet, professeur au lycée de Brest (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 70). G.

En développant et réduisant, on trouve l'équation

(6) $$x^2 - ax - 2c^2 = 0,$$

dont la racine positive

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

est la plus grande des deux bases du trapèze cherché. Les quatre côtés du trapèze étant déterminés, il sera facile de le construire et d'avoir l'expression de sa surface en fonction des données a, c.

L'équation (6)

$$x^2 - ax - 2c^2 = 0.$$

donne

$$x(x - a) = 2c^2$$

ou

$$x\left(\frac{x - a}{2}\right) = c^2.$$

Or,

$$x = \mathrm{CD}$$

et

$$\frac{x - a}{2} = \mathrm{DE},$$

donc

$$\mathrm{CD} \times \mathrm{DE} = \overline{\mathrm{DA}}^2.$$

Cette dernière égalité montre que le triangle CAD est rectangle en A. Il s'ensuit que CD est le diamètre du cercle circonscrit au trapèze.

Lorsque $c = a$, la valeur de

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

se réduit à $2a$, les côtés CB, BA, AD sont égaux au rayon du cercle circonscrit au trapèze dont le diamètre est CD. Et chacun des deux angles DAB, ABC est égal à 120 degrés. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 345

(voir tome XV, page 383);

PAR M. DE ROCHAS,
Élève à l'école préparatoire de Sainte-Barbe (classe de M. Gerono),

ET M. GRELLEY,
Élève à la même école (classe de M. Vieille.)

$f(x) = 0$ est une équation à coefficients entiers; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a pas de racines entières. (GAUSS.)

Le polynôme $f(x)$ étant un polynôme algébrique entier, pourra se mettre sous la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

m étant un nombre entier. Nous aurons alors

$$f(0) = A_m$$

et

$$f(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + A_m,$$

$f(0)$ et $f(1)$ étant, par hypothèse, deux nombres impairs.

Supposons que l'équation

$$f(x) = 0$$

admette une racine entière a, elle sera paire ou impaire. Dans le premier cas, chacun des m premiers termes de $f(a)$ étant pair, puisque les coefficients sont entiers,

leur somme le sera aussi, et, par suite, cette somme augmentée d'un nombre impair A_m, ne pourra pas devenir nulle.

Dans le second cas, nous pourrons remarquer que les puissances du nombre a seront toutes impaires et que, par suite, chacun des m premiers termes de $f(a)$ étant de même parité que son coefficient, la somme de ces termes sera de même parité que la somme des m premiers coefficients. Mais cette somme est égale à $f(1)-f(0)$: elle est donc paire; par conséquent, la somme des m premiers termes de $f(a)$ sera paire comme dans le cas précédent et ne pourra pas être annulée par l'addition d'un nombre impair A_m.

Le nombre a, ne pouvant être ni pair ni impair, ne sera pas entier. C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA MÊME QUESTION 343

PAR M. P. R.,
Élève du lycée Bonaparte.

Soit

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0$$

le polynôme proposé. k étant un nombre entier quelconque, de même que k', on suppose que

$$f(0)=A_m=2k+1,$$
$$f(1)=A_0+A_1+\ldots+A_{m-1}+A_m=2k'+1.$$

Aucun nombre p entier mis à la place de x ne satisfait à l'équation

$$f(x)=0.$$

En effet, effectuons la substitution. Il vient

$$A_0p^m+A_1p^{m-1}+A_2p^{m-2}+\ldots+A_{m-1}p+A_m.$$

Si p est pair, tous les termes le sont, à l'exception de A_m; donc la somme algébrique de ces termes n'est pas nulle.

Si p est impair, la somme des termes

$$(1) \qquad A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_{m-1} p$$

est encore paire. Car

$$f(1) - f(0) = 2k - 2k' = 2(k - k').$$

Donc le nombre des coefficients impairs de (1) est pair. Donc leur somme algébrique est paire. La somme algébrique des termes de (1) à coefficients pairs est encore paire. Donc enfin le polynôme (1) est pair, et, par suite, le polynôme

$$A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_{m-1} p + A_m$$

n'est pas nul, puisque A_m est impair.

LETTRE SUR LA MÉTHODE DE M. PARMENTIER

(voir t. XIV, p. 370).

Je trouve dans vos *Nouvelles Annales* (octobre 1855) une formule nouvelle de M. Parmentier pour la quadrature des courbes planes. L'auteur affirme que cette formule est toujours préférable à celle de M. Poncelet, mais cette assertion ne me paraît pas fondée.

Considérons en effet une courbe tournant sa concavité vers l'axe des x. Je suppose la base du segment divisée en parties égales, et les trapèzes inscrits et circonscrits de M. Poncelet construits sur les divisions de la base. Soient A la somme des trapèzes inscrits, A' celle des trapèzes circonscrits et S l'aire exacte du segment. On a,

suivant les cas,

$$\frac{A+A'}{2} \gtrless S.$$

Je suppose $\frac{A+A'}{2}$ plus grand que S.

En comparant la formule de M. Parmentier à celle de M. Poncelet, on trouve

$$\frac{A+2A'}{3}-\frac{A+A'}{2}=\frac{A'-A}{6},$$

A' étant évidemment plus grand que A, on a

$$\frac{A+2A'}{3}>\frac{A+A'}{2}.$$

Donc, puisque, par hypothèse, la formule de M. Poncelet donne une valeur trop grande, celle de M. Parmentier sera moins approchée qu'elle.

En considérant une courbe qui tourne sa concavité vers le haut, on verrait de la même manière que toutes les fois que la formule de M. Poncelet est approchée par défaut, elle est plus exacte que celle de M. Parmentier.

Un Abonné.

RÉPONSE A LA PRÉCÉDENTE LETTRE.

Je vous renvoie la Note critique que vous m'avez communiquée relativement à ma formule de quadrature. Votre *abonné* dit : « L'auteur affirme que cette formule est toujours préférable à celle de M. Poncelet, mais cette assertion ne me paraît pas fondée. » D'abord je n'*affirme* rien, je *démontre* que lorsque les éléments dans lesquels

on partage la courbe sont assez petits, ma formule est beaucoup plus approchée que celle de M. Poncelet, et cette assertion n'est ni plus ni moins fondée qu'un théorème quelconque d'algèbre ou de géométrie. J'ai donc lieu d'être fort étonné de voir contester une chose évidemment incontestable par tous ceux qui ont compris les considérations analytiques qui m'ont conduit à modifier la formule de M. Poncelet, et je pourrais laisser sans réponse le singulier raisonnement de votre abonné. Je veux pourtant dire en quoi il pèche, ne fût-ce que pour l'édification personnelle de son auteur.

Considérant le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses, votre abonné dit que l'on a, suivant les cas,

$$\frac{A + A'}{2} \gtrless S,$$

et il prend le cas où $\frac{A + A'}{2} > S$. A partir de là son raisonnement est irréprochable, et il démontre que dans ce cas $\frac{A + A'}{2}$ est plus approché de S que $\frac{A + 2A'}{3}$, c'est-à-dire que la formule de M. Poncelet donne un résultat plus approché que la mienne. Il n'y a qu'un petit malheur à cela, c'est que le *cas* examiné par l'auteur ne peut jamais se présenter. Si votre abonné avait lu ma Note avec un peu plus d'attention, il aurait vu que je démontre (p. 379) que $S - A'$ est plus petit que $S - A$ (en valeur absolue), ou, en d'autres termes, que la somme des aires des trapèzes circonscrits est plus rapprochée de l'aire de la courbe que la somme des aires des trapèzes inscrits. Or, dans le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses, A' est plus grand que A, et comme S est plus approché de la plus grande de ces deux quantités, il s'ensuit que S est plus grand que leur moyenne arithmétique,

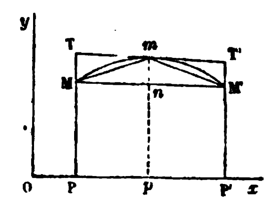
et que l'on a

$$\frac{A + A'}{2} < S.$$

Votre abonné part donc d'une hypothèse absurde en posant

$$\frac{A + A'}{2} > S.$$

Avant d'établir par des considérations de séries que S — A est plus grand que S — A' (en valeur absolue), j'avais dit (p. 372) qu'il est facile de voir *par de simples considérations géométriques* que la somme des aires des trapèzes circonscrits conduit à un résultat plus approché que celle des trapèzes inscrits, mais je n'avais pas cru devoir démontrer cette proposition élémentaire. Comme votre abonné ne s'en est pas rendu compte, ce qui l'a fait tomber dans son raisonnement paradoxal, je répare ici cette omission.



Soit

$$Pp = pP'.$$

Il s'agit de démontrer que la différence entre l'aire inscrite et la courbe est plus grande que celle entre l'aire circonscrite et la courbe, ou que le segment curviligne MmM' est plus grand que la somme des segments curvilignes $MTm + mT'M'$.

Menons les cordes Mm et mM'. Il est facile de voir

que le triangl MmM' est égal à la somme des triangles $MTm + mT'M'$. En effet, on a

$$\text{triangle } MmM' = \frac{MM' \times mn}{2} = Pp \times mn,$$

$$\text{triangle } MTm = \frac{MT \times Mn}{2} = Pp \times \frac{MT}{2},$$

$$\text{triangle } mT'M' = \frac{M'T' \times M'n}{2} = Pp \times \frac{M'T'}{2},$$

et somme des triangles

$$MTm + mT'M' = Pp\frac{(MT + M'T')}{2} = Pp \times mn,$$

même expression que pour le triangle MmM'.

Or l'aire curviligne MmM' est évidemment plus grande que le triangle MmM', et la somme des aires curvilignes $MTm + mT'M'$ plus petite que la somme des triangles de même nom. Donc, enfin, l'aire curviligne MmM' est plus grande que la somme des aires curvilignes

$$MmT + mT'M' \ (*).$$

(*) Je profite de cette occasion pour dire aux lecteurs des *Nouvelles Annales* qu'étant devant Sébastopol lors de l'impression du numéro d'octobre 1855, je n'ai pu surveiller moi-même la correction des épreuves, et pour les prier de vouloir bien corriger eux-mêmes plusieurs fautes essentielles signalées dans les *errata* du numéro.

THÉODORE PARMENTIER.

SOLUTION DE LA QUESTION 340

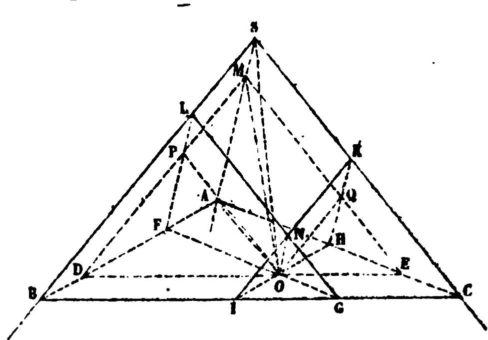
(voir page 29);

PAR M. CH. MOREAU,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Soient donnés un angle trièdre de sommet S et un point fixe O par lequel on mène un plan coupant les faces de l'angle suivant le triangle ABC; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles; ν_1, ν_2, ν_3 étant les valeurs de trois pyramides ayant pour bases ces parallélogrammes et S pour sommet commun, la somme

$$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}$$

est contante, de quelque manière qu'on mène le plan coupant par le point fixe O.



Je mène par le point O trois plans OM, OK, OL respectivement parallèles aux trois faces de l'angle trièdre,

le plan OM coupe SA en M, le plan OK coupe SC en K et le plan OL coupe SB en L : ces trois plans coupent le plan ABC suivant les trois droites DE, FG, IH menées parallèlement aux côtés du triangle ABC, savoir DE parallèle à BC, FG parallèle à AC, IH parallèle à AB, et, de plus, ils forment un parallélipipède avec les trois faces de l'angle trièdre.

Considérons maintenant la pyramide ayant pour base le parallélogramme OFAH et pour sommet S; elle peut être regardée comme la somme de deux pyramides ayant pour bases le même triangle SAO et pour hauteurs les distances des points F et H à ce plan. On aura donc, en appelant f et h ces deux distances,

$$\text{SAFOH} = \frac{1}{3} \times \text{SAO} \times (h + f).$$

La pyramide SMPOQ aura de même pour mesure

$$\text{SMPOQ} = \frac{1}{3} \times \text{SOM} \times (p + q),$$

en appelant p et q les distances des points P et Q au plan SOM.

Or on a

$$f = p, \quad h = q,$$

car les lignes FP et HQ sont parallèles à SA, et, par suite, au plan SAO. On a donc

$$\frac{\text{SAFOH}}{\text{SMPOQ}} = \frac{\text{SAO}}{\text{SOM}} = \frac{\text{SA}}{\text{SM}};$$

on tire de là, en posant $\text{SAFOH} = v_1$,

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{\text{SMPOQ}} \times \frac{\text{SM}}{\text{SA}}.$$

On démontrera de même que l'on a

$$\frac{1}{SBIOD} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{SLPON} \times \frac{SL}{SB}$$

et

$$\frac{1}{v_3} = \frac{1}{SKNOQ} \times \frac{SK}{SC}.$$

Or

$$SMPOQ = SLPON = SKNOQ,$$

car chacune de ces trois pyramides est le tiers du même parallélipipède SLNKMPOQ; on a donc, en appelant v le volume de l'une de ces pyramides,

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{v}\left(\frac{SM}{SA} + \frac{SL}{SB} + \frac{SK}{SC}\right).$$

Or

$$\frac{SL}{SB} = \frac{CG}{CB}, \quad \frac{SK}{SC} = \frac{BI}{BC},$$

donc

$$\frac{SL}{SB} + \frac{SK}{SC} = \frac{CG + BI}{BC} = \frac{BE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AS};$$

comme il faut encore y ajouter le rapport $\frac{SM}{SA}$, on a

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{v}\left(\frac{AM}{AS} + \frac{MS}{AS}\right) = \frac{1}{v}.$$

Donc la somme des inverses de ces trois pyramides est constante et égale à l'inverse de l'une des pyramides SMPOQ ou à trois fois l'inverse du parallélipipède OS.

Note. Prochainement une solution trigonométrique de M. Richard Oxamendy.

SOLUTION DE LA QUESTION 346

(voir tome XV, page 387);

PAR M. G. FORESTIER,
Élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
(classe de M. Briot).

Soient a, b, c,..., f, n arcs du premier quadrant; je supposerai que a est le plus grand de ces arcs et que f est le plus petit. Nous avons

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c + \ldots + \sin f}{\cos a + \cos b + \cos c + \ldots + \cos f} = q,$$

et nous voulons démontrer que l'on a

$$\operatorname{tang} f < q < \operatorname{tang} a.$$

Or, dans le premier quadrant, le sinus du plus grand arc est le plus grand sinus et son cosinus est le plus petit. Par conséquent, en remplaçant au numérateur chaque sinus par $\sin a$ et au dénominateur chaque cosinus par $\cos a$, nous augmentons la valeur de la fraction et nous avons

$$\frac{n \sin a}{n \cos a} > q$$

ou

$$\operatorname{tang} a > q.$$

De même, en remplaçant chaque sinus par sinus f et chaque cosinus par $\cos f$, on diminue la valeur de la fraction, et l'on a

$$\frac{n \sin f}{n \cos f} < q \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} f < q,$$

par suite,

$$\operatorname{tang} f < q < \operatorname{tang} a.$$

C. Q. F. D.

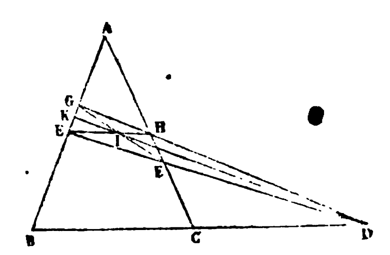
C'est aussi un cas particulier de ce théorème général : $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ étant n expressions fractionnaires écrites suivant un ordre de grandeur croissante, l'expression $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ est comprise entre $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_n}{b_n}$.

SOLUTION DE LA QUESTION 338

(voir t. XV, p. 290);

PAR M. JOZON,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

D'après l'énoncé de la question, je prolonge la base du triangle isocèle ABC d'une longueur CD égale à BC. Je



joins le point D au point E, milieu de AB, et le point F se trouvant le point d'intersection des médianes du triangle ABD, on a

$$CF = \frac{1}{3} AC.$$

Je porte $AG = CF$ et je mène DG qui rencontre AC

en H; soit I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère GHFE, je mène DI qui rencontre AB en K. Je dis que

$$AB = 15 GK = 10 EK.$$

Le triangle DEG, coupé par la transversale FHA, donne

$$(1) \qquad GH \times DF \times EA = GA \times FE \times HD.$$

Mais les côtés de ce triangle sont aussi partagés en segments qui sont en involution, par les lignes DK, EH, GF partant des trois sommets et se coupant en un même point. On a donc

$$(2) \qquad GH \times DF \times EK = GK \times FE \times HD.$$

Divisant membre à membre l'équation (1) par l'équation (2), j'ai

$$\frac{EA}{EK} = \frac{GA}{GK}$$

ou

$$\frac{AB}{2\,EK} = \frac{AB}{3\,GK},$$

ou enfin

$$2\,EK = 3\,GK.$$

Du reste on a aussi

$$EK + GK = EA - GA = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) AB = \frac{1}{6} AB.$$

Je remplace dans cette égalité EK par $\frac{3}{2}$GK et j'ai

$$GK\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{AB}{6},$$

d'où

$$GK = \frac{AB}{15}$$

et

$$EK = \frac{AB}{6} - \frac{AB}{15} = \frac{AB}{10}.$$

C. Q. F. D.

Note. MM. Léopold Sylvestre, du collége Rollin (classe de M. Suchet), Moreau, du lycée Louis-le-Grand, et le P. Rochette ont résolu la quest on à peu près de la même manière.

SOLUTION DE LA QUESTION 344

(voir t. XV, p. 383);

PAR MM. A. PICART ET BOURDELLES,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Un point fixe O est donné dans un angle plan A. Par O, on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en B et en C, S et S′ étant les aires des triangles OBA, OCA, la somme $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'}$ est constante, quelle que soit la manière dont on mène la transversale.

Soient OB′, OC′ les perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés AB, AC. J'aurai

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{2}{AB.OB'} + \frac{2}{AC.OC'} = \frac{2(AB.OB' + AC.OC')}{AB.AC.OB'.OC'}.$$

Or

$$AB.OB' + AC.OC' = AB.AC \sin A.$$

Donc

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{2\,AB.AC\sin A}{AB.AC.OB'.OC'}=\frac{2\sin A}{OB'.OC'}=\text{constante.}$$

C. Q. F. D.

On aurait pu du reste arriver à priori à cette expression $\frac{2\sin A}{OB'.OC'}$ de la constante.

En effet, si je mène la transversale OO' de manière qu'elle soit parallèle à l'un des côtés de l'angle, la somme $\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}$ se réduit à $\frac{1}{S}$. Or

$$S=\frac{\overline{AO}^2\times\sin O'AO\sin OAC'}{2\sin A}.$$

Mais

$$AO\sin O'AO=OB',$$
$$AO\sin OAC'=OC';$$

donc

$$\frac{1}{S}=\frac{2\sin A}{OB'.OC'}.$$

Il serait facile de voir que le théorème subsiste encore quand la transversale rencontre un côté et le prolongement de l'autre, ou bien encore quand le point O est à l'extérieur de l'angle. Alors la somme se change en différence. L'énoncé général exige qu'on dise la somme *algébrique*.

SOLUTION DE LA QUESTION 354

(voir t. XV, p. 464) ;

PAR MM. BOYELDIEU ET A. SILVESTRE,
Élèves de M. Catalan.

On donne quatre droites $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ et un point O dans leur plan ; on joint ce plan au point d'intersection de $A = 0$ et $B = 0$, et l'on prend la conjuguée harmonique de cette droite par rapport au système (A, B); on fait de même par rapport au système (C, D). Ces deux droites se coupent en un point (1). On opère de même par rapport aux systèmes (A, C) et (B, D), puis (A, D) et (B, C). On obtient ainsi deux nouveaux points d'intersection (2) et (3) en ligne droite avec le premier.

Démonstration.

Si A_1, B_1, C_1, D_1 sont les valeurs que prennent les premiers membres des équations de nos droites quand on y remplace les coordonnées variables par celles du point O,

$$\frac{A}{A_1} - \frac{B}{B_1} = 0$$

sera la forme de l'équation des droites joignant le point O aux points d'intersection des droites données.

On sait d'ailleurs que les deux droites $P + \lambda Q = 0$, $P - \lambda Q = 0$ sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites $P = 0$ et $Q = 0$.

Ceci étant, les équations de nos conjuguées harmoni-

ques pourront se mettre sous la forme

(1) $$\begin{cases} \dfrac{A}{A_1}+\dfrac{B}{B_1}=0, \\ \dfrac{C}{C_1}+\dfrac{D}{D_1}=0, \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{A}{A_1}+\dfrac{C}{C_1}=0, \\ \dfrac{B}{B_1}+\dfrac{D}{D_1}=0, \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \dfrac{A}{A_1}+\dfrac{D}{D_1}=0, \\ \dfrac{B}{B_1}+\dfrac{C}{C_1}=0, \end{cases}$$

d'où l'on voit immédiatement que la droite

$$\frac{A}{A_1}+\frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}=0$$

passe par les trois points d'intersection dont il s'agit.

Note. Un abonné de Marseille fait observer que dans un quadrilatère plan les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les droites qui joignent les milieux des deux diagonales se coupent en un même point. La perspective de cette figure donne le théorème 353 dont le théorème 354 est le corrélatif. L'élégant mode de solution de MM. Boyeldieu et Silvestre s'applique avec un égal succès au théorème 353.

SOLUTION DE LA QUESTION 332

(voir tome XV, p. 263);

PAR M. MOREAU,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Soit

$$X = MN^k,$$

M et N sont des fonctions algébriques entières de x n'ayant pas de facteurs communs *ni multiples* (*). k est un nombre entier positif. Désignons par P le plus grand commun diviseur de X et de $\frac{dX}{dx}$, faisons

$$Q = \frac{X}{P}, \quad R = \frac{dX}{P\,dx},$$

alors N est le plus grand commun diviseur de Q et de $R - k\frac{dQ}{dx}$.

En effet, on a

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dM}{dx} N^k + kMN^{k-1}\frac{dN}{dx}$$

ou bien

$$\frac{dX}{dx} = N^{k-1}.\left(\frac{dM}{dx} N + k\frac{dN}{dx} M\right).$$

Le plus grand commun diviseur de X et de sa dérivée est N^{k-1}, car, d'après les conditions de l'énoncé, MN et $\frac{dM}{dx} N + k\frac{dN}{dx} M$ n'ont pas de facteurs communs.

(*) Je crois que cette condition est nécessaire pour la démonstration.

Ainsi

$$P = N^{k-1}.$$

Maintenant on a

$$Q = MN, \quad R = \frac{dM}{dx} N + k \frac{dN}{dx} M,$$

et

$$R - k \frac{dQ}{dx} = \frac{dM}{dx} N + k \frac{dN}{dx} M - k \left(\frac{dM}{dx} N + \frac{dN}{dx} M \right)$$
$$= (1 - k) \frac{dM}{dx} N.$$

Le plus grand commun diviseur de

$$Q = MN$$

et de

$$R - k \frac{dQ}{dx} = (1 - k) \frac{dM}{dx} N$$

est donc N.

NOUVELLES FORMULES
pour la détermination indépendante des coefficients dans la série des sécantes et la série des tangentes et nombres bernoulliens;

D'APRÈS M. O. SCHLOMILCH,
Professeur à Dresde.

(*Archives mathématiques de Grunert*, t. XVI, p. 411, 1851,
et *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 367.)

1. *Notations.* 1°. $n!$ produit continuel $1.2.3 \ldots n$.

2°. $m_n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$, coefficient binomial, $m_0 = 1$.

3°. $(D^n Fx)_0$ = valeur que prend la dérivée d'ordre n de $F(x)$ lorsqu'on y fait $x = 0$.

2. *Lemme.*

$$(1) \sin^{2k} x = \frac{1}{2^{2k-1}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot(2k)_k - (2k)_{k-1}\cos 2x \\ + (2k)_{k-2}\cos 4x - (2k)_{k-3}\cos 6x + \ldots \end{bmatrix},$$

$$D^{2n}\cos \mu x = (-1)^n \mu^{2n} \cos \mu x,$$

$$(D^{2n}\cos \mu x)_0 = (-1)^n \mu^{2n},$$

$$(2)\ (D^{2n}\sin^{2k} x)_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2k-1}} \begin{bmatrix} -(2k)_{k-1}2^{2n} + (2k)_{k-2}4^{2n} \\ -(2k)_{k-3}6^{2n} + \ldots \end{bmatrix},$$

3. *Lemme.*

$$\sin^{2k-1} x = \frac{1}{2^{2k-2}} \begin{bmatrix} (2k-1)_{k-1}\sin x - (2k-1)_{k-3}\sin 3x \\ + (2k-1)_{k-4}\sin 4x - \ldots \end{bmatrix},$$

d'où

$$(3)\left\{\begin{array}{l} (D^{2n-1}\sin 2^{k-1} x)_0 \\ = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2k-2}} \begin{bmatrix} (2k-1)_{k-1}.1^{2n-1} - (2k-1)_{k-3}.3^{2n-1} \\ + (2k-1)_{k-3}.5^{2n-1} - \ldots \end{bmatrix}. \end{array}\right.$$

4. *Lemme.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

Sécante.

5. Soit

$$\text{séc}\, x = 1 + \frac{T_2}{2!}x^2 + \frac{T_4 x^4}{4!} + \ldots + \frac{T_{2n} x^{2n}}{2n!} + \ldots,$$

d'où

$$T_{2n} = (D^{2n}\,\text{séc}\, x)_0;$$

or

$$\text{séc}\, x = (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 x + \ldots + \frac{1.3.5\,(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\sin^{2n} x\right]$$

$$+ \left[\frac{1.3.5\ldots 2n+1}{2.4.6\ldots 2n+2}\sin^{2n+2} x + \ldots\right].$$

Dans la seconde partie entre parenthèses, remplaçons $\sin x$ par sa valeur en x (*lemme* 4), on aura une série de cette forme

$$a_0\, x^{2n+2} + a_1 x^{2n+4} + a_3 x^{2n+6} + \ldots = \text{S}(x)$$

et

$$[\text{D}^{2n}\,\text{S}(x)]_0 = 0;$$

donc

$$\text{T}_{2n} = \frac{1}{2}(\text{D}^{2n}\sin^2 x)_0 + \frac{1.3}{2.4}(\text{D}^{2n}\sin^4 x)_0 + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.5.6\ldots 2n}(\text{D}^{2n}\sin^{2n} x)_0].$$

Faisant donc dans la formule (2) (lemme 2) k successivement égal à $1.2.3\ldots n$, on obtient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \text{T}_{2n} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2_0 . 2^{2n}] \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{2^3}[4_1 . 2^{2n} - 4_0 . 4^{2n}] \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{2^5}[6_2 . 2^{2n} - 6_1 . 4^{2n} + 6_0 . 6^{2n}] \\ &+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}} \\ &\times\left[\begin{matrix}(2n)_{n-1} . 2^{2n} - (2n)_{n-2} . 4^{2n}\ldots \\ \pm (2n)_0\,(2n)^{2n}\end{matrix}\right]. \end{aligned}\right.$$

Pour $n = 3$, on trouve

$$T_6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2^6] + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{2^3}[4.2^6 - 4^6]$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{2^5}[15.2^6 - 6.4^6 + 6^6]$$

$$= 16 - 180 + 225 = 61.$$

Tangente.

6. Soit

$$\tang x = x + \frac{T_3 x^3}{3!} + \frac{T_5 x^5}{5!} + \ldots + \frac{T_{2n-1}}{\overline{2n-1}!} x^{2n-1},$$

d'où

$$T_{2n-1} = (D^{2n-1} \tang x)_0.$$

Lorsque

$$\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi,$$

on a

$$\tang x = \sin x (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^5 x \\ \quad + \frac{1.3\ldots 2n-3}{2.4\ldots 2n-2}\sin^{2n-1} x \end{array} \right]$$

$$+ \left[\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\sin^{2n+1} x + \ldots \right];$$

on démontre comme ci-dessus qu'on a

$$T_{2n-1} = [D^{2n-1}\sin x]_0 + \frac{1}{2}[D^{2n-1}\sin^3 x]_0$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}[D^{2n-1}\sin^5 x]_0 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots 2n-3}{2.4.6\ldots 2n-2}[D^{2n-1}\sin x^{2n-1}]_0.$$

Le reste s'annule; donc, d'après la formule (3),

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(-1)^{n+1}T_{2n-1} = 1_0 . 1^{2n-1}\\&+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}[3_1 . 1^{2n-1} - 3_0 . 3^{2n-1}]\\&+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^4}[5_2 . 1^{2n-1} - 5_1 . 3^{2n-1} + 5_0 . 5^{2n-1} + \ldots\\&+\frac{1.3\ldots 2n-3}{2.4\ldots 2n-2}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\\&\times\left[\begin{aligned}&(2n-1)_{n-1} . 1^{2n-1} - (2n-1)_{n-2} . 3^{2n-1}\ldots\\&\pm(2n-1)_0 (2n-1)^{2n-1}\end{aligned}\right].\end{aligned}\right.$$

Faisant successivement $n = 1, 2, 3, 4$, on a

$$T_1 = 1,\quad T_3 = 2,\quad T_5 = 16,\quad T_7 = 272\ldots$$

Sécante et tangente, formule unique.

7. Il s'agit de trouver une seule formule qui donne à la fois T_{2n} et T_{2n-1}; on a

$$\sec x + \tan x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right)$$
$$= T_0 + T_1 x + \frac{T_2}{2!}x^2 + \frac{T_3}{3!}x^3 + \ldots,$$

d'où

$$T_m = \left[D^m \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{1}x\right)\right]_0.$$

Lorsque $x < \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right) = \cos x(1 - \sin x)$$
$$= \left(\begin{aligned}&\cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x \cos x\\&+ \sin^m x \cos x\end{aligned}\right)$$
$$+ (\sin^{m+1} x \cos x + \sin^{m+2} x \cos x + \ldots).$$

On prouve comme ci-dessus qu'on a seulement

$$T_m = (D^m \cos x)_0 + (D^m \sin x \cos x)_0 + (D^m \sin^2 x \cos x)_0 + \ldots$$
$$+ (D^m \sin^m x \cos x)_0,$$

$$D^m (\sin^k x \cos x) = \frac{1}{k+1} D^{m+1} \sin^{k+1} x,$$

donc

$$T_m = \frac{1}{1} (D^{m+1} \sin x)_0 + \frac{1}{2} (D^{m+1} \sin^2 x)_0$$

$$+ \frac{1}{m+1} (D^{m+1} \sin^{m+1} x)_0.$$

Ayant égard aux formules (2) et (3), on a

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^n T_{2n} \\ & = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} [3_1 . 1^{2n+1} - 3_0 . 3^{2n+1}] \\ & \quad + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} [5_2 . 1^{2n+1} - 5_1 . 3^{2n+1} + 5_0 . 5^{2n+1}] \\ & \quad + \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n}} \left[\begin{array}{l} (2n+1)_n . 1^{2n+1} \\ - (2n+1)_{n-1} . 3^{2n+1} + \ldots \\ \pm (2n+1)_0 (2n+1)^{2n+1} \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n+1} T_{2n-1} \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^1} [2_0 . 2^{2n}] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} [4_1 . 2^{2n} - 4_0 . 4^{2n}] \\ & + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5} [6_2 . 2^{2n} - 6_1 . 4^{2n} + 6_0 . 6^{2n}] + \ldots \\ & + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\begin{array}{l} (2n)_{n-1} . 2^{2n} - (2n)_{n-2} . 4^{2n} + \ldots \\ \pm (2n)_0 . (2n)^{2n} \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

En faisant dans cette dernière formule $n = 3$, on a

$$T_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [2^6] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} [4 . 2^6 - 4^6] + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5} \left[\begin{array}{l} 15 . 2^6 \\ - 6 . 4^6 + 6^6 \end{array} \right]$$

$$= 16 - 120 + 120 = 16, \text{ comme ci-dessus.}$$

Formules récurrentes.

8.

$$(8)\quad m_0 T_m - m_2 T_{m-2} + m_4 T_{m-4} - m_6 T_{m-6} + \ldots = \sin\frac{m\pi}{2},$$

$$(9)\quad T_{m+1} = m_0 T_0 T_m + m_1 T_1 T_{m-1} + m_2 T_2 T_{m-2} + \ldots$$

à démontrer.

Nombres bernoulliens (Jacques Bernoulli).

9. B_p désignant un nombre bernoullien, on sait que l'on a

$$B_{2n} = T_{2n},\quad \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} = T_{2n-1}.$$

Les formules (4), (5), (6), (7), (8), (9) s'appliquent donc aussi aux nombres bernoulliens (*voir* Lacroix, *Calcul différentiel*, tome III, p. 84 et 106; 1819).

THÉORÈME D'EULER SUR L'AIRE DU SECTEUR PARABOLIQUE

(voir tome XV, page 13).

$$r = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi},\quad r' = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi'},$$

$$\varphi' - \varphi = \theta,\quad \varphi > 0,\quad \varphi' > 0,\quad r' > r,$$

on a

$$p = \frac{4rr'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}.$$

$$S=\frac{1}{24}(2r+p)\sqrt{4rp-p^2}$$

égale aire du segment parabolique compris entre r et l'axe.

$$S_1=\frac{1}{24}\left[(2r'+p)\sqrt{4r'p-p^2}\mp(2r+p)\sqrt{4rp-p^2}\right]$$

égale aire du segment compris entre r et r'.

$$4r-p=\frac{4r\left[\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right]^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}},$$

$$2r+p=2r\,\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}};$$

On a des expressions semblables pour $4r'-p$ et $2r'+p$.

$$\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}$$

est négatif, et

$$\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}$$

est positif. Donc

$$\sqrt{4r-p}=-\frac{2\sqrt{r}\left(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)}{\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r'-p}=\frac{2\sqrt{r'}\left(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)}{\sqrt{r+r'-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}}.$$

Substituant ces valeurs dans S_1, on a

$$\frac{6S_1}{\sqrt{p}} = \frac{A+B}{C},$$

$$A = r'\left(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'} + 2r\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)\sqrt{r'},$$

$$B = r\left(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'} + 2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)\sqrt{r},$$

$$C = \left(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$A + B = \left(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)$$
$$\times\left[(r + r')^2 - (r + r')\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'} - 2rr'\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$= \left(r + r' + \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr}\right)\left(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^2;$$

d'où

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(r + r_1 + \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)\sqrt{p\left(r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right.}.$$

Observation. On parvient au même résultat en supposant φ et φ' de signes opposés.

Soit s la longueur de la corde qui joint les extrémités des rayons vecteurs r et r'; on a

$$2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'} = \pm\sqrt{(r + r')^2 - s^2},$$

le signe supérieur lorsqu'on a $0 < \theta < 180$, et le signe

3.

inférieur pour $180 < \theta < 360$. Donc

$$S = \frac{1}{12}\left[2(r+r') \pm \sqrt{(r+r')^2 - s^2}\right]$$

$$\times \sqrt{p\left[r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}\right]}$$

$$\sqrt{(r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}}$$

$$= \left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

car

$$\sqrt{(r+r') \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}}$$

doit être positif.

Faisons

$$\frac{r+r'+s}{2} = d, \quad \frac{r+r'+s}{2} = e,$$

on aura

$$S_1 = \frac{1}{6}\left[d+e \pm \left(\frac{de}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[d \mp e\right]\sqrt{p},$$

d'où

$$S_1 = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}\left[d^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}\right].$$

Telle est la belle expression de l'aire du secteur parabolique trouvée par Euler (*Miscell. Berolin.*, t. VII, p. 20). Mais Euler n'en a tiré aucun parti, et le théorème était tellement oublié, que Lambert croyait l'avoir découvert, ainsi qu'on le voit dans son ouvrage : *Insigniores orbitæ cometarum proprietates,* Aug. Vindelic., 1761, § 83, et dans ses *Beitrage,* partie III, p. 257, 1765, et depuis on a en effet attribué le théorème à Lambert. C'est M. Gauss qui a revendiqué les droits d'Euler (*Motus theoriæ planet.,* p. 119; 1809). Il est pourtant vrai que Lambert est le premier qui ait étendu le théorème à l'ellipse et à l'hyperbole.

M. Gentil, chef d'institution, a publié en 1854, chez

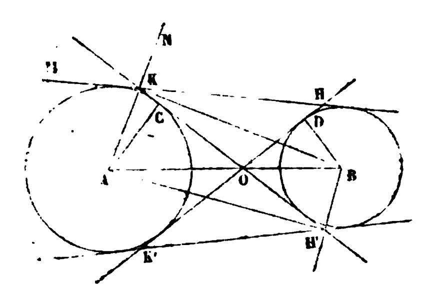
Mallet-Bachelier : *Démonstration d'un théorème de Lambert par la géométrie*, in-8 de 8 pages. Cette démonstration est fondée sur des théorèmes énoncés dans un programme de l'université de Dublin (*Nouvelles Annales*, 1847, t. VI, p. 450, nos 5-12).

SOLUTION DE LA QUESTION 335

(voir. t. XV, p. 290),

PAR M. L. ARMEZ,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

Soient A et B les centres des deux cercles donnés, KH' et HK' les tangentes intérieures communes, KH la tan-



gente extérieure commune aux deux cercles A et B; je mène les rayons AC, BD aux points de contact C et D des tangentes intérieures.

Les triangles semblables OAC, OBD donnent

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD};$$

on a d'ailleurs

$$\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BD}^2.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$OC.CD = \frac{AC}{BD} \cdot \overline{OB}^2 - AC.BD$$

ou

$$OC.OD + AC.BD = \frac{AC}{BD} \cdot \overline{OB}^2.$$

Mais on peut remplacer le rapport $\frac{AC}{BD}$ par le rapport $\frac{AO}{BO}$ qui lui est égal, et l'on a

$$(\alpha) \qquad OC.OD + AC.BD = AO.OB.$$

Cela posé, je joins le centre A au point K où se coupent la tangente extérieure KH et la tangente intérieure KH'; je mène également BH' du centre B au point d'intersection de KH' avec K' H' qui est une seconde tangente extérieure commune; j'achève le quadrilatère AKBH' et je remarque qu'il est inscriptible.

En effet, AK étant bissectrice de l'angle BKM, on a l'égalité d'angles

$$AKH' = NKH$$

on a d'ailleurs

$$BKH' = BKH$$

d'où

$$AKB = BKN$$

On démontrerait de la même manière que l'angle AH'B est droit.

Le quadrilatère AKBH' ayant deux angles opposés droits est inscriptible, et l'on a

$$AO.OB = KO.OH',$$

et comme OH = OH',

$$AO.OB = KO.OH.$$

Substituant au produit AO.OB dans l'égalité (α), le

produit KO.OH qui lui est égal, on a

$$OC.OD + AC.BD = KO.OH.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Note. MM. Legrandais, élève du lycée Saint-Louis, A. Raimbeaux, le P. Rochette, S. J., et un anonyme ont résolu la question de la même manière.

Observation. M. Legrandais donne encore une solution trigonométrique.

SOLUTION DE LA QUESTION 327 (PROUHET)

(voir t. XV, p. 230);

PAR M. CH. MOREAU,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot),
ET LE P. ROCHETTE, S. J.

Si les racines d'une équation du quatrième degré sont de la forme p^2, q^2, $p^2 + 2pq$, $q^2 + 2pq$, les racines de la derivée sont rationnelles.

Formons l'équation du quatrième degré ayant pour racines p^2, q^2, $p^2 + 2pq$, $q^2 + 2pq$.

Le coefficient du terme en x^3 est égal à la somme des racines changée de signe, et, par suite, à

$$-2(p+q)^2.$$

Le coefficient du terme en x^2 est

$$\begin{aligned}p^2q^2 + p^2(p^2 + 2pq) + p^2(q^2 + 2pq)\\ + q^2(p^2 + 2pq) + q^2(q^2 + 2pq)\\ + (p^2 + 2pq)(q^2 + 2pq).\end{aligned}$$

Ce coefficient peut s'écrire ainsi :

$$(p+q)^4 + 2pq(p^2 + q^2 + pq).$$

Le coefficient du terme en x sera

$$-\left[\begin{array}{l} p^2q^2(p^2+2pq)+p^2q^2(q^2+2pq) \\ +p^2(p^2+2pq(q^2+2pq)+q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)\end{array}\right].$$

En le transformant, il se met sous la forme

$$-2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq).$$

Le terme constant est égal au produit des racines. L'équation du quatrième degré sera donc

$$x^4-2(p+q)^2x^3+[(p+q)^4+2pq(p^2+q^2+pq)]x^2$$
$$-2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)x$$
$$+p^2q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)=0.$$

L'équation obtenue en égalant la dérivée à zéro est

$$x^3-\frac{3}{2}(p+q)^2x^2+\left[\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq)\right]x$$
$$-\frac{pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)}{2}=0.$$

Je dis maintenant que les racines de cette équation sont rationnelles et de la forme

$$pq,\quad \frac{(p+q)^2}{2},\quad (p^2+q^2+pq).$$

Il est facile de le vérifier.

En effet, le coefficient $-\frac{3}{2}(p+q)^2$ est égal à la somme de ces trois racines prise en signe contraire. Le terme constant est égal à leur produit changé de signe.

De plus, le coefficient de x peut se transformer ainsi:

$$\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq)$$
$$=\frac{(p+q)^2}{2}(p^2+q^2+pq)+\frac{(p+q)^2}{2}(pq)+pq(p^2+q^2+pq),$$

et sous cette forme on voit que c'est la somme des produits deux à deux des racines supposées.

SUR LES QUESTIONS 321 ET 322

(voir t. XV, p. 154),

PAR M. LOUIS CREMONA (DE PAVIE).

Question 321.

Soient a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{\text{ième}}$ de l'hexagone; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; α_r, β_r, γ_r les cosinus des angles du même côté avec les axes. On a, par les données du problème,

$$\begin{array}{lll} a_2 = a_1 + \alpha_1 l_1, & b_2 = b_1 + \beta_1 l_1, & c_2 = c_1 + \gamma_1 l_1. \\ a_3 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_4 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, & & \\ a_5 = a_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, & & \\ a_6 = a_1 + \alpha_3 l_3, & & \end{array}$$

Par conséquent, l'équation du plan passant par les milieux des côtés (1, 2), (2, 3), (3, 4) sera

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2a_1 + \alpha_1 l_1 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + 2\alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \\ 2y & 2b_1 + \beta_1 l_1 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + 2\beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 \\ 2z & 2c_1 + \gamma_1 l_1 & 2c_2 + 2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 & 2c_1 + 2\gamma_1 l_1 + 2\gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en transformant ce déterminant par des théorèmes très-connus,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4(x - a_1) & \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 & \alpha_3 l_3 + \alpha_1 l_1 & \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \\ 4(y - b_1) & \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 & \beta_3 l_3 + \beta_1 l_1 & \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 \\ 4(z - c_1) & \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 & \gamma_3 l_3 + \gamma_1 l_1 & \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En observant de quelle façon cette équation renferme les éléments qui composent les coordonnées des sommets de l'hexagone, on voit que la même équation représente aussi le plan passant par les milieux des côtés (4, 5), (5, 6), (6, 1). Donc, etc.

Question 322.

Soient $2n$ le nombre des côtés du polygone; a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{ième}$; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; α_r, β_r, γ_r, les cosinus des angles de ce côté avec les axes. En supposant que r soit un des nombres 1, 2, 3,..., n, on a

$$a_r = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_{r-1} l_{r-1},$$

$$a_{n+r} = a_1 + \alpha_r l_r + \alpha_{r+1} l_{r+1} + \ldots + \alpha_n l_n,$$

donc

$$a_r + a_{n+r} = 2a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n,$$

c'est-à-dire $a_r + a_{n+r}$ est indépendant de r; analoguement pour $b_r + b_{n+r}$ et $c_r + c_{n+r}$.

Je considère le point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{1}{2}(a_r + a_{n+r}), \quad y = \frac{1}{2}(b_r + b_{n+r}), \quad z = \frac{1}{2}(c_r + c_{n+r});$$

ces coordonnées satisfont évidemment aux équations de la droite $(r, n+r)$, qui sont

$$\frac{x - a_r}{a_r - a_{n+r}} = \frac{y - b_r}{b_r - b_{n+r}} = \frac{z - c_r}{c_r - c_{n+r}}$$

et satisfont aussi aux équations de la droite qui joint les milieux des côtés $(r, r+1)$, $(n+r, n+r+1)$, savoir

$$\frac{2x - a_r - a_{r+1}}{a_r + a_{r+1} - a_{n+r} - a_{n+r+1}} = \frac{2y - b_r - b_{r+1}}{b_r + b_{r+1} - b_{n+r} - b_{n+r+1}}$$
$$= \frac{2z - c_r - c_{r+1}}{c_r + c_{r+1} - c_{n+r} - c_{n+r+1}};$$

donc le point nommé est commun à toutes les droites qui joignent les sommets opposés et à celles qui joignent les milieux des côtés opposés, et le même point est le milieu de chacune de ces droites.

SOLUTION DE LA QUESTION 336

(voir t. XV, p. 290);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Un triangle rectangle ABC est équivalent au rectangle des deux segments $B\alpha$ et $C\alpha$ faits sur l'hypoténuse par le point de contact α du cercle inscrit.

Soient r le rayon du cercle inscrit et S la surface du triangle. On a, β et γ étant les deux autres points de contact,

$$r = A\gamma = A\beta,$$

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.$$

Remplaçons AB et AC par leur valeur en faisant attention que

$$B\gamma = B\alpha, \quad C\alpha = C\beta,$$

il vient

$$S = \frac{1}{2}(B\alpha + r)(C\alpha + r)$$

$$= \frac{1}{2}B\alpha.C\alpha + \frac{1}{2}[(B\alpha + C\alpha)r + r^2)].$$

Mais

$$\frac{1}{2}[(B\alpha + C\alpha)r + r^2] = \frac{1}{2}S;$$

donc

$$B\alpha \times C\alpha = S.$$

Note. MM. A. Raimbeaux, Dunod, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie), Pàque, professeur à Liége, Jozon, élève du lycée Louis-le-Grand, Constant (Jules), Varlet, élève du collége Rollin (classe de M. Suchet), et Aubert, professeur, ont résolu la question de la même manière.

Observation. MM. Murent (de Clermont) et Moreau (du lycée Saint-Louis) font usage de la formule générale

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 344

(voir t. XV, p. 383);

PAR MM. DESJACQUES.

Un point fixe O est donné dans un angle plan de sommet A; par O on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en B et C; S et S_1 étant les aires des triangles OBA, OCA, la somme $\frac{1}{S}+\frac{1}{S_1}$ est constante, de quelque manière qu'on mène la transversale.

Soient B′ C′ une autre transversale passant par le point O; S′, S_1' les aires des triangles OB′A, OC′A. Les triangles BAC, B′AC′ donnent le rapport

$$\frac{BAC}{B'AC'} = \frac{AB \times AC}{AB' \times AC'};$$

et les triangles AOB, AOB′, AOC, AOC′ donnent

$$\frac{AOB}{AOB'} = \frac{AB}{AB'}, \quad \frac{AOC}{AOC'} = \frac{AC}{AC'}.$$

En remplaçant BAC, B′AC′ par $S + S_1$, $S' + S_1'$, et

AOB, AOB′, AOC, AOC′ par S, S′, S_1, S'_1, et en multipliant membre à membre les deux derniers rapports, on a

$$\frac{SS_1}{S'S'_1} = \frac{AB \times AC}{AB' \times AC'} = \frac{BAC}{B'AC'},$$

d'où

$$\frac{S + S_1}{S' + S'_1} = \frac{SS_1}{S'S'_1}.$$

On tire de là

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{S'} + \frac{1}{S'_1}.$$

Si l'on suppose le point O pris hors de l'angle, on a aussi $\frac{1}{S} - \frac{1}{S_1}$ égal à une quantité constante.

Note. MM. Richard P. Oxamendy (de Cuba) Aubert, professeur, Poudra, un anonyme et M. A. Raimbeaux ont résolu la question de la même manière.

SOLUTION DE LA QUESTION 339

(voir t. XV, p. 291);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J., ET UN ANONYME.

Toutes les circonférences ayant leurs centres sur une même droite et coupant à angle droit une circonférence donnée ont même axe radical, et toutes ces circonférences prises deux à deux et la circonférence donnée ont même centre radical. (MANNHEIM.)

Soient m le centre de la circonférence donnée, pp la droite donnée; du point m abaissons une perpendiculaire mh sur pp: un point quelconque m_1, pris sur cette perpendiculaire, sera d'égale puissance par rapport à deux

cercles P_1, P_2 ayant leurs centres en p_1, p_2 sur la ligne pp et coupant à angle droit la circonférence M. (Nous désignerons le rayon d'un cercle par la lettre R affectée de la lettre du centre comme indice.)

On a

$$\overline{m_1p_1}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{hp_1}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{mp_1}^2 - \overline{mh}^2,$$

$$R_{p_1}^2 = \overline{mp_1}^2 - R_m^2,$$

d'où

$$\overline{m_1p_1}^2 - R_{p_1}^2 = \overline{m_1h}^2 - \overline{mh}^2 + R_m^2;$$

on a de même

$$\overline{m_1p_2}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{hp_2}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{mp_2}^2 - \overline{mh}^2,$$

$$R_{p_2}^2 = \overline{mp_2}^2 - R_m^2,$$

d'où

$$\overline{m_1p_2}^2 - R_{p_2}^2 = \overline{m_1h}^2 - \overline{mh}^2 + R_m^2,$$

et, par conséquent,

$$\overline{m_1p_1}^2 - R_{p_1}^2 = \overline{m_1p_2}^2 - R_{p_2}^2.$$

Mais la puissance d'un point par rapport à un cercle est égale à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon; le point m_1 pris quelconque sur la droite mh est donc bien d'égale puissance par rapport à deux cercles quelconques satisfaisant aux conditions de la question; et cette droite est ainsi l'axe radical commun à tous ces cercles qui forment une suite de cercles radicaux du cercle M et que nous appellerons *suite* P.

On sait qu'on appelle *centre radical* de trois cercles le point unique d'où l'on peut décrire un cercle qui soit radical par rapport aux trois premiers. Soit C le centre radical de deux cercles de la suite P et du cercle M, ce

point sera situé sur l'axe radical *mh* commun à tous les cercles de la suite P, et, par conséquent, le cercle C ne pourra pas être radical de l'un des cercles de cette suite sans l'être en même temps de tous les autres; il sera donc à la fois radical du cercle M et de deux quelconques des cercles de la suite P. Toutes les circonférences P prises deux à deux et les circonférences données ont ainsi le point C pour centre radical commun.

Note. Les cercles considérés dans cette question forment un *système radical* dont *pp* est l'axe primitif; sur la droite *mh* se trouvent les centres d'une suite illimitée de cercles coupant à angle droit tous les cercles de la suite P (ou *radicaux réciproques* par rapport à tous ces cercles P), et sur la partie de cette droite qui est corde commune à tous les cercles P, les centres d'une suite de cercles *radicaux simples* par rapport à ceux de la suite P. On peut consulter sur la théorie des suites radicales et ses applications le beau Mémoire que M. Gaultier de Tours a publié dans le XVI[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

La première partie de cette question est la réciproque du théorème qui y est pris comme point de départ; quant à la seconde, elle s'y trouve d'une manière plus générale sous la forme suivante (p. 154).

Il n'existe qu'un cercle de chaque suite qui soit, par rapport à un cercle indépendant, radical de même espèce que par rapport aux centres de la suite opposée.

SOLUTION DE LA MÊME QUESTION 339;

PAR M. AUBERT.
Professeur.

Soient O le centre de la circonférence donnée que je prends pour origine d'axes rectangulaires, r son rayon, C, C', C'',... les centres des circonférences qui coupent à angle droit la circonférence O, et R, R', R'',... leurs rayons.

α, β sont les coordonnées du point C,
α', β' » C',
α'', β'' » C'',
....

L'équation de l'axe radical des circonférences C et C' est

$$(2y - \beta - \beta')(\beta' - \beta) + (2x - \alpha - \alpha')(\alpha' - \alpha) - R^2 + R'^2 = 0;$$

elle devient, par un calcul très-facile, eu égard aux relations

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = R'^2,$$

qui expriment que les circonférences C, C' coupent à angle droit la circonférence O,

$$(\beta' - \beta)y + (\alpha' - \alpha)x = 0,$$

équation d'une droite qui passe par le centre O de la circonférence donnée.

De même, l'équation de l'axe radical des cercles C, C'' sera

$$(\beta'' - \beta)y + (\alpha'' - \alpha)x = 0,$$

équation identique avec la précédente, car les points C, C′, C″,... étant en ligne droite, on a

$$\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}=\frac{\beta''-\beta}{\alpha''-\alpha}.$$

Donc il n'y a pour tous les cercles C, C′, C″,... pris deux à deux qu'un seul axe radical.

Maintenant considérons ensemble les trois circonférences O, C, C′. L'axe radical de O et C est représenté par l'équation

$$(2y-\beta)\beta+(2x-\alpha)\alpha+R^2-r^2=0,$$

qui, toutes réductions faites, devient

$$(1)\qquad \beta y+\alpha x-r^2=0.$$

L'équation de l'axe radical des circonférences O et C′ sera

$$(2)\qquad \beta' y+\alpha' x-r^2=0.$$

Les coordonnées du centre radical des cercles O, C, C′ sont les valeurs de x et y qui conviennent aux équations (1) et (2), valeurs qui vérifient l'équation

$$(\beta'-\beta)y+(\alpha'-\alpha)x=0,$$

qui n'est autre que la différence des équations (1) et (2) : ce qu'on sait d'ailleurs.

Le centre radical des circonférences O, C, C″ serait donné par les équations

$$\beta y+\alpha x-r^2=0,\quad \beta'' y+\alpha'' x-\alpha^2=0,$$

qui, en vertu de la relation

$$\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}=\frac{\beta''-\beta}{\alpha''-\alpha},$$

sont identiques avec le système des équations (1) et (2).

Donc il n'y a qu'un centre radical.

La même question peut être résolue par de simples considérations géométriques de la manière suivante :

Les rayons de la circonférence O menés aux points de rencontre de celle-ci avec les circonférences C, C', C'' sont pour ces dernières des tangentes égales issues du point O qui appartient ainsi à tous les axes radicaux ; d'ailleurs tous ces axes devant être perpendiculaires à la droite qui joint les points C, C', C'',... se réduisent à un seul, puisque du point O on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette droite.

On sait que les axes radicaux de trois cercles se coupent en un même point qui est le centre radical de ces cercles. D'après cela, le centre radical des trois cercles O, C, C' se trouvera au point de rencontre de l'axe radical commun avec l'axe radical des cercles O et C ; de même, le centre radical des cercles O, C, C'' sera au point de rencontre déjà mentionné, et ainsi de suite, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un centre radical.

SOLUTION DE LA QUESTION 348 (MANNHEIM)

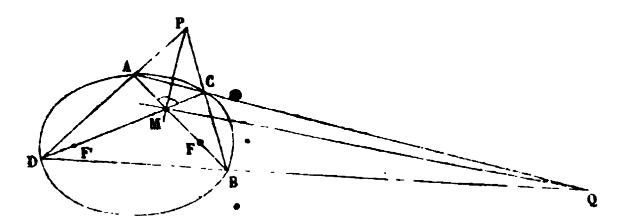
(voir t. XV, p. 407);

PAR M. BOURDELLES,
Élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Étant donnés une conique dont les foyers sont F et F' et un point quelconque M dans l'intérieur de cette conique ; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B, et MF' rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}.$$

Lorsque le point M est intérieur, les sommes sont remplacées par des différences.



Soit P le point d'intersection des droites AD et CB, soit Q celui des droites AC et DB; joignons le point M aux points P et Q.

Si l'on remarque qu'il résulte de la construction précédente que PM est la polaire du point Q, que MQ est celle du point P, et que les droites MA, MP, MC, MQ forment un faisceau harmonique, comme ces droites MA et MC passent chacune par un foyer de la section conique, les droites MP et MQ sont rectangulaires; elles sont donc les bissextrices des angles formés au point M par les droites AB et DC.

En vertu de la proposition énoncée par M. Mannheim (*Nouvelles Annales*, tome XV, p. 383), si l'on considère l'angle P et les transversales DC et AB, on a

$$\frac{1}{\text{PMA}}+\frac{1}{\text{PMB}}=\frac{1}{\text{PMC}}+\frac{1}{\text{PMD}},$$

ou bien, en exprimant les surfaces de ces triangles en fonction de deux côtés et de l'angle compris par ces côtés, on aura

$$\frac{1}{\text{MP}\sin\text{PMA}}\left(\frac{1}{\text{MA}}+\frac{1}{\text{MB}}\right)=\frac{1}{\text{MP}\sin\text{PMC}}\left(\frac{1}{\text{MC}}+\frac{1}{\text{MD}}\right),$$

et comme les angles AMP, PMC sont égaux, en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par les quantités

égales

$$MP \sin PMA = MP \sin PMC,$$

on obtient

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}.$$

C. Q. F. D.

Si le point M est extérieur, il est évident que la somme serait remplacée par la différence, car alors on partirait de la relation

$$\frac{1}{PMA} - \frac{1}{PMB} = \frac{1}{PMC} - \frac{1}{PMD}.$$

La propriété subsiste pour une conique quelconque.

DEMONSTRATION DU THEORÈME 334 (MANNHEIM)

PAR M. DE BUSSIÈRE,
Élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Étant donnés un triangle ABC et un point quelconque O dans l'intérieur du triangle, on mène les transversales AOa, BOb, COc : on a l'identité

$$\frac{1}{AOb} + \frac{1}{BOc} + \frac{1}{COa} = \frac{1}{AOc} + \frac{1}{BOa} + \frac{1}{COb}.$$

Cette proposition n'est à proprement parler qu'un corollaire du théorème de M. Mannheim (*Nouvelles Annales*, t. XV, p. 383). En considérant les transversales BOb et COc, on a

$$\frac{1}{AOb} + \frac{1}{AOB} = \frac{1}{AOc} + \frac{1}{AOC}.$$

De même

$$\frac{1}{BOc}+\frac{1}{BOC}=\frac{1}{BOa}+\frac{1}{BOA},$$

$$\frac{1}{COa}+\frac{1}{COA}=\frac{1}{COb}+\frac{1}{COB};$$

additionnant et réduisant les termes semblables, il vient

$$\frac{1}{AOb}+\frac{1}{BOc}+\frac{1}{COa}=\frac{1}{AOc}+\frac{1}{BOa}+\frac{1}{COb}\ (*).$$

OBSERVATIONS SUR LA NOTE DE M. ROUCHÉ

(voir t. XV, p. 354);

PAR M. P. SERRET.

M. Rouché veut bien me prêter une affirmation qui ne m'appartient pas, mais qui lui est utile pour démolir un édifice que je n'ai jamais songé à construire et dont le véritable architecte me paraît être M. Rouché lui-même. On peut lire en effet à la page 40 de mon Mémoire : « Le théorème précédent peut, ce nous semble, être employé aux mêmes usages que le théorème analogue de Legendre. » Si c'est là une affirmation, elle paraît du moins assez timide. Je reconnais volontiers d'ailleurs que j'aurais mieux exprimé ma pensée en disant *usages analogues,* ce qui se prêtait moins bien à la construction de la phrase. Mais on écrit généralement pour la majorité des lecteurs, et cette majorité s'appuie rarement sur un mot qui ne se trouve pas mathématique-

(*) La même démonstration nous a été adressée par M. Bourdelles, élève du lycée Saint-Louis. G.

ment exact pour prêter à un auteur, qui paraît d'ailleurs raisonnable, l'affirmation que des approximations du second ordre ou du quatrième sont une seule et même chose. C'est de la même manière encore que je donne à la page 143 un théorème relatif à la construction de deux circonférences comprenant entre elles le périmètre d'une ellipse donnée, théorème analogue à celui de Bernoulli, mais fournissant une approximation moins rapide que ce dernier. Néanmoins j'aurais volontiers supprimé dans mon ouvrage les deux pages qui contiennent le développement du théorème précité, si le triangle auxiliaire que j'y emploie n'avait présenté une liaison géométrique remarquable avec le triangle sphérique vrai, et si, en particulier, une certaine combinaison des données des trois triangles rectilignes que l'on peut employer n'eût reproduit le triangle même de Legendre.

Enfin j'ajouterai que M. Rouché doit publier prochainement un Traité nouveau de Trigonométrie qui se recommande, à ce que j'ai appris, et par une rare valeur intrinsèque et par une démonstration nouvelle, communiquée à l'auteur par M. Bonnet, du théorème de Legendre dont il vient d'être question.

26 septembre 1856.

NOTE SUR LA DIVISION DU CERCLE

Par la règle et le compas ;

PAR M. ALLEGRET.

L'illustre Gauss a indiqué dans ses *Disquisitiones Arithmeticæ*, VII[e] section, quels sont les seuls cas où l'on peut diviser géométriquement le cercle en parties

égales. On peut résumer la belle découverte de Gauss par ce théorème dont l'énoncé me paraît fort simple :

Pour que la division de la circonférence en N *parties égales puisse être effectuée géométriquement par la règle et le compas, il faut et il suffit que le nombre des entiers inférieurs à* N *et premiers avec lui soit une puissance de* 2.

On peut rapprocher cet énoncé du suivant, dû à Gauss, et traduit aussi par Wantzel (*Journal de Mathématiques*, tome II, p. 369) :

La division de la circonférence en N *parties ne peut être effectuée avec la règle et le compas que si les facteurs premiers de* N *différents de* 2 *sont de la forme* $2^n + 1$, *et s'ils entrent seulement à la première puissance dans ce nombre.*

SOLUTION DE LA QUESTION 355

(voir t. XV, p. 464) ;

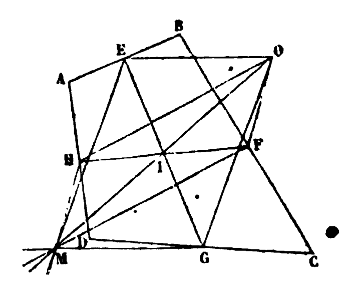
PAR MM. A. ROUSSIN ET R. GIBOL,
Élèves de Sainte-Barbe, classe spéciale.

Etant donnés un quadrilatère ABCD et un point O dans son plan, on joint ce point aux milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère. Par chaque point milieu, on mène une parallèle à la droite joignant le point O au milieu du côté opposé. Prouver que les six parallèles concourent au même point.

Rappelons d'abord que dans un quadrilatère les droites joignant les milieux des côtés opposés et des diagonales se coupent au même point en deux parties égales.

Soient E, F, G, H les milieux des côtés AB, BC, CD,

DE, etc. Joignons OE, OF, OG, OH; par E et G menons les parallèles EM et GM à OG et à OE; elles se coupent



en M, et OEMG est un parallélogramme. Le problème revient à prouver que si l'on joint MF et MH, ces droites sont respectivement parallèles à OH et OF.

Or dans OEMG les deux diagonales EG et OM se coupent en leurs milieux au point I. Ce point est aussi le milieu de HF. Nous en déduisons que OHMF est un parallélogramme et que MH et MF sont parallèles à OE et OH.

On démontrerait absolument de même que les deux autres parallèles menées par chaque point milieu des deux diagonales à la droite joignant le point O à l'autre, concourent au même point M.

Note du Rédacteur. Les deux faisceaux de six droites chacun qui partent de O et de M sont homographiques, car les points milieux sont des points correspondant harmoniquement à des points situés à l'infini. Projetant la figure coniquement, ces six points à l'infini sont en ligne droite L et en involution. Les trois parallélogrammes deviennent des quadrilatères où les côtés opposés se rencontrent en des points situés sur la même droite L. Tirant donc arbitrairement une droite L dans le plan du quadrilatère ABCD, les quatre côtés et les deux diagonales prolongées coupent la droite L en six points; prenant les

harmoniques de ces six points, on obtient sur les quatre côtés et les deux diagonales six autres points. Ce qui donne lieu à un théorème général de géométrie segmentaire. Les parallélogrammes deviennent des quadrilatères ayant en commun la diagonale OM; dans chacun, les côtés opposés se coupent en un point situé sur la droite L.

QUESTIONS.

356. 1°. Discuter la courbe qui a pour équation

$$y = \sin[(2n+1)\arc\sin x] + 1. \tag{1}$$

2°. Démontrer que si $\varphi(x)$ est une fonction impaire (*) qui n'a pas plus de $2n-1$ racines comprises entre $+1$ et -1, la courbe représentée par l'équation

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

rencontre la courbe (1) au moins en un point dont l'abscisse est comprise entre $+1$ et -1.

3°. Déduire de ce qui précède la démonstration du théorème de M. Tchebichef (question 347, t. XV, p. 387).

(PROUHET.)

357. Etant donnés deux coniques homofocales et un point quelconque M entre les deux courbes; si l'on mène MT, MT′ tangentes à la courbe intérieure en T et en T′ et rencontrant la courbe extérieure en A et B, en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}.$$

(*) On dit qu'une fonction $\varphi(x)$ est impaire lorsqu'on a

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

Si la courbe intérieure devient la droite terminée par les deux foyers, on retombe sur la question 348.

(Michael Roberts.)

358. Etant données deux coniques ayant pour foyers communs les points F et F′, on mène arbitrairement par l'un de ces foyers F′ une droite rencontrant chaque conique en deux points; par chacun de ces quatre points on mène une tangente à la conique sur laquelle est ce point; 1° ces quatre droites sont tangentes à une parabole ayant pour foyer le second foyer F et pour directrice la droite menée arbitrairement par F′; 2° cette parabole est tangente à l'axe des coniques qui contient les foyers imaginaires; 3° une tangente commune à l'une des coniques et à la parabole est vue du foyer sous un angle droit.

(Faure.)

359. Une surface de révolution étant engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe principal, tout plan mené par un foyer O de la conique coupe la surface suivant une conique qui a le même point O pour foyer.

360. A, B, C, D, E étant cinq points situés sur cette surface de révolution, on a la relation

$$\begin{aligned}\mathrm{OA.BC.DE} + \mathrm{OB.CD.EA} + \mathrm{OC.DE.AB}\\ + \mathrm{OD.EA.BC} + \mathrm{OE.AB.CD} = 0.\end{aligned}$$

(Möbius.)

361. On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène un plan *quelconque* déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T.

On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante.}$$

(FAURE.)

362. L'équation générale du cinquième degré

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

peut toujours se résoudre algébriquement lorsqu'on a entre les coefficients les relations

$$\frac{d^2 - ce}{b^2 - ac} = \frac{e^2 - df}{c^2 - bd} = \frac{de - cf}{bc - ad}.$$

(FAURE.)

NOTE

Sur la discussion des équations du deuxième degré à deux variables par le moyen des équations de leurs axes trouvées à priori;

PAR M. GUILLAUMET,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

La discussion de l'équation générale du second degré à deux variables présente une complication de cas particuliers assez nombreux, qui exigent pour être traités des méthodes différentes, et nécessitent souvent des calculs longs à exécuter. L'idée de trouver à priori les axes de la courbe et leurs longueurs, s'il s'agit d'une courbe de l'un des deux premiers genres, serait, selon nous, assez naturelle et permettrait d'achever promptement la discussion sans qu'il pût naître aucune espèce de cas particuliers.

Cette méthode, employée dans toute sa généralité, ne fournirait pas toujours une simplification dans les cal-

culs; mais si l'on y joint les premiers résultats donnés immédiatement par la résolution de l'équation générale par rapport à y, elle amène à la connaissance définitive de la courbe plus rapidement que ne le ferait la méthode ordinaire.

L'application de cette méthode se base essentiellement sur la connaissance des axes d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires. Nous n'avons considéré que ce seul cas, qui, du reste, se présente le plus ordinairement. Nous avouerons même que, dans le cas des axes obliques, la simplification n'existerait plus, l'équation d'un axe se trouvant alors compliquée de lignes trigonométriques.

Pour trouver les axes de la courbe représentée par l'équation générale

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

on cherche à déterminer les coefficients a et b d'une droite

$$y = ax + b,$$

en exprimant que si l'on fait une transformation de coordonnées en prenant cette droite pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées une perpendiculaire quelconque à cette même droite, les termes du premier degré en y disparaissent de l'équation de la courbe.

Rien ne distinguant les deux axes nouveaux l'un de l'autre, on devra trouver deux solutions, et les deux valeurs du coefficient angulaire a devront être inverses.

En effet, posons les formules de transformation

$$x = x_1 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = y_1 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$

et remarquons que la propriété indiquée devant avoir lieu quelle que soit la nouvelle origine pourvu que x et y soient

liés par la relation

$$y_1 = ax_1 + b,$$

nous pouvons faire $x_1 = 0$.

De plus, l'angle α a pour tangente trigonométrique a, ce qui donne pour nos formules de transformation

$$x = \frac{x'}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{ay'}{\sqrt{a^2+1}},$$

$$y = b + \frac{ax'}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{y'}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Reportant ces valeurs de x et y dans l'équation (1) et supprimant les accents, on a à égaler à zéro le coefficient du terme du premier degré en y, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{2Aax}{a^2+1} + \frac{2Ab}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{Bx}{a^2+1} - \frac{Ba^2x}{a^2+1} - \frac{Bba}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{2Cax}{a^2+1}$$
$$+ \frac{D}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{Ea}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Mais ce coefficient devant être nul quel que soit x, on en déduira les deux équations

$$\frac{2Aa + B - Ba^2 - 2Ca}{a^2+1} = 0,$$

$$\frac{2Ab - Bba + D - Ea}{\sqrt{a^2+1}} = 0,$$

ou

(2) $$a^2 - \frac{2(A-C)}{B} - 1 = 0,$$

(3) $$(2A - Ba)b = Ea - D,$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}, \\ a_2 = \dfrac{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{D - Ea_1}{Ba_1 - 2A}, \\ b_2 = \dfrac{D - Ea_2}{Ba_2 - 2A}. \end{cases}$$

Les équations des axes de la courbe considérée seront donc

$$y = \frac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}x + \frac{D - \frac{E}{B}\left[A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}\right]}{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2} - 2A},$$

$$y = \frac{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}x + \frac{D - \frac{E}{B}\left[A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}\right]}{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2} - 2A},$$

équations faciles à se rappeler, et qui, de plus, seront simples à construire numériquement, d'autant mieux que dans le terme tout connu, le coefficient déjà calculé se représente deux fois.

Nous ferons remarquer en passant que, bien qu'on trouve dans le cas de la parabole deux valeurs pour a et qu'il semble par conséquent y avoir deux axes, la méthode n'est cependant pas en défaut, car si l'on rem-

place B^2 par $4AC$, on a

$$a = \frac{2A}{B},$$

$$a = \frac{-2C}{B}.$$

Mais, reportant ces valeurs de a dans les valeurs de b, on a, pour celles de ces dernières qui correspondent à

$$a = -\frac{2C}{B},$$

une valeur finie, et, pour celle qui correspond à

$$a = \frac{2A}{B},$$

une valeur infinie qui indique bien l'impossibilité et non le parallélisme avec l'axe primitif des ordonnées, puisque les nouveaux axes sont perpendiculaires entre eux.

Cela posé, voyons d'abord la manière générale de construire la courbe au moyen de ses axes. Après quoi nous montrerons comment, si l'application de la méthode présente de trop grandes difficultés de calcul, on peut la simplifier en prenant un ou deux points de la courbe, points déterminés au moyen du diamètre dont l'équation est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

et par la résolution de l'équation

$$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF = 0,$$

ou par la résolution des équations qui résultent de la substitution dans l'équation (1) des valeurs $x = 0$ ou $y = 0$.

1°. Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, on

trouvera l'intersection des deux axes avec la courbe, ce qui donnera les quatre sommets si c'est une ellipse, ou les deux sommets et la longueur de l'axe imaginaire si c'est une hyperbole, et déterminera la courbe dans l'un ou l'autre cas.

2°. Si la courbe est une parabole, l'intersection de l'axe avec la courbe donne le sommet. On y joindra un point obtenu par l'une des méthodes que nous venons d'indiquer, et la courbe sera encore déterminée.

Nous n'engagerons pas ordinairement à appliquer cette méthode générale, sauf dans le cas de la parabole où l'équation de l'axe devient très-simple :

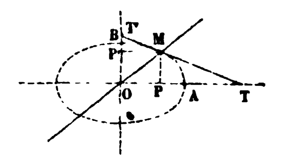
$$y = -\frac{2C}{B}x + \frac{D + \frac{2CE}{B}}{-2C - 2A}.$$

Mais nous allons montrer comment on peut la simplifier dans les deux premiers cas.

1°. *Ellipse*. On prendra les deux points de la courbe situés sur le diamètre dont l'équation est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}.$$

A ces points on connaît la tangente qui est parallèle à à l'axe primitif des ordonnées. Cela donnera en même



temps le centre, et il suffit de construire a_1 et a_2 pour avoir les directions des axes.

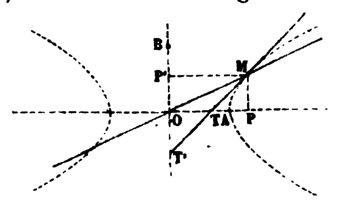
On sait alors que OA est une moyenne proportionnelle entre OP et OT et que OB est une moyenne proportion-

nelle entre OP′ et OT′, ce qui donne les quatre sommets.

2°. *Hyperbole*. Nous distinguerons deux cas.

I. Le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ coupe la courbe.

On prendra, comme tout à l'heure, les deux points d'intersection, le centre et la tangente en l'un des deux



points, tangente parallèle à l'axe des Y. On aura les sommets et les extrémités de l'axe imaginaire par les relations

$$OA = \sqrt{OP \times OT}$$

et

$$OB\sqrt{-1} = \sqrt{OP' \times OT'}.$$

La direction de la tangente montrera lequel des deux axes est l'axe réel.

II. Le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ est imaginaire.

On le construit; on construit l'un des deux axes; le centre est son intersection avec le diamètre. Le deuxième axe en résulte donc. On construira ensuite les directions des deux asymptotes et on trouvera un point quelconque de la courbe en faisant dans l'équation (1) $x = 0$ ou $y = 0$. On trouvera la tangente en ce point en y menant la droite dont la partie comprise entre les deux asymptotes aura ce même point pour milieu. Et on achèvera comme dans le cas précédent.

Dans le cas de la parabole, la méthode générale sera toujours simple et applicable.

La méthode est en défaut dans un seul cas : c'est celui où $B = 0$. Mais on sait alors que les axes de la courbe sont parallèles aux axes primitifs. Si donc la courbe a un centre, on le trouvera en égalant à zéro les deux dérivées du premier membre de l'équation (1), et on appliquera, après avoir construit les axes en ce point, la méthode simplifiée.

Si la courbe est une parabole, la méthode ne s'appliquera plus du tout. Mais alors, comme l'un des carrés disparaît, la résolution par rapport aux deux variables donnera deux points sur une droite perpendiculaire à l'axe, par conséquent l'axe lui-même, et un point avec sa tangente, ce qui déterminera la courbe.

Nous sommes loin d'avoir énuméré tous les cas qui peuvent se présenter et même d'avoir discuté à fond ceux que nous avons signalés. Mais notre but était seulement de faire voir que la recherche des axes de figure des courbes du deuxième degré, faite à priori au moyen de la formule que nous avons indiquée, formule bien connue du reste, peut être utile pour la construction graphique de cette courbe, et même, à notre avis, apporter, dans un grand nombre de cas, une simplification de calculs assez sensible.

NOTE

Sur la théorie des racines égales et sur la question 332 (*)

(voir page 26);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

1. On doit à Lagrange le procédé indiqué dans tous les

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. III, p. 51, 1844; ROGER.

Traités d'Algèbre pour ramener la résolution d'une équation qui a des racines égales à celle de plusieurs autres équations de degrés moindres, dans lesquelles chaque racine n'entre qu'une seule fois. M. Ostrogradski a énoncé dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (19 mai 1856) deux propositions remarquables qui conduisent à deux solutions nouvelles et élégantes du même problème.

Nous nous proposons, dans cette Note, de démontrer et d'appliquer ces deux théorèmes, et de rectifier l'énoncé de la question 332.

2. Théorème I. *Soient* X, P, Q_1, R_1 *un polynôme entier de la variable* x*; le plus grand commun diviseur à ce polynôme et à sa dérivée* X'*; et les quotients*

$$\frac{X}{P},\quad \frac{X'}{P}.$$

Concevons le premier membre de l'équation

$$X = 0$$

décomposé en facteurs correspondants à ses racines, et désignons par q_1, q_2, q_3, q_4 les produits des facteurs de chaque degré de multiplicité pris chacun une fois; nous aurons successivement

$$X = q_1 q_2^2 q_3^3 q_4^4,$$

$$X' = X\left(\frac{q'_1}{q_1} + 2\frac{q'_2}{q_2} + 3\frac{q'_3}{q_3} + 4\frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$P = q_2 q_3^2 q_4^3,$$

$$Q_1 = q_1 q_2 q_3 q_4,$$

$$Q'_1 = Q_1\left(\frac{q'_1}{q_1} + \frac{q'_2}{q_2} + \frac{q'_3}{q_3} + \frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$R_1 = Q_1\left(\frac{q'_1}{q_1} + 2\frac{q'_2}{q_2} + 3\frac{q'_3}{q_3} + 4\frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$R_1 - Q'_1 = Q_1\left(\frac{q'_2}{q_2} + 2\frac{q'_3}{q_3} + 3\frac{q'_4}{q_4}\right).$$

Donc *le plus grand diviseur commun aux polynômes* Q_1 *et* $R_1 - Q'_1$ *est précisément le produit* q_1 *des facteurs simples du polynôme* X.

De plus, *si l'on désigne par* Q_2 *et* R_2 *les quotients*

$$\frac{Q_1}{q_1}, \quad \frac{R_1 - Q'_1}{q_1},$$

on a

$$Q_2 = q_2 q_3 q_4,$$

$$Q'_2 = Q_2 \left(\frac{q'_2}{q_2} + \frac{q'_3}{q_3} + \frac{q'_4}{q_4} \right),$$

$$R_2 = Q_2 \left(\frac{q'_2}{q_2} + 2\frac{q'_3}{q_3} + 3\frac{q'_4}{q_4} \right),$$

$$R_2 - Q'_2 = Q_2 \left(\frac{q'_3}{q_3} + 2\frac{q'_4}{q_4} \right).$$

Donc *le plus grand diviseur commun aux polynômes* Q_2 et $R_2 - Q'_2$ *est le produit* q_2 *des facteurs doubles de* X.

Et l'on verrait de même que *si l'on désigne par* Q_3 *et* R_3 *les quotients*

$$\frac{Q_2}{q_2}, \quad \frac{R_2 - Q'_2}{q_2},$$

le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_3 *et* $R_3 - Q'_3$ *est le produit* q_3 *des facteurs triples de* X.

Ainsi de suite.

3. *Application numérique.*

$$X = x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 + 612x^2 - 108x - 432,$$

$$X' = 8x^7 - 49x^6 - 12x^5 + 590x^4 - 1036x^3 - 249x^2 + 1224x - 108,$$

$$P = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18,$$

$$Q_1 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

$$Q'_1 = 4x^3 - 30x + 10,$$

$$R_1 = 8x^3 + 7x^2 - 67x + 6,$$

$$R_1 - Q'_1 = 4x^3 + 7x^2 - 37x - 4,$$

$$q_1 = x + 4,$$

$$Q_2 = x^3 - 4x^2 + x + 6,$$

$$Q'_2 = 3x^2 - 8x + 1,$$

$$R_2 = 4x^2 - 9x - 1,$$

$$R_2 - Q'_2 = x^2 - x - 2,$$

$$q_2 = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

$$q_3 = x - 3;$$

donc

$$X = (x + 4)(x^2 - x - 2)^2 (x - 3)^3.$$

4. En opérant ainsi, on détermine successivement les divers produits q_1, q_2, q_3, q_4 à l'aide de ceux qui précèdent. La proposition suivante permet d'obtenir immédiatement le produit des facteurs d'un degré quelconque de multiplicité.

Théorème II. X, P, Q_1, R_1 *ayant la même signification que ci-dessus, le plus grand diviseur commun aux polynômes* Q_1 *et* $R_1 - kQ'_1$ *est précisément le produit* q_k *des premières puissances des facteurs de* X *dont le degré de multiplicité est* k.

En effet, on a successivement

$$X = q_1 q_2^2 q_3^3 \dots q \dots q_n^n,$$

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X' &= X \sum_1^n k \frac{q'_k}{q_k},\\ P &= q_2 q_3^2 \ldots q_k^{k-1} \ldots q_n^{n-1},\\ Q_1 &= q_1 q_2 q_3 \ldots q_k \ldots q_n,\\ Q'_1 &= Q_1 \sum_1^n \frac{q'_k}{q_k},\\ R_1 &= Q_1 \sum_1^n k \frac{q'_k}{q_k}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad R_1 - kQ'_1 = Q_1 \left\{\begin{aligned} &(1-k)\frac{q'_1}{q_1} + (2-k)\frac{q'_2}{q_2} + \ldots\\ &+ (\overline{k-1}-k)\frac{q'_{k-1}}{q_{k-1}}\\ &+ (\overline{k+1}-k)\frac{q'_{k+1}}{q_{k+1}} + \ldots\\ &+ (n-k)\frac{q'_n}{q_n} \end{aligned}\right\},$$

et il suffit de comparer les relations (1) et (2) pour voir que le plus grand diviseur commun à Q_1 et à $R_1 - kQ_1$ est q_k.

5. *Application numérique.* Mêmes valeurs de X, X', P, Q'_1, R_1 qu'au n° 3.

$$\begin{aligned} Q_1 &= x^4 - 15x^2 + 10x + 24,\\ R_1 - Q'_1 &= 4x^3 + 7x^2 - 37x - 4,\\ R_1 - 2Q'_1 &= 7x^2 - 7x - 14,\\ R_1 - 3Q'_1 &= -4x^3 + 7x^2 + 23x - 24,\\ q_1 &= x + 4,\\ q_2 &= x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2),\\ q_3 &= x - 3. \end{aligned}$$

6. L'énoncé de la question 332 (*voir* t. XV, p. 243) doit être rectifié.

Mettons, en effet, les polynômes M et N sous la forme

$$M = M_1 M_2^2 \dots M_k^k \dots N_n^n,$$

$$N = N_1 N_2^2 \dots N_n^n.$$

D'après le théorème II, le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_1 et $R_1 - kQ'_1$ est $M_k N_k$; il n'est donc égal à N que dans le cas où N est le produit des puissances premières des facteurs de X dont le degré de multiplicité est k, et M le produit de tous les autres facteurs de X. Ainsi modifiée, la question 332 ne diffère pas du théorème II.

SOLUTION DE LA QUESTION 345

(voir t. XV, p. 383);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

$f(x) = 0$ est une équation algébrique à coefficients entiers; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a aucune racine entière. (GAUSS.)

Si $f(x)$ admettait une racine entière α, le quotient $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ aurait tous ses coefficients entiers, car le premier terme du diviseur ayant pour coefficient l'unité, la division ne peut introduire aucun dénominateur. Par suite, la valeur numérique de $f(x)$ pour toute valeur entière de x serait divisible par la valeur correspondante de $x - \alpha$, et en particulier les quotients

$$\frac{f(0)}{-\alpha}, \quad \frac{f(1)}{1-\alpha}$$

seraient entiers. Mais l'un des deux entiers consécutifs $\alpha - 1$, α est pair; donc l'un des nombres $f(0)$, $f(1)$ serait pair, ce qui est contraire à l'hypothèse.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

V.

Loi de l'homogénéité.

On a donné de cette loi deux énoncés qui diffèrent essentiellement. Suivant quelques auteurs, la loi de l'homogénéité consisterait en ce que :

Si des lettres a, b, c,..., *qui entrent dans une équation représentent des lignes et qu'aucune ligne particulière n'ait été prise pour unité, l'équation doit être homogène ou être la somme de plusieurs équations homogènes.*

D'après cet énoncé, il se peut que l'équation obtenue, en ne prenant aucune ligne particulière pour unité, ne soit pas homogène. Or, c'est ce que d'autres auteurs n'admettent pas. Dans leur énoncé, *l'équation est nécessairement homogène.*

L'un des Traités de Géométrie analytique, où l'on trouve ce second énoncé, contient de plus les observations que voici :

« ... On fait consister maintenant le théorème de l'homogénéité en ce que toute équation géométrique est nécessairement homogène, *ou*, du moins, la somme de plusieurs équations homogènes. Avec un pareil énoncé, la proposition devient évidemment insignifiante; car, quelle est l'équation, écrite au hasard par un algé-

» briste, qui ne puisse être conçue décomposée en équa-
» tions homogènes, d'après la seule précaution d'y grou-
» per convenablement les termes? Il est certainement
» impossible que ceux qui entendent ainsi la loi de l'ho-
» mogénéité fassent aucun usage des précieux moyens de
» vérification continue qu'elle est surtout destinée à four-
» nir spontanément dans toutes les applications possibles
» de l'analyse mathématique.

» Sans nous arrêter davantage à cette vicieuse doc-
» trine, procédons directement à la véritable explica-
» tion. »

Et l'auteur procède effectivement à une explication. Mais, ceux qui ont affirmé que l'équation peut être la somme de plusieurs équations homogènes de degrés différents, ont aussi donné une explication qui, sans doute, leur a semblé être la véritable explication. C'est pourquoi il serait utile que le *Programme officiel* fît savoir quelle est de ces deux lois la vraie loi de l'homogénéité, c'est-à-dire celle qu'il faut pouvoir expliquer pour être admis à l'Ecole Polytechnique.

Puisque rien d'officiel ne s'y oppose encore, je dirai qu'il est impossible d'admettre qu'une équation obtenue, en ne prenant aucune ligne particulière pour unité, ne soit pas homogène, si l'on adopte la définition suivante qui a été donnée par M. Cauchy (*Leçons sur le calcul différentiel*, page 216) :

« *On dit qu'une fonction de plusieurs variable est*
» HOMOGÈNE, *lorsqu'en faisant croître ou décroître tou-*
» *tes les variables dans un rapport donné, on obtient*
» *pour résultat la valeur primitive de la fonction mul-*
» *tipliée par une puissance de ce rapport. L'exposant*
» *de ce rapport est le degré de la fonction homogène.*

» En conséquence, $f(x, y, z, \ldots)$ sera une fonction
» homogène du degré a, si t désignant une nouvelle va-

» riable on a, quel que soit t,

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^n f(x, y, z, \ldots). »$$

De plus, on dit qu'une équation

$$f(x, y, z, \ldots) = 0$$

est homogène lorsque son premier membre $f(x, y, z\ldots)$ est une fonction homogène.

Ces définitions admises, représentons par

$$f(a, b, c, \ldots) = 0$$

une équation algébrique dans laquelle les lettres a, b, c, etc., expriment les valeurs numériques des lignes d'une figure, mesurées avec une unité arbitraire.

On pourra, en séparant un monôme A des autres termes, écrire l'équation proposée de cette manière :

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0 \text{ (*)},$$

l'expression $\varphi(a, b, c,\ldots)$ désignant une fonction algébrique quelconque dont la valeur ne peut être nulle puisque le monôme A est différent de zéro.

Si l'on fait varier l'unité qui a donné pour mesures des lignes de la figure les nombres a, b, c, etc., et qu'on prenne une nouvelle unité qui soit, par exemple, k fois moindre que la première, il est clair que les longueurs des lignes représentées d'abord par a, b, c, etc., auront pour valeurs numériques ak, bk, ck, etc. De sorte qu'en

(*) Si le premier membre de $f(a, b, c,\ldots) = 0$ est la somme de plusieurs radicaux de la forme $\sqrt[p]{A + B + C\ldots}$, en élevant l'équation à une puissance égale à l'indice p de l'un de ces radicaux, on trouvera, au moins, un monôme parmi les termes de l'équation résultante, et l'on pourra donner à cette équation la forme

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0$$

désignant par m le degré du monôme A, la valeur de ce monôme deviendra Ak^m et $\varphi(a, b, c, \ldots)$ prendra la valeur $\varphi(ak, bk, ck, \ldots)$.

Or, l'équation

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0 \tag{1}$$

exprime une relation qui, par hypothèse, doit exister quelle que soit l'unité qui serve à mesurer les lignes de la figure, on a donc

$$Ak^m + \varphi(ak, bk, ck, \ldots) = 0. \tag{2}$$

Cela posé, si l'on multiplie par k^m l'équation (1), elle devient

$$Ak^m + k^m\varphi(a, b, c, \ldots) = 0. \tag{3}$$

Et, en comparant les équations (2) et (3) on voit que

$$\varphi(ak, bk, ck, \ldots) = k^m\varphi(a, b, c, \ldots).$$

Donc, en remplaçant les variables a, b, c, etc., par par ak, bk, ck, etc., la fonction

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots)$$

devient

$$Ak^m + k^m\varphi(a, b, c, \ldots)$$

ou

$$[A + \varphi(a, b, c, \ldots)]k^m.$$

Par conséquent, l'équation

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0$$

est homogène. G.

NOTE

Sur une question proposée aux examens d'admission à l'École Navale (1856).

Étant données les équations

(1) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A,$$

(2) $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B,$$

(3) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C,$$

dans lesquelles a, b, c *représentent des nombres positifs, et* A, B, C *des angles compris chacun entre* 0 *et* 180 *degrés, en déduire les relations*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

et

$$A + B + C = 180^\circ \text{ (*)}.$$

En additionnant (1) et (2), on trouve

(4) $$c = a\cos B + b\cos A.$$

(*) Pour déduire des équations proposées (1), (2), (3), l'égalité

$$A + B + C = 180^\circ,$$

on a admis que la somme des trois angles A, B, C qui entrent dans ces équations n'excède pas 180 degrés; c'est là une restriction qui n'est pas nécessaire. Pour que

$$A + B + C = 180^\circ,$$

il suffit que A, B, C soient des angles compris entre 0 et 180 degres, comme ceux que l'on considère ordinairement en géométrie élémentaire.

G.

Et, en retranchant (2) de (1), il vient

$$(5) \qquad a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A).$$

La multiplication des équations (4) et (5) donne ensuite

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^3 B - b^2 \cos^2 A;$$

d'où

$$a^2 (1 - \cos^2 B) = b^2 (1 - \cos^2 A)$$

et

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A.$$

Les quantités a, b, $\sin B$, $\sin A$ étant positives, l'équation

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A$$

revient à

$$a \sin B = b \sin A.$$

On en tire

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On démontrerait de même que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Pour établir l'égalité

$$A + B + C = 180^\circ,$$

divisons par c tous les termes de l'équation

$$(4) \qquad c = a \cos B + b \cos A,$$

il en résultera

$$1 = \frac{a}{c} \cos B + \frac{b}{c} \cos A.$$

Or, les relations

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

donnent

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C},\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},$$

donc

$$1=\frac{\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\sin C},$$

d'où

$$(6)\qquad \sin C=\sin(A+B).$$

On trouverait de même

$$(7)\qquad \sin B=\sin(A+C).$$

Par suite

$$\sin C+\sin B=\sin(A+B)+\sin(A+C)$$

ou

$$2\sin\left(\frac{C+B}{2}\right)\cos\left(\frac{C-B}{2}\right)$$
$$=2\sin\left(A+\frac{C+B}{2}\right)\cos\left(\frac{C-B}{2}\right),$$

équation qui se réduit à

$$(8)\qquad \sin\left(\frac{C+B}{2}\right)=\sin\left(A+\frac{C+B}{2}\right).$$

L'angle $\frac{C+B}{2}$ étant moindre que 180 degrés, on a

$$\sin\left(\frac{C+B}{2}\right)>0,$$

et, par conséquent,

$$\sin\left(A+\frac{C+B}{2}\right)>0.$$

De cette dernière inégalité on peut conclure

$$A + \frac{C+B}{2} < 180^\circ,$$

parce que, d'après l'hypothèse, $A + \frac{C+B}{2}$ est moindre que 360 degrés. Les angles inégaux $\frac{C+B}{2}$, $A + \frac{C+B}{2}$, compris entre o et 180 degrés, ayant le même sinus (8), sont nécessairement supplémentaires. Donc

$$A + B + C = 180^\circ.$$

G.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 344 (MANNHEIM)

(voir t. XV, p. 383);

PAR M. CREMONA,
Professeur à l'université de Padoue.

Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points A, O, celles des points B, C seront de la forme

$$x_3 = x_1 + \lambda h, \quad y_3 = y_1 + \lambda k,$$
$$x_4 = x_1 + \mu m, \quad y_4 = y_1 + \mu n,$$

h, k, l, m sont des quantités données, λ, μ deux indéterminées; donc

$$2\,\text{ABO} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix},$$

et analogiquement

$$2\,\text{AOC} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ABO}}+\frac{1}{\mathrm{AOC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ \lambda h-\mu m & \lambda k-\mu n \end{vmatrix}}{\lambda\mu\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ h & k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ m & n \end{vmatrix}};$$

mais les points B, C, O étant en ligne droite, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ \lambda h-\mu m & \lambda k-\mu n \end{vmatrix}-\lambda\mu\begin{vmatrix} k & h \\ n & m \end{vmatrix}=0,$$

par conséquent,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ABO}}+\frac{1}{\mathrm{AOC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix} k & h \\ m & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ h & k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ m & n \end{vmatrix}},$$

quantité indépendante de λ, μ. Donc, etc.

Théorème analogue dans l'espace.

Par un point O situé dans l'intérieur d'un triangle trièdre de sommet A, on mène un plan qui coupe les arêtes du trièdre dans les points B, C, D. Soient v, v_2, v_3 les valeurs des trois pyramides AOCD, AODB, AOBC; je dis que la somme

$$\sqrt{\frac{v_1}{v_2 v_3}}+\sqrt{\frac{v_2}{v_3 v_1}}+\sqrt{\frac{v_3}{v_1 v_2}}$$

est constante, de quelque manière qu'on mène le plan sécant.

Soient x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,..., x_5, y_5, z_5 les coor-

données des cinq points A, O, B, C, D; x_1, y_1, z_1, x_2 y_2, z_2 sont des quantités données ainsi que les α, β, γ on aura

$$\frac{x_3 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_3 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_3 - z_1}{\gamma_1} = \lambda,$$

$$\frac{x_4 - x_1}{\alpha_2} = \frac{y_4 - y_1}{\beta_2} = \frac{z_4 - z_1}{\gamma_2} = \mu,$$

$$\frac{x_5 - x_1}{\alpha_3} = \frac{y_5 - y_1}{\beta_3} = \frac{z_5 - z_1}{\gamma_3} = \nu,$$

donc

$$6v_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = \mu\nu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu A,$$

et par analogie

$$6v_2 = \nu\lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \nu\lambda B,$$

$$6v_3 = \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu C,$$

A, B, C sont des quantités connues; d'où

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{3}}} \frac{v_1 + v_2 + v_3}{\sqrt[3]{v_1 v_2 v_3}} = \frac{\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C}{\lambda\mu\nu \sqrt{ABC}}.$$

Mais les points O, A, B, C étant dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

remplaçant x_3 par $\lambda\alpha_1 + x_1$, y_3 par $\lambda\beta_1 + y_1$, z_3 par $\lambda\gamma_1 + z_1$, etc., on obtient

$$\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu B = \lambda\mu\nu \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu D,$$

donc

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{\frac{v_1}{v_2 v_3}} + \sqrt{\frac{v_2}{v_3 v_1}} + \sqrt{\frac{v_3}{v_1 v_2}}\right) = \frac{D}{\sqrt{ABC}},$$

quantité indépendante de λ, μ, ν.

C'est ce qu'il fallait prouver.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 348

(voir t. XV, p. 407);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Étant donnés une conique dont les foyers sont F et F' et un point quelconque M dans le plan de cette conique; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B et MF' rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD},$$

le signe — répondant au cas où le point M est extérieur.

Ellipse. Soit

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de la courbe; par le centre menons deux diamètres respectivement parallèles aux sécantes données AB et CD. Leurs équations seront

$$(2) \qquad y = mx, \quad y = m'x$$

et celles des secantes parallèles qui passent par les foyers seront

$$(3) \qquad y = m(x + c), \quad y = m'(x - c).$$

Si nous désignons par d et d' les demi-diamètres et par (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des points où ils rencontrent la coürbe, nous aurons

$$d^2 = x'^2 + y'^2, \quad d'^2 = x''^2 + y''^2,$$

et, en éliminant (x', y'), (x'', y'') entre ces deux équations et les équations (1) et (2),

$$(4) \qquad d^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2}, \quad d'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m'^2)}{a^2 m^2 + b^2},$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{d^2}{d'^2} = \frac{(1 + m^2)(a^2 m'^2 + b^2)}{(1 + m'^2)(a^2 m^2 + b^2)}.$$

Désignons par S et S' les longueurs AB, CD des sécantes données et exprimons S et S' en fonction des coordonnées

$$[(x_1, y_1)(x'_1, y'_1)], \quad [(x_2, y_2)(x'_2, y'_2)]$$

des points où elles rencontrent la courbe. Les abscisses de ces points nous seront données par les deux équations suivantes :

$$(a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2a^2 m^2 cx + a^2 m^2 c^2 - a^2 b^2 = 0,$$
$$(a^2 m'^2 + b^2) x^2 - 2a^2 m'^2 cx + a^2 m'^2 c^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Nous aurons donc

$$x_1 - x'_1 = \frac{\sqrt{4a^4 m^4 c^2 - 4(a^2 m^2 + b^2)(a^2 m^2 c^2 - a^2 b^2)}}{(a^2 m^2 + b^2)},$$

d'où l'on tire, en remplaçant c^2 par sa valeur $a^2 - b^2$ et

réduisant,

(6) $$(x_1 - x'_1)^2 = \frac{2n^2 b^4 (1 + m^2)}{(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

On obtient $(x_2 - x_2')^2$ en changeant m en m' dans l'expression (6). On a ainsi

(7) $$(x_2 - x'_2) = \frac{2a^2 b^4 (1 + m'^2)}{(a^2 m'^2 + b^2)^2}.$$

Il est facile de passer du carré des différences des abscisses à celui des ordonnées; car les équations (3) donnent

$$y_1 - y'_1 = m\,(x_1 - x'_1),$$
$$y_2 - y'_2 = m'(x_2 - x'_2),$$

et il vient

(8) $$(y_1 - y'_1)^2 = \frac{2a^2 b^4 (1 + m^2)\, m^2}{(a^2 m^2 + b^2)^2},$$

(9) $$(y_2 - y'_2)^2 = \frac{2a^2 b^4 (1 + m'^2)\, m'^2}{(a^2 m'^2 + b^2)^2}.$$

Faisons la somme des expressions (6) et (8), (7) et (9) et extrayons les racines carrées, nous obtiendrons S et S':

(10) $$\mathrm{S} = \frac{2ab^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2},$$

(11) $$\mathrm{S}' = \frac{2ab^2 (1 + m'^2)}{a^2 m'^2 + b^2},$$

d'où

(12) $$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{(1 + m^2)(a^2 m'^2 + b^2)}{(1 + m'^2)(a^2 m^2 + b^2)},$$

et, à cause du rapport commun aux relations (5) et (12),

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Mais on a (Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, page 377)

$$\frac{\text{MA.MB}}{\text{MC.MD}} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Nous aurons donc, en remplaçant $\frac{S}{S'}$ par sa valeur,

$$\frac{\text{AB}}{\text{CD}} = \frac{\text{MB} \pm \text{MA}}{\text{MD} \pm \text{MC}} = \frac{\text{MA.MB}}{\text{MC.MD}}$$

ou

$$\frac{1}{\text{MA}} \pm \frac{1}{\text{MB}} = \frac{1}{\text{MC}} \pm \frac{1}{\text{MD}},$$

et on voit facilement que le signe — doit être pris dans le cas où le point M est extérieur.

Hyperbole. La démonstration serait absolument la même, à quelques signes près qui changent dans les formules intermédiaires.

Parabole. Dans la parabole, l'un des foyers s'éloignant à l'infini, l'une des sécantes menées par le point M devient parallèle à l'axe, MB devient infini et l'on a

$$\frac{1}{\text{MA}} = \frac{1}{\text{MC}} \pm \frac{1}{\text{MD}}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 295

(voir t. XIII, p. 315);

PAR M. L. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

Soit

(1) $$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe quelconque; par un point P

(α, β) pris dans son plan menons des normales qui la rencontreront, par exemple, en m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (*); si (x_i, y_i) sont les coordonnées d'un quelconque A_i de ces points, ces coordonnées seront données par les équations

(2) $$\frac{dF}{dx_i}(\beta - y_i) = \frac{dF}{dy_i}(\alpha - x_i),$$

(3) $$F(x_i, y_i) = 0.$$

Si nous désignons par n_i la distance du point P, (α, β) au point A_i, (x_i, y_i), on aura

(4) $$n_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i).$$

Supposons qu'on établisse entre les longueurs n_i de ces normales la relation

(5) $$\varphi(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m) = 0.$$

Si l'on substitue dans l'équation (5) les valeurs des x_i, y_i, déduites des équations (2) et (3) en fonction de α et β, on aura le lieu des points P pour lesquels cette relation est satisfaite.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P sera donné par l'équation

$$d\alpha \sum \frac{d\varphi}{dn_i}\frac{dn_i}{d\alpha} + d\beta \sum \frac{d\varphi}{dn_i}\frac{dn_i}{d\beta} = 0:$$

si l'on remarque que l'on a la relation

$$\frac{dF}{dx_i}\frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dF}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, en vertu de l'équation (2),

$$(\alpha - x_i)\frac{dx_i}{d\alpha} + (\beta - y_i)\frac{dy_i}{d\alpha} = 0,$$

(*) Si p est le degré de la courbe, alors $m = p^2$. Tm.

on trouvera que

$$\frac{dn_i}{d\alpha}=\frac{\alpha - x_i}{n_i};$$

et par un calcul semblable

$$\frac{dn_i}{d\beta}=\frac{\beta - y_i}{n_i},$$

n_i ayant la valeur (4).

On aura donc pour le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P au point (α, β) la valeur suivante :

$$(6) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{\alpha-\dfrac{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}x_i}{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}}}{\beta-\dfrac{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}y_i}{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}}}.$$

Considérons maintenant un point Q ayant pour coordonnées (a, b) et désignons par l_i la distance de ce point au point A_i, de sorte qu'on aura

$$(7) \qquad l_i^2=(a-x_i)^2+(b-y_i)^2.$$

Déterminons le lieu des points Q par la condition que la relation

$$(8) \qquad \varphi(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_m)=0$$

soit satisfaite, φ étant la même caractéristique que dans l'équation (5).

La courbe P sera donc déterminée par les équations (2), (3), (4) et (5) entre lesquelles on éliminera les x_i et y_i; la courbe Q sera déterminée par les équations (2), (3), (7) et (8) entre lesquelles on éliminera les x_i et y_i.

A chaque point (α, β) de la courbe P correspondra une courbe Q (*).

Pour obtenir le coefficient angulaire de la tangente à la courbe Q en un point quelconque (a, b), remarquons que les x_i et y_i ne sont fonctions ni de a ni de b; on a donc immédiatement

$$\frac{dl_i}{da} = \frac{a - x_i}{l_i}, \quad \frac{dl_i}{db} = \frac{b - y_i}{l_i},$$

et, par conséquent,

$$(9) \qquad \frac{db}{da} = -\frac{a - \dfrac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} x_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}}{b - \dfrac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} y_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}}.$$

Or si l'on fait

$$a = \alpha, \quad b = \beta,$$

il en résulte

$$l_i = n_i,$$

on arrive alors facilement aux conclusions suivantes :

1°. La courbe Q passe par le point (α, β), car pour $a = \alpha$ et $b = \beta$, l'équation (8) se trouve satisfaite en vertu de l'équation (5) ; d'ailleurs ce résultat était évident à priori.

2°. La courbe Q touche la courbe P au point (α, β); car si l'on fait

$$a = \alpha, \quad b = \beta,$$

(*) Dans la courbe P, les points A varient ; ils sont fixes dans la courbe Q.
TR.

les équations (6) et (9) montrent que l'on a

$$\frac{db}{da} = \frac{d\beta}{d\alpha};$$

donc les deux courbes ont la même tangente au point (α, β).

3°. Si l'on suppose que les points A_i aient des masses respectivement égales $\frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}$, qu'on compose ces masses comme des forces parallèles et qu'on désigne par G le point d'application de la résultante, je dis que la normale à la courbe P au point (α, β) passera par le point G.

En effet, le point G a pour coordonnées

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i} x_i}{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}}, \\ \eta = \dfrac{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}}{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}}. \end{cases}$$

L'équation de la normale à la courbe P au point (α, β) est

$$(11) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{X - \alpha}{Y - \beta},$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}$ ayant la valeur (6), X et Y étant les coordonnées courantes. On voit immédiatement que l'équation (11) est vérifiée pour $X = \xi$ et $Y = \eta$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Lorsque

$$\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0,$$

k^2 étant une constante, alors

$$\xi = \frac{\Sigma x_i}{m},$$

$$\eta = \frac{\Sigma y_i}{m},$$

le point G est le centre de gravité des points A_1, A_2,..., A_m.

Lorsque $\varphi = \sum n_i - k^2 = 0$,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_i}{n_i}}{\sum \frac{1}{n_i}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_i}{n_i}}{\sum \frac{1}{n_i}}.$$

Lorsque $\varphi = n_1, n_2, \ldots, n_m - k^2 = 0$,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_i}{n_i^2}}{\sum \frac{1}{n_i^2}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_i}{n_i^2}}{\sum \frac{1}{n_i^2}};$$

ce qui fournit deux autres théorèmes analogues à celui qui est énoncé dans la question que je traite.

4°. Si l'on suppose que les points A_i aient des masses respectivement égales à $\frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i}$, qu'on compose ces masses comme des forces et qu'on désigne par G_1 le point d'application de la résultante, la normale à la courbe Q.

au point quelconque (a, b) passera par le point G_1.

Pour les mêmes points A_1, $A_2, \ldots$, A_m correspondants au point (α, β) de la courbe P, le point G_1 variera en même temps que le point (a, b) sur la courbe Q correspondante au même point (α, β).

Pour démontrer la proposition, remarquons que le point G_1 a pour coordonnées

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} x_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}, \\ \eta_1 &= \frac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} y_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}. \end{aligned}\right.$$

L'équation de la normale au point quelconque (a, b) est

$$(13)\qquad \frac{db}{da} = -\frac{X-a}{Y-b},$$

$\frac{db}{da}$ ayant la valeur (9), X et Y étant les coordonnées courantes. Il est évident que l'équation (13) est vérifiée pour

$$X = \xi_1 \quad \text{et} \quad Y = \eta_1.$$

Lorsque $\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0$,

$$\xi_1 = \frac{\Sigma x_i}{m},$$

$$\eta_1 = \frac{\Sigma y_i}{m},$$

alors le point G_1 coïncide avec le point G ; donc toutes les normales à la courbe Q passent par le même point G ; donc, dans ce cas, la courbe Q est un cercle qui a son

centre en G, et qui a pour rayon la distance du point G au point (α, β).

Le calcul direct conduit au même résultat. En effet, l'équation de la courbe Q est, dans ce cas,

$$\sum [(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2] = k^2.$$

Or cette équation, en ayant égard à l'équation

$$\sum [(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2] = k^2,$$

lieu des points P, peut se mettre sous la forme

$$(a - \xi)^2 + (b - n)^2 = (\alpha - \xi)^2 + (\beta - n)^2,$$

où

$$\xi = \frac{\Sigma x_i}{m}, \quad n = \frac{m}{\Sigma y_i},$$

ce qui vérifie parfaitement l'énoncé précédent.

5°. Le lieu du point G_1 s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (8) et (11).

Dans le cas de

$$\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0,$$

ce lieu est le point G.

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (5) et (10).

6°. Il résulte de la proposition 2° que la courbe P est l'enveloppe des courbes Q (*).

On peut d'ailleurs vérifier cette propriété par le calcul

Application.

Prenons pour la courbe (1)

$$y^2 = 2px,$$

(*) Car (α, β) est un point quelconque de la courbe P. Tm.

et supposons

$$\varphi = \sum n_i - k^2 = 0.$$

Les (x_i, y_i) seront donnés par les équations

$$y^2 = 2px,$$
$$(\alpha - x)y + p(\beta - y) = 0,$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$(14) \quad \begin{cases} y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0, \\ x = \dfrac{y^2}{2p}. \end{cases}$$

Soient y_1, y_2, y_3 les trois racines de la première des équations (14) et x_1, x_2, x_3 les valeurs correspondantes données par la seconde; on aura, sachant que

$$n_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2,$$

$$(15) \quad \begin{cases} 3(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha(x_1 + x_2 + x_3) - 2\beta(y_1 + y_2 + y_3) \\ \qquad + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = k^2. \end{cases}$$

En s'appuyant sur les formules qui donnent la somme des puissances semblables des racines en fonction des coefficients, on trouve

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -4p(p - \alpha),$$
$$y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = 8p^2(p - \alpha)^2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2p}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = -2(p - \alpha),$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2(p - \alpha)^2.$$

L'équation de la courbe P sera donc

$$(16) \quad \alpha^2 + 3\beta^2 + 4p\alpha = 2p^2 + k^2;$$

c'est une ellipse dont l'un des axes principaux est dirigé suivant l'axe des x (*).

On trouvera facilement

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta = 0. \end{cases}$$

La courbe Q est un cercle dont le centre sera donné par les valeurs (17) et son rayon est égal à la distance du point (α, β) au point (ξ, η). La courbe Q aura donc pour équation

$$(18)\qquad \left[a + \frac{2}{3}(\alpha + p)\right]^2 + b^2 = \frac{1}{9}(\alpha - 2p)^2 + \beta^2.$$

Les coordonnées du point G_1 seront

$$(19)\qquad \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta_1 = 0. \end{cases}$$

Le lieu des points G_1 s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (18) et (19), ce lieu est donc un point déterminé par les équations (19).

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (16) et (17); ce lieu est donc la droite $\eta = 0$, c'est-à-dire l'axe des x, ce qui constitue une propriété remarquable dont il est facile de donner l'énoncé.

Les propriétés générales que nous venons d'établir subsistent non-seulement pour des courbes algébriques, mais encore pour les courbes transcendantes telles, que les normales menés d'un point quelconque à la courbe sont en nombre fini (**).

(*) Lorsque la courbe donnée est une conique quelconque, la courbe P, dans le cas actuel, est aussi une conique. TM.

(**) Dans une courbe transcendante, les normales sont toujours en nombre infini, en comprenant les normales imaginaires et celles qui sont

THÉORÈME DE M. BRIOSCHI

(voir t. XV, p. 366);

PAR M. A. GENOCCHI.

La question générale de M. Brioschi se résout bien facilement.

Soit une équation algébrique

$$f(x) = x^n - ax^{n-1} + \ldots \pm l = 0;$$

soient α et β deux de ses racines, p la somme de toutes les autres, q leur produit, r le produit des différences de ces $n-2$ racines prises deux à deux; soient s et t les produits formés avec les différences entre α ou β et chacune des autres $n-2$ racines; enfin désignons par Δ le produit des carrés des différences de toutes les n racines deux à deux, et par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$. Nous aurons

$$(1) \qquad \alpha + \beta = a - p, \quad \alpha\beta = \frac{l}{q},$$

$$(2) \qquad \begin{cases} f'(\alpha) = (\alpha - \beta)s, \\ f'(\beta) = (\beta - \alpha)t, \\ \sqrt{\Delta} = (\beta - \alpha)rst. \end{cases}$$

Ces équations donnent

$$r\frac{f'(\alpha)f'(\beta)}{\sqrt{\Delta}} = \alpha - \beta;$$

mais $f'(\alpha)$, $f'(\beta)$ étant une fonction symétrique entière de α et β, s'exprimera rationnellement à l'aide des équa-

situées à l'infini; on ne saurait en faire abstraction dans l'analyse. Il serait intéressant et facile d'étendre ces recherches aux surfaces. TM.

tions (1). On aura donc

$$\alpha + \beta \quad \text{et} \quad \alpha - \beta,$$

et, par suite, α et β exprimés rationnellement en fonction des autres racines : ces racines y entreront par l'intermédiaire des trois fonctions p, q, r, dont les deux premières sont symétriques, et la troisième n'a que deux valeurs égales, mais de signes contraires.

Pour l'équation du troisième degré, on n'a qu'à faire

$$a = 0, \quad p = q = i, \quad r = \pm 1,$$

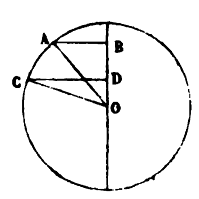
i désignant une des racines.

SOLUTION DE LA QUESTION 352;

Par M. DE ROCHAS,

Élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Étant donné le volume d'un secteur sphérique, trouver la valeur extrême de l'aire totale. Discussion du problème.



Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la hauteur h de la zone qui lui sert de base par un facteur constant $\frac{2}{3}\pi R^2$; par suite, si le volume est donné, h est une quantité constante.

Donc, pour connaître les variations de l'aire totale du secteur engendré par le secteur circulaire ACO tournant autour de BO, aire qui a pour mesure

$$2\pi R h + \pi R (AB + CD),$$

il suffit d'étudier les variations de AB + CD.

Or, si nous appelons x l'angle AOB et y l'angle COB, la question revient à chercher le maximum de

$$(1) \qquad R(\sin x + \sin y) = m,$$

sachant que

$$(2) \qquad R(\cos x - \cos y) = h.$$

Comme les angles x et y ne peuvent varier que de 0 à 180 degrés, leurs sinus seront toujours positifs; par suite, au lieu de chercher le maximum de m, on peut chercher le maximum de m^2.

Elevant au carré les équations (1) et (2) et les ajoutant, il vient

$$2R^2(1 + \sin x \sin y - \cos x \cos y) = m^2 + h^2$$

ou

$$m^2 = 2R^2[1 - \cos(x + y)] - h^2.$$

Dans le second membre, il n'y a que $\cos(x+y)$ qui soit variable; il est clair que m^2 sera maximum quand $\cos(x+y)$ sera égal à -1.

Mais alors

$$x + y = 180^\circ,$$

$$m = R(\sin x + \sin y) = 2R\sin x,$$

$$h = R(\cos x - \cos y) = 2R\cos x,$$

d'où

$$\cos x = \frac{h}{2R}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2R}, \quad m = \sqrt{4R^2 - h^2}.$$

Remplaçant h par sa valeur en fonction du volume V donné, il vient

$$m = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{3V}{2\pi R^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16\pi^2 R^6 - 9V^2}}{2\pi R^2}.$$

Remplaçant m par sa valeur dans l'expression de la surface cherchée, on a pour cette surface s

$$s = \frac{3V}{R} + \frac{\sqrt{(4\pi R^3)^2 - (3V)^2}}{2R}.$$

On voit que la condition de possibilité du problème est

$$V < \frac{4}{3}\pi R^3.$$

QUESTION PROPOSÉE AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1856);

Résolue par MM. SAUGE et CLUTE,
Élèves de l'Institution Loriol.

Trouver deux nombres entiers dont le rapport soit égal à la différence.

SOLUTION DE M. SAUGE.

J'appelle x et y les nombres cherchés. On aura

$$\frac{x}{y} = x - y,$$

d'où

$$x = \frac{y^2}{y - 1}.$$

Actuellement je pose

$$y - 1 = a.$$

Il en résultera

$$x = \frac{(a+1)^2}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a}$$

Or x doit être entier, donc $\frac{1}{a}$ est entier ; il s'ensuit

$$a = 1,$$

et, par conséquent,

$$y = 2, \quad x = 4.$$

SOLUTION DE M. CLUTE.

L'équation

$$\frac{x}{y} = x - y$$

donne

$$x = \frac{y^2}{y-1}.$$

De ce que x est entier, il résulte que $y - 1$ doit diviser y^2. Or $y - 1$ est premier avec y qui est le nombre entier immédiatement supérieur à $(y - 1)$. Il s'ensuit que $y - 1$ est premier avec y^2. Donc $y - 1$ ne peut diviser y^2 qu'autant que $y - 1$ est égal à 1. D'où

$$y = 2,$$

et, par conséquent,

$$x = 4.$$

Note. L'équation générale est

$$x(y + a) = f(y),$$

a est un nombre et f désigne une fonction entière à coefficients entiers. L'opération $\frac{f(y)}{y+a}$ amène le résidu frac-

tionnaire $\frac{p}{y+a}$, et il y a autant de solutions que le nombre entier p a de diviseurs, l'unité comprise. TM.

QUESTION D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1856).

Reconnaître à PRIORI *que l'équation*

$$xy + yz + xz = 0$$

représente un cône droit à base circulaire (les coordonnées étant supposées rectangulaires).

Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, toute équation du second degré

$$f(x, y, z) = 0,$$

symétrique par rapport aux trois coordonnées x, y, z, représente une surface de révolution autour de la droite $x = z$, $y = z$; en supposant toutefois que cette équation représente une surface. C'est ce que nous allons démontrer.

Remarquons d'abord que l'équation proposée

$$f(x, y, z) = 0,$$

étant, d'après l'hypothèse, symétrique par rapport aux deux coordonnées x, y, le plan qui divise en deux parties égales le dièdre que forment les deux plans coordonnés ZX, ZY est nécessairement un plan *principal*. En effet, nommons M un point quelconque de la surface et a, b, c les coordonnées x, y, z de ce point; l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

admettra la solution

$$x = a,\quad y = b,\quad y = c.$$

Désignons par M′ le point symétrique de M par rapport au plan bissecteur considéré ; les coordonnées x, y, z de M′ auront pour valeurs b, a, c. Or il est supposé que l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

conserve les mêmes solutions lorsqu'on y change x en y et y en x ; donc on peut conclure de ce que cette équation admet la solution

$$x = a,\quad y = b,\quad z = c,$$

qu'elle admet aussi la solution

$$x = b,\quad y = a,\quad z = c.$$

Ainsi le point M′ appartient à la surface, et, par conséquent, le plan bissecteur $x = y$ est un plan principal de la surface.

On démontrera de même que les deux plans bissecteurs $x = z$, $y = z$ sont des plans principaux.

Cela posé, menons un plan perpendiculaire à l'intersection [$x = z$, $y = z$] des trois plans principaux en un point quelconque C de cette droite. Ce nouveau plan coupera les trois premiers suivant trois droites passant par le point C et qui seront des axes de la courbe déterminée par son intersection avec la surface. Cette courbe du *second degré* ayant trois axes est nécessairement une circonférence dont le centre se trouve au point C sur la droite $x = z$, $y = z$. Il en résulte que l'équation proposée

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une surface de révolution autour de la droite $x = z$, $y = z$.

De ce principe, on conclut immédiatement que le cône représenté par l'équation homogène

$$xy + yz + xz = 0$$

est un cône de révolution dont l'axe a pour équations

$$x = z, \quad y = z. \qquad \text{G.}$$

RECTIFICATION ET SOLUTION DE LA QUESTION 289

(voir t. XIII, p. 182, et t. XIV, p. 38);

PAR M. L. BOURDELLES,
Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Si dans un triangle rectiligne ABC on a

$$A < B:$$

1° si l'on mène aux côtés opposés les transversales AD et BE telles que

$$CAD \gtreqless CBE,$$

alors

$$AD > BE \text{ (*)};$$

2° si

$$AD = BE \quad \text{et} \quad \frac{DAB}{DAC} = \frac{EBA}{EBC},$$

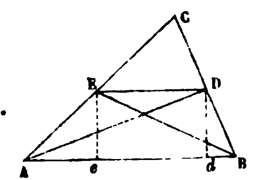
alors

$$A = B.$$

1°. Si les triangles CAD, CBE sont égaux en surface,

(*) Cette conclusion n'est pas vraie dans tous les cas, comme on le verra plus loin.

les triangles DAB, EBA le seront aussi, et comme ils ont



même base AB, leurs hauteurs Dd, Ee seront égales, donc la ligne ED, qui joint les sommets E, B, sera parallèle à AB. Mais les triangles rectangles AeE, BdD montrent que

$$Ae > Bd, \quad \text{car} \quad A < B, \quad AE > BD,$$

puisque

$$AC > CB \quad \text{et} \quad Ee = Dd;$$

on aura donc

$$Ae + ed > Bd + ed$$

ou

$$Ad > Be,$$

et, par conséquent,

$$AD > BE,$$

à cause des triangles rectangles AdD, BeE.

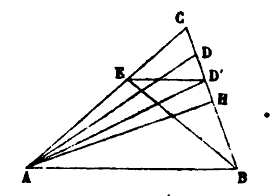
On a supposé que les transversales rencontraient les côtés du triangle. Le théorème existe encore si elles rencontrent ces côtés prolongés dans le sens AC et BC. On a au contraire $AD < BE$, si elles rencontrent les côtés prolongés en sens contraire.

2°. On a

$$CAD < CBE.$$

Abaissons du point A sur BC la perpendiculaire AH. Supposons $CBE \leq CAH$; si par le point E on mène la parallèle ED' au côté AB, en joignant au point A le

point D′ où elle rencontre BC, on aura, en vertu de ce



qui précède

$$EB < AD' \leqq AD.$$

C. Q. F. D.

Mais si CBE > CAH, le théorème n'existe plus (*).

De la relation

$$\frac{DAB}{DAC}=\frac{EBA}{EBC},$$

on déduit

$$\frac{DAB}{ABC}=\frac{EBA}{ABC}.$$

Donc

$$AB.EB.\sin EBA = AB.AD.\sin DAB,$$

c'est-à-dire que dans tous les cas les angles EBA, DAB sont égaux; par conséquent les triangles EBA, DAB sont aussi égaux. Donc

$$A = B.$$

On peut démontrer le théorème proposé en supposant que CAD et CBE désignent des angles. En effet, si

$$CAD = CBE,$$

les triangles CAD, CBE sont semblables et on a

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{EB}.$$

(*) On voit à priori que le théorème n'est pas toujours vrai, car si l'on suppose CBE différant très-peu de la surface du triangle, et CAD différant

Mais

$$AC > BC,$$

donc

$$AD > EB.$$

C. Q. F. D.

Ce théorème est vrai aussi quand les transversales rencontrent les prolongements des côtés.

Mais si CAD < CBE, le théorème ne subsiste que lorsque EBC < 90 — E — ....

Nota. Ces diverses propositions se démontrent facilement par la trigonométrie, qui a l'avantage de montrer clairement les restrictions à apporter dans l'énoncé.

SUR L'ELLIPSE DE CASSINI;

D'APRÈS M. H. D'ARREST.

(*Astron. Nachr.* 1854, t. XXXVIII, p. 199.)

1. Soient:

$2e$ = la distance des deux foyers;

$2a$ = le grand axe;

d = le produit constant des rayons vecteurs.

On a pour l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires et focales, origine au centre,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) - d^4 + e^4 &= 0,\\ \rho^4 - 2e^2\rho^2\cos^2\varphi - d^4 + e^4 &= 0.\end{aligned}\right.$$

Prenons a pour unité et désignons le demi petit axe par b, de sorte que $d^2 + e^2 = 1$, $b^2 = d^2 - e^2$,

$$(2)\qquad e = \sqrt{\frac{1-b^2}{2}},\quad d = \sqrt{\frac{1+b^2}{2}},$$

---

aussi très-peu de CAH, on aura EB > AD, ce qui est le contraire de ce qu'indique l'énoncé.

l'équation polaire devient

$$\rho^4 - (1 - b^2)\rho^2 \cos 2\varphi - b^2 = 0.$$

Soit une sphère de rayon 1 et ayant même centre que la courbe de Cassini. Considérons cette courbe comme étant dans le plan de l'équateur et faisons la projection stéréographique de cette courbe; le pôle étant dans un hémisphère et la projection dans l'hémisphère opposé, α et δ étant des coordonnées sphériques, l'équation de la courbe sphérique sera

$$(3)\qquad \left(\frac{1 - \sin\delta}{1 + \sin\delta}\right)^2 - \frac{1 - \sin\delta}{1 + \sin\delta}(1 - b^2)\cos^2\alpha = b^2.$$

Si l'on transporte l'origine au centre de la projection et si l'on désigne les nouvelles coordonnées sphériques par α' et δ', de sorte que

$$\cos\delta' \cos\alpha' = \sin\delta,$$
$$\cot\delta' \sin\alpha' = \tang\alpha,$$

après quelques légères réductions, l'équation (3) se change en celle-ci :

$$(4)\qquad \cos\delta' = D\cos\alpha' \quad \text{ou} \quad D = \frac{1 + b^2}{1 - b^2}.$$

Ainsi la courbe est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre circulaire droit de diamètre D et passant par le centre de la sphère.

Comme

$$b^2 = \frac{D - 1}{D + 1}, \quad e = \sqrt{\frac{1}{D + 1}}, \quad d = \sqrt{\frac{D}{D + 1}};$$

donc : 1°. Si D est plus grand que 2, on obtient l'ellipse de Cassini;

2°. Si D est compris entre 1 et 2, alors la courbe est fermée avec inflexion;

3°. Si $D = 1$, on a la lemniscate de Bernoulli ;

4°. Si $D < 1$, on a les deux ovales avec un demi petit axe imaginaire.

THÉORIE ANALYTIQUE DE LA PERSPECTIVE-RELIEF ;

D'APRÈS M. AUGER,
Professeur à Dantzig.

(*Astron. Nachr.*, t. XXXVIII, p. 906 ; 1854.)

1. Soient donnés : 1° un système de n points ayant pour coordonnées respectives $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$; 2° n plans parallèles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Par l'origine et les n points menons des droites ; désignons par $x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, \ldots, x'_n, y'_n, z'_n$ les intersections respectives de ces droites avec les plans $A_1, A_2, \ldots, A_n$; on aura aussi un second système de n points. Supposons que l'on a ces relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{ax + by + cz + d}{mx + ny + pz + q}, \\ Y &= \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{mx + ny + pz + q}, \\ Z &= \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{mx + ny + pz + q}, \end{aligned}\right.$$

où les x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque du premier système et X, Y, Z les coordonnées correspondantes du deuxième système. Ces relations étant homographiques, on sait qu'à trois points en ligne droite dans le premier système répondent trois points en ligne droite dans le second système ; à quatre points dans un même plan du premier système répondent quatre points dans un même plan du deuxième système.

2. Supposons que l'on n'ait que deux plans A_1, A_2 parallèles au plan des xz et donnés par les équations

$$y = \alpha, \quad y = \beta,$$

et si l'on a les relations

$$X = \frac{\beta x}{\beta - \alpha + y},$$

$$Y = \frac{\beta y}{\beta - \alpha + y},$$

$$Z = \frac{\beta z}{\beta - \alpha + y}.$$

le point X, Y, Z est dit l'image *bas-relief* du point x, y, z, l'œil étant placé à l'origine des coordonnées.

Etant donnée l'équation d'une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'image *bas-relief* dc cette surface est une autre surface

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

Si les deux plans se confondent, alors $\beta = \alpha$ et

$$X = \frac{\beta x}{y},$$

$$Y = \beta,$$

$$Z = \frac{\beta z}{y}:$$

on a la perspective ordinaire sur un seul plan, et les trois dimensions sont figurées par deux dimensions.

Si $\beta - \alpha$, intervalle de deux plans A_1, A_2, devient infini, alors

$$X = x,$$

$$Y = y,$$

$$Z = z,$$

c'est-à-dire l'image se confond avec l'objet, et on a la ronde bosse; dans tout autre cas, les dimensions sont altérées (*).

GRAND CONCOURS DE 1856

(voir t. XIV, p. 414).

CLASSE DE LOGIQUE (SECTION DES SCIENCES) (4 JUILLET).

Mathématiques.

Etant donnés un cercle et deux perpendiculaires à l'extrémité d'un diamètre AB, mener une tangente CD telle, que le volume engendré par le trapèze ainsi formé tournant autour du diamètre AB soit égal à une sphère de rayon donné.

Exposer la méthode à suivre pour la résolution des questions de maximum et de minimum, et appliquer la méthode à l'exemple suivant : Dans un triangle rectangle dans lequel la somme des côtés de l'angle droit est constante, trouver la perpendiculaire maximum abaissée sur l'hypoténuse.

CLASSE DE SECONDE (SCIENCES) (4 JUILLET).

Mathématiques.

1°. Volume de la pyramide tronquée et du tronc de cône.

2°. Trouver le rayon de la base supérieure d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base inférieure égale le rayon d'une sphère donnée et que le volume du tronc

(*) M. Poudra a composé un Traité complet de perspective où se trouve une nouvelle théorie des bas-reliefs. La publication de cet ouvrage serait profitable aux savants et aux artistes.

de cône et celui de la sphère sont dans un rapport donné.

Physique (29 *juillet*).

1°. Un ballon de verre dont le volume extérieur est de 10 mètres cubes à zéro degré est en équilibre dans l'air sec à cette température et à la pression de $0^{m},75$. Ceci posé, on suppose que la température s'élève à 30 degrés, que l'air se sature d'humidité à cette température, que la pression totale devienne $0^{m},745$. On demande d'exprimer en grammes les variations que ces changements des conditions atmosphériques auront apportées à la perte de poids que le ballon éprouve par le fait de son immersion dans l'air.

Le coefficient cubique du verre $= \frac{1}{38700}$;
Tension maximum de la vapeur à 30 degrés $= 0,0035$;
Densité de la vapeur par rapport à l'air $= \frac{5}{8}$.

2°. Exposer les méthodes à l'aide desquelles on peut déterminer le nombre de vibrations qui répond à un son donné.

CLASSE DE RHÉTORIQUE (SCIENCES).

Mathématiques.

1°. Des éclipses.

2°. On demande les deux intersections de deux paraboles dont on connaît les directrices et les foyers.

Mécanique.

Les lois du mouvement démontrées d'après les machines d'Atwood et de Morin.

CLASSE DE TROISIÈME (SCIENCES).

Mathématiques.

1°. Extraire la racine carrée de 19 à moins de 0,01 et exposer sur cet exemple la théorie de l'opération.

2°. On inscrit dans un cercle un quadrilatère ABCD dont deux côtés contigus AB, AC sont égaux; on tire les deux diagonales AD, BC qui se coupent en un point T. On demande de démontrer que chacun des côtés égaux AB, AC est moyen proportionnel entre la diagonale entière AD et le segment AT de la diagonale AD.

Mathématiques spéciales.

1°. Démontrer que si quatre forces se font équilibre, on peut considérer leurs directions comme des génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe.

Note. Ce théorème est connu depuis longtemps. Il est dû à M. Chasles, qui, après avoir démontré celui-ci : *Quand quatre forces se font équilibre, le volume du tétraèdre construit sur deux quelconques d'entre elles (prises pour arêtes opposées) est égal au volume du tétraèdre construit sur les deux autres,* ajoute : « Quatre forces qui se » font équilibre jouissent de plusieurs autres propriétés, » par exemple, de celle-ci, facile à démontrer : *Ces quatre » forces sont toujours les génératrices d'un même mode » de génération d'un hyperboloïde à une nappe.* » (*Mémoire de Géométrie sur les systèmes des forces, etc.*, inséré dans la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quételet, tome VI, page 81-120, année 1830 *Voir* page 110.)

2°. Développer log $(1 + x)$ en série.

Physique et Chimie.

Théorie du pendule; phosphore; acide phosphorique; acide phosphoreux (préparation).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE; CONCOURS D'ADMISSION EN 1856

(voir t. XIV, p. 419).

COMPOSITIONS ÉCRITES (PARIS).

Mathématiques.

Discuter l'équation

$$\rho^2 = A + B \sin\omega + C \sin^2\omega$$

et faire la classification des diverses courbes qu'elle représente quand on considère ρ et ω comme des coordonnées polaires.

Calcul trigonométrique.

Sur la surface d'une sphère de rayon R on trace un petit cercle de rayon r; on divise la circonférence de ce petit cercle en trois parties proportionnelles aux nombres 1, 2, 3 et on joint les points de division A, B, C par des arcs de grand cercle.

Cela posé, on demande de calculer les côtés du triangle sphérique ABC en mètres, la surface en mètres carrés et les angles en degrés, minutes, secondes.

On prendra

$$R = 366198^{\text{m}},$$
$$r = \cos(48^\circ 50' 13'').$$

R est le rayon terrestre; r le rayon du parallèle de Paris.

Géométrie descriptive.

On donne un cylindre vertical dont la base sur le plan horizontal est un cercle.

On coupe ce cylindre par un plan perpendiculaire au plan vertical et incliné de 45 degrés sur le plan horizontal ; on prend l'intersection pour base d'un nouveau cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de cette base. Enfin un point de cette nouvelle surface cylindrique est donné par sa projection horizontale. On demande de trouver la projection verticale et de mener par ce même point le plan tangent à la deuxième surface cylindrique.

N. B. Pour l'uniformité, on prendra les données comme il suit : le centre de la base du premier cylindre sera à 3 centimètres en avant de la ligne de terre et le rayon de cette base sera de 1 centimètre. Le plan par lequel on coupe ce cylindre et qui est incliné de 45 degrés par rapport au plan horizontal devra couper l'axe du cylindre à 4 centimètres au-dessus du plan horizontal, et la trace horizontale de ce plan sera placée à gauche de cet axe.

Enfin la projection horizontale du point par lequel on veut mener un plan tangent au second cylindre sera placée à 25 millimètres en avant de la ligne de terre et sa distance au centre du cercle sera de 15 millimètres.

Composition française.

Jeanne d'Arc à Orléans.

ÉCOLE DE SAINT-CYR.

CONCOURS D'ADMISSION EN 1856 (EXAMENS DE PARIS)

(voir t. XIV, p. 424) ;

Composition écrite.

Rentrée des troupes victorieuses de Crimée.

Mathématiques.

Calculer la hauteur SP d'une montagne au-dessus du plan horizontal qui passe en A.

$$AB = 2356^{m},70,$$
$$SAB = 63^{\circ}.19'.25'',$$
$$SBA = 48.35.42,$$
$$SAD = 43.19.50.$$

Thème allemand.

ÉCOLE IMPÉRIALE NAVALE.

CONCOURS D'ADMISSION EN 1856 (EXAMENS DE PARIS).

Composition écrite.

Narration : Les deux orphelins.

Calcul trigonométrique.

Résoudre un triangle, connaissant :

Le côté $a = 2856^{m},031$,
Le côté $b = 3246^{m},927$,
L'angle $c = 48^{\circ}\ 45'\ 2'',4$.

Version latine.

ÉCOLE IMPÉRIALE FORESTIÈRE.

CONCOURS D'ADMISSION EN 1856 (EXAMENS DE PARIS).

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Zoologie.

Description de l'appareil de la circulation chez les Mammifères.

Botanique.

Structure générale du fruit; caractère des cariopses, samares, gousses, capsules.

Minéralogie.

Caractères généraux du gypse.

Arithmétique.

Calcul des nombres décimaux; approximations à une unité décimale donnée; erreurs relatives correspondantes des données et des résultats.

Algèbre.

Partager une somme P en deux parties telles, que leur produit Q soit un maximum. Des maxima et minima de deuxième degré.

Applications.

Description du graphomètre; manière de mesurer les angles avec cet instrument, et des précautions qu'il faut prendre dans son maniement.

Trigométrie et calcul logarithmique.

L'angle A d'un triangle $= 40^\circ\ 56'$;

Les deux côtés comprenant l'angle sont :

$$b = 715^m,77,$$
$$c = 878^m,12.$$

Calculer les autres parties du triangle et sa surface.

Cosmographie.

Calendrier.

Version latine.

APPLICATIONS DIVERSES DES THÉORIES DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Construction des sections coniques déterminées par cinq conditions;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

---

1. *On donne cinq points* a, b, c, d, e.

Ire Solution. Les rayons *ac*, *ad*, *ae* et leurs homologues *bc*, *bd*, *be* appartiennent à deux faisceaux homographiques. Donc si l'on mène arbitrairement un rayon *af*, on connaîtra le rayon correspondant *bf*, et, par suite, le point *f*, intersection des deux rayons; on a donc un sixième point de la conique, etc.

Si l'on prend le rayon *ab* au lieu de *af*, son homologue *bt* dans le second faisceau sera la tangente en *b*, etc.

IIe Solution. *abcd* forme un quadrilatère inscrit dans la conique cherchée. Par le point *e*, on mènera une droite quelconque *ef* et l'on cherchera le point *f*, conjugué du point *e* dans l'involution déterminée sur cette droite par les points où elle rencontre les côtés opposés du quadrilatère. Ce point *f* appartiendra à la conique.

Si l'on veut trouver la tangente *bt* en *b*, on regardera

acbt comme un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont infiniment voisins en *b* et la droite *ed* comme une transversale de ce quadrilatère. Cette transversale coupe les côtés opposés *ba*, *bc* en α, γ, la courbe en *e* et *d* et les cotés opposés *ac*, *bt* en δ et x. Ces six points formant une involution, on déterminera le point x, et, par suite, la tangente *bt*.

IIIᵉ Solution. Par le point *e*, on mène une droite quelconque *ef* et l'on forme ainsi un hexagone inscrit *abcdef* dont le sixième sommet *f* est inconnu. Soit α le point de rencontre de *ab* et de *de*, β celui de *bc* et de *ef*; le côté *cd* coupe $\alpha\beta$ au point où aboutit sur cette droite le côté inconnu *af*, ce qui fixe le point *f* (théorème de Pascal).

Si l'on veut trouver la tangente en *b*, on regarde cette tangente comme le sixième côté d'un hexagone dont deux sommets se confondent en *b*. La tangente *bt* coupe le côté *ed* en un point γ qui est en ligne droite avec les points de concours α, β des côtés *ba* et *cd* avec les côtés opposés *ae* et *bc*; elle est ainsi déterminée.

On peut encore résoudre le problème en se servant du théorème de Carnot, etc.

2. *On donne cinq tangentes* A, B, C, D, E.

Iʳᵉ Solution. Les tangentes C, D, E déterminent sur A et B deux divisions homographiques. On obtient donc une sixième tangente quelconque passant par un point pris sur A, en joignant ce point au point homologue de la division marquée sur B.

Si l'on prend pour ce point le point de concours (A, B) des deux tangentes A, B, on obtient immédiatement le point de contact de la courbe avec A ou B, suivant qu'on regarde ce point comme appartenant à B ou à A. On peut ainsi ramener la question à celle des cinq points.

IIᵉ Solution. Quatre des tangentes données forment

un quadrilatère circonscrit. Qu'on prenne sur la cinquième un point quelconque *a* et qu'on le joigne aux quatre sommets du quadrilatère ; le sixième rayon, conjugué à la cinquième tangente dans l'involution que ces quatre droites déterminent, est une tangente issue du point *a*.

Supposons qu'on veuille trouver le point de contact *t* de la tangente B. On considère le quadrilatère formé par les tangentes A, C, B dont deux côtés se confondent en un seul suivant B, et dont (A, C), (A, B), (B, C) et *t* sont les quatre sommets. Le sommet *t* est inconnu, mais les six rayons qui aboutissent au point de concours I de D et E, savoir D, E, I(A, B), I(B, C), I(A, C), I*t* sont en involution, et cinq sont connus. Il sera donc facile de déterminer le sixième, et, par suite, le point cherché *t*.

IIIe Solution. On détermine aussi une sixième tangente quelconque au moyen du théorème de M. Brianchon.

Si l'on veut, au moyen du même théorème, trouver le point de contact *t* de la tangente B et que *abcde* soit le pentagone formé par les cinq tangentes données, on joindra *ad* et *be* qui se coupent en O ; la droite *c*O ira couper *ac*, c'est-à-dire B, au point cherché *t*.

Nota. Dans le cas de la parabole, la cinquième tangente est donnée implicitement ; c'est la droite à l'infini. Les quatre qui sont données forment un quadrilatère. Par les sommets de ce quadrilatère, on mènera quatre parallèles dans une direction arbitraire ; on les coupera par une transversale quelconque sur laquelle on cherchera le *point central* de l'involution qu'elles y déterminent, et la parallèle aux autres droites, menée par ce point, sera sur une cinquième tangente.

Cette construction dérive, sans difficulté, de la deuxième solution.

3. *On donne quatre points et une tangente.*

Il suffit de trouver un cinquième point, et la question sera ramenée à la première.

Ire Solution. Soient *abcd* le quadrilatère donné et *e* le point de contact inconnu de la tangente. Soient α, α' et β, β' les points où cette tangente rencontre respectivement les côtés opposés du quadrilatère. Ces points déterminent une involution dont *e* est un point double. Il sera donc facile à trouver. Mais on voit que la question a deux solutions.

Nota. Dans le cas de la parabole, la tangente est à l'infini. Soit S le point de concours des côtés opposés *ad*, *bc* du quadrilatère donné. Qu'on mène S*c'* et S*d'* parallèles respectivement aux deux autres côtés opposés. On a quatre rayons S*c'*, S*d'*, S*c*, S*d* issus du point S, qui, conjugués deux à deux, déterminent une involution. Chacun des deux rayons doubles de cette involution est parallèle à l'axe d'une parabole qui satisfait à la question.

Soit *c*X une parallèle à l'un de ces deux rayons doubles menée par le point *c* pour lequel on veut, par exemple, trouver la tangente *ct* à la parabole dont *c*X est un diamètre. Les deux faisceaux X*a*, X*b*, X*c*, X*d* (celui-ci formé de rayons parallèles) et *ca*, *cb*, *cd*, *ct* sont homographiques. Si l'on prend les points de concours inverses *a'*, *b'* des rayons homologues, la droite *a'b'* sera parallèle à la tangente en *c*, parce que les deux points *a'* et *b'* sont en ligne droite avec le point où la tangente *ct* rencontre la tangente en X, c'est-à-dire la droite située à l'infini.

IIe Solution. Soit *et* la tangente donnée dont le point de contact *e* est inconnu. On peut regarder la figure comme un hexagone dont les côtés opposés sont *ab*, *ed*; *be*, *dc*;

et, *ae*. Le point *t*, où la tangente donnée rencontre le côté *ac*, est connu. Soient α et β les points de concours de *ab* avec *de* et de *cd* avec *be* respectivement. Les points α, β, *t* sont en ligne droite, par la propriété de l'hexagone inscrit. Il s'agit donc de mener, par les deux points fixes *b* et *d*, deux rayons $b\beta$, $d\alpha$ qui se coupent en *e* sur la tangente donnée et tels, que les points α, β et *t* soient en ligne droite. Ces rayons sont évidemment deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques qui marquent sur les côtés *ab*, *cd*, respectivement deux séries de points pareillement homographiques. Si l'on joint le point *t* à ces points, on formera autour du sommet *t* deux faisceaux homographiques dont les *rayons doubles* fourniront l'un et l'autre une solution de la question proposée.

Nota. Dans le cas de la parabole, la tangente *et* est à l'infini, la construction reste d'ailleurs la même, et chaque rayon double est un diamètre d'une parabole qui satisfait à la question.

4. *On donne quatre tangentes et un point.*

Ire Solution. On détermine une cinquième tangente en cherchant les rayons doubles de l'involution qui est déterminée par les quatre rayons, conjugués deux à deux, qu'on obtient en joignant le point donné aux sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes données. Chacun des deux rayons doubles est une tangente à la conique; on a donc deux solutions distinctes.

Nota. Pour la parabole, on donne un point et trois tangentes, la quatrième est à l'infini. La solution est la même. Deux des rayons de l'involution sont parallèles respectivement à deux des tangentes données.

IIe Solution. La figure représente un hexagone circonscrit *abcdef*. Les côtés *ab*, *bc*, *ef*, *af* sont donnés de direction, ainsi que le point *d*. Il s'agit de mener par le

point *d* une droite *cde* qui rencontre les côtés indéfinis *bc* et *fe* en *c* et *e* respectivement et telle, que les droites *be* et *cf* se croisent en un point de la droite *ad*.

Or il est évident que si l'on fait pivoter la droite *ce* autour du point *d*, les points variables *c* et *e* marqueront sur *bc* et *fe* respectivement deux divisions homographiques. Les faisceaux formés par les rayons variables *be*, *fc* sont pareillement homographiques, et il en sera de même des deux divisions de points que ces rayons marquent sur la droite *ad*. Si l'on détermine les *points doubles* de ces deux divisions, chacun d'eux étant joint aux points *b* et *f*, fournira une solution de la question.

Nota. Dans le cas de la parabole où la tangente *fe*, par exemple, est tout entière à l'infini, voici à quoi se réduit la construction générale. On mène par le point donné *d* une droite quelconque qui coupe le côté indéfini *bc* au point γ. Par ce point, on mène parallèlement à *af* une droite qui coupe *ad* en α', et par le point *b*, parallèlement à $d\gamma$, une droite qui coupe *ad* en α. Les points α, α' appartiennent respectivement à deux divisions homographiques dont on cherche les points doubles ε, φ. La droite *dc*, parallèle à $b\varepsilon$, est tangente à l'une des deux paraboles qui satisfont aux conditions proposées. La droite *dc'*, parallèle à $b\varphi$, est tangente à la seconde.

5. *On donne trois points et deux tangentes.*

Soient *a*, *b*, *c* les trois points donnés, T, T' les deux tangentes qui se coupent au point O et qui touchent respectivement la courbe aux deux points *d*, *e* qu'il s'agit de déterminer.

On peut regarder la corde de contact *de* comme représentant un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont infiniment voisins l'un de l'autre en *d*, tandis que les deux autres le sont pareillement en *e*. La corde *bc* étant considérée comme une transversale du quadrilatère et de la

courbe, fournit une relation d'involution, en vertu du théorème de Desargues, entre les six points où elle coupe les côtés opposés du quadrilatère et la courbe. Ces points se réduisent ici à cinq, savoir : t, t' sur les tangentes dO, eO respectivement; ε sur les deux autres côtés opposés qui se confondent en un seul de; et enfin b, c sur la courbe. Le point ε est donc un point double de l'involution déterminée par les segments bc, tt'.

Si l'on prend ab comme transversale au lieu de bc, on trouvera de même un point φ appartenant à la corde de contact de, qui se trouve ainsi déterminée par les deux points ε et φ. Mais comme chacune des deux relations d'involution fournit deux points doubles ε, ε' et φ, φ', on obtiendra quatre positions distinctes de la corde de, savoir $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon\varphi'$, $\varepsilon'\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, c'est-à-dire quatre solutions différentes du problème proposé.

Nota. Dans le cas de la parabole où l'on ne donne qu'une tangente et trois points, on obtient de même quatre solutions. La tangente T' est à l'infini ainsi que le point t'; donc le point t qui lui est conjugué dans l'involution est le *point central* de cette involution dont on connaît en outre le segment bc et dont il s'agit de trouver les points doubles. Chacune des quatre cordes de contact $\varepsilon\varphi$ est un diamètre d'une parabole satisfaisant aux conditions proposées.

6. *On donne trois tangentes et deux points.*

Nous allons déterminer deux nouvelles tangentes à la courbe aux points donnés a, b. Soient AB, BC, CD celles qui sont données. Désignons par O le point de concours inconnu des deux tangentes cherchées; si l'on regarde l'angle bOa comme un quadrilatère circonscrit OaOb dont les côtés adjacents se sont confondus deux à deux en un seul Oa ou Ob, on verra tout de suite que la droite BO est un rayon double dans l'involution formée

par les deux couples de rayons conjugués Ba, Bb et BA, BC.

Pareillement, CO est un rayon double de l'involution Ca, Cb, CB, CD. Donc le point O, intersection des rayons BO et CO est déterminé. Mais comme chacune des deux involutions comporte deux tels rayons, on obtient quatre positions distinctes du point O, et, par conséquent, le problème admet, comme le précédent, quatre solutions.

Nota. S'il s'agit d'une parabole, l'une des trois tangentes données est à l'infini, BC par exemple. La construction reste la même en principe; mais ici les deux faisceaux de rayon en involution se composent de droites parallèles, puisque leurs sommets respectifs B et C sont à l'infini. Coupons-les par une transversale quelconque. On aura sur cette droite, relativement au premier faisceau, deux points α, β intersections des rayons conjugués aB, bB; un point ω, intersection du rayon AB dont le conjugué CB est à l'infini, ce qui est cause que ω est le *point central* de l'involution; enfin un point double x, intersection du rayon BX et qu'il s'agit de déterminer. Relativement au second faisceau, on aura de même deux points conjugués d'une involution α', β'; un point central ω', et l'on déterminera un point double y; les droites xO, yO, parallèles respectivement aux tangentes données AB, DC, se couperont au sommet O de l'angle circonscrit à l'arc ab de la parabole, et l'on aura encore quatre solutions, parce que l'on obtiendra deux positions du point x et deux positions du point y.

7. Quelques-unes des données peuvent être imaginaires. Sans entrer dans le détail des différents cas qui peuvent se présenter, supposons qu'on ait à faire passer une conique par quatre points imaginaires et un point réel a.

Le système des quatre points imaginaires peut être

donné au moyen de deux coniques (tracées ou seulement déterminées par cinq conditions) qui ne se coupent en aucuns points réels.

Dans ce cas, menons par le point donné a une transversale qui rencontre les deux coniques données en h, h', i, i' respectivement et la conique qu'on veut construire en a'. Les six points a, a', h, h', i, i' sont en involution; donc on déterminera facilement le point a', et, par suite, autant de points qu'on voudra de la conique cherchée.

L'une des coniques données peut être remplacée par le système de deux droites qui seront, par conséquent, les *axes de symptose* de la première et de celle qu'on a à construire. La construction demeure identiquement la même.

Enfin, on peut ne donner que deux droites L, L' sur lesquelles doivent se trouver deux par deux les points imaginaires ε, φ, γ, θ. Mais alors il faut connaître en outre leurs points milieux ω, ψ et les rectangles de leurs distances à deux points fixes pris sur L et sur L', ou, ce qui en est une conséquence, au point de rencontre m de ces deux droites. Ainsi l'on connaît $m\varepsilon.m\varphi$ et $m\gamma.m\theta$.

Par le point a, menons, parallèlement à L, une droite $aa'n$ qui coupe la conique cherchée en a' et L" en n. On aura, en vertu du théorème de Newton (*Géométrie supérieure*, n° 480),

$$\frac{na'.na}{n\gamma.n\theta}=\frac{m\varepsilon.m\varphi}{m\gamma.m\theta},$$

équation qui fera connaître le point a'. Par ce point, on mènera une parallèle à L' et l'on déterminera un autre point b, et ainsi de suite de proche en proche.

Remarque. Deux des points imaginaires peuvent être donnés à l'infini, soit sur une conique, soit sur un cercle. Dans le premier cas, la conique cherchée est *homothétique* à celle qui est donnée, et dans le second elle est un

cercle ayant pour axe radical avec le cercle donné la droite sur laquelle sont donnés les deux autres points imaginaires.

Etc.

CONSTRUCTION D'UNE MOYENNE PROPORTIONNELLE GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. EDM.-AUG. GOUZY (DE LAUSANNE).

Soient a et b les deux droites données. Sur une droite indéfinie XY portez à partir d'un point A une longueur $AB = b$ (la plus petite des droites données); sur la même droite, prenez une longueur ABC égale à a et la longueur BAD aussi égale à a; enfin des points C et D, comme centres, décrivez avec la même ouverture de compas des arcs de cercles se coupant en O; la droite $OA = OB$ sera la moyenne proportionnelle cherchée.

QUESTIONS.

363. Mener par un point P donné dans l'intérieur de l'angle A une droite BPC qui forme avec les côtés de l'angle un triangle ABC dont le périmètre soit un minimum.

364. Trouver sur le plan du triangle ABC un point o dont la position soit telle, que les circonférences passant par le point o et deux des sommets du triangle soient entre elles comme trois droites a, b, c données.

365. m étant un nombre entier positif, la valeur *en-*

tière et inférieure la plus approchée de $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ est divisible par 2^{m+1}. Soit par exemple $m=1$,

$$(1+\sqrt{3})^3 = 10+6\sqrt{3} = 20,39\ldots;$$

20 est divisible par $2^{1+1}=4$; soit $m=2$,

$$(1+\sqrt{3})^5 = 76+44\sqrt{3} = 152,20\ldots;$$

152 est divisible par $2^{2+1}=8$. (J.-J. SYLVESTER.)

366. Sur une droite AB de *longueur donnée*, on décrit un segment capable d'un *angle donné*. L'extrémité A se meut sur une droite fixe M et l'extrémité B sur une droite fixe N situées l'une et l'autre dans le plan du segment. On demande de trouver : 1° le lieu d'un point *quelconque* du plan du segment, point fixe *relativement* au segment; 2° le lieu d'un point de la circonférence du segment; 3° l'enveloppe du cercle; 4° les mêmes lieux et la même enveloppe lorsque l'*angle donné* est égal à l'angle des deux droites M et N. (DE LA GOURNERIE.)

367. Les côtés d'un angle droit inscrit dans une circonférence de cercle interceptent une demi-circonférence et sous-tendent deux arcs supplémentaires; on mène à chacun de ces trois arcs une tangente telle, que le point de contact soit au milieu de la portion de tangente interceptée entre les côtés de l'angle suffisamment prolongés. Démontrer que les trois points de contact sont les sommets d'un triangle équilatéral.

(Sir FREDERICK POLLOCK, F. R. S., lord chief baron of the Court of Exchequer.)

368. p, q, r sont trois fonctions entières linéaires en x et y; $p=0$, $q=0$, $r=0$ sont les équations respectives des côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC; $p-q=0$, $q-r=0$, $r-p=0$ sont donc les équations de trois droites passant respectivement par les sommets B, C, A,

et se rencontrant au même point D; soient α, β, γ les points où AD rencontre BC, où BD rencontre CA, où CD rencontre AB. Trouver en fonction de p, q, r l'équation de la conique qui touche les côtés du triangle en α, β, γ. (ARTHUR CAYLEY.)

369. Mêmes données que dans la question précédente. Il s'agit de mener deux droites R, S rencontrant AB aux points r_1, s_1, BC aux points r_2, s_2, CA aux points r_3, s_3, de telle sorte que les trois systèmes de cinq points r_1, s_1, A, γ, B; r_2, s_2, B, α, C; r_3, s_3, C, β, A soient en involution, α, β, γ étant des points *doubles*. Trouver en fonction de p, q, r les équations des droites R, S.

(ARTHUR CAYLEY.)

370. Soit le déterminant à n^2 termes

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \ldots, & a_{2n}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \ldots, & a_{3n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \ldots, & a_{nn}, \end{matrix}$$

a_{pq} et a_{qp} sont deux nombres imaginaires conjugués, de sorte que a_{pp} est un nombre réel. Démontrer que le déterminant est réel.

371. Déterminer dans le plan d'un triangle un point tel, qu'en multipliant chaque distance de ce point à un sommet par le sinus de l'angle formé par les deux distances aux deux autres sommets, la somme de trois produits soit un maximum. Démontrer que le centre du cercle inscrit remplit cette condition.

CORRECTION DANS LES TABLES DE CALLET DE 1840, DE VEGA DE 1794 ET DE URSINUS DE 1827.

CALLET, 1840 (*).

	Lisez :	Au lieu de :
log sin 1°.47'.54"	8,496 6763	8,496 9763
log sin 4.38. 1	8,907 3235	8,907 3245
log cot 13.30.50	0,619 1827	9,619 1827
log cot 42.25. 0	0,039 2158	0,039 2258

VEGA, 1794.

	Lisez :	Au lieu de :
log cot 9° 5′ 50″	10,7955426908	10,7955427008

URSINUS, 1827.

	Lisez :	Au lieu de :
log 96° 3′ 48″	983843	983943

Ces corrections sont indiquées par M. Luther (*Astr. Nachr.* t. XLIV, p. 239, 1856, n° 1047).

Ces Tables d'Ursinus sont les suivantes :

Ursinus G.-F. *Logarithmi sex decimalium, scilicet numerorum ab* 1 *ad* 100 000, *et sinuum et tangentium ad* 10″, *quibus additi sunt varii logarithmi et numeri sæpius in mathesi adhibiti.* Grand in-8, Copenhague, 1828.

Les logarithmes sans colonnes de différences; mais au dessus de chaque colonne, il y a des nombres auxiliaires qui servent à trouver les sinus et tangentes des angles moindres que 20° 46′ 40″. Il y a une édition danoise de 1847.

(*) Ces fautes n'existent pas dans l'édition de 1795. Comment se sont-elles produites dans l'édition de 1840, les deux éditions étant stéréotypes?

SOCIÉTÉ DE SECOURS DES AMIS DES SCIENCES.

L'esprit d'abstraction qui crée la théorie crée rarement la fortune; aussi rencontre-t-on malheureusement trop souvent, luttant contre la misère, des hommes, des familles dont les noms rappellent d'honorables souvenirs et se rattachent à des spéculations scientifiques généralement admises, à des inventions devenues usuelles, à des observations fondamentales. Une Société s'est établie pour faire disparaître, autant que possible, cette déplorable anomalie sociale, et pour limiter au moins de douloureux besoins. L'institution est l'œuvre du vénérable baron Thenard, qui veut couronner une carrière depuis si longtemps illustre, en acquérant un nouveau titre au respect de la postérité. Faisant des vœux pour la réussite, nous associant au succès de la noble entreprise, proclamant ses statuts, nous restons fidèles au but de notre recueil uniquement établi dans l'intérêt de la science, intérêt qui exige impérieusement que l'on vienne en aide à ceux qui la cultivent ou qui l'ont cultivée avec désintéressement.

Dans une séance d'inauguration tenue le 5 mars dernier, présidée par l'illustre fondateur, on a arrêté les statuts préliminaires en dix articles, dont voici les principaux, suffisants pour donner idée de l'ensemble.

Article I[er]. Pour faire partie de la Société, il faut être présenté par l'un de ses membres.

Article III. La souscription annuelle est de dix francs.

Indépendamment des souscriptions annuelles, la So-

ciété reçoit avec reconnaissance les dons qui lui sont faits (*).

Les fonds, produit des souscriptions et des dons, sont placés en rentes sur l'État, ou en actions de la Banque de France, ou en immeubles, par les soins du Conseil.

Article V. Les conditions nécessaires pour avoir *droit* à des secours sont :

1°. D'être Français ou étranger naturalisé;

2°. D'être auteur, soit d'un Mémoire ou travail jugé par l'Académie des Sciences digne d'être imprimé parmi ceux des *Savants étrangers*, soit, au moins, d'un Mémoire ou d'un travail approuvé par elle;

3°. D'avoir des besoins réels.

Celui qui, à l'avenir, remplira ces trois conditions aura droit à un secours annuel.

Ce même droit appartiendra à ses père et mère, à sa veuve et à ses enfants, pourvu qu'à l'époque de sa mort ils aient des besoins réels.

Article VII. Le Conseil, sur le Rapport d'une Commission de cinq de ses membres, décide, dans le courant de chaque année, s'il y a lieu d'accorder des secours, quelles sont les personnes qui y ont *droit* d'après l'article V, et quelle somme doit leur être accordée.

La Société est administrée par un Conseil de trente-six membres pris dans de hautes notabilités scientifiques et industrielles.

Dans la première séance ont été nommés, pour former le Bureau :

Président. . . . . . . M. le baron Thenard.

Vice-Présidents. . { MM. Dumas / Flourens } de l'Institut.

Secrétaire. . . . . . . M. de Senarmont, de l'Institut.

(*) Le fondateur offre un don de *vingt mille francs*.

Le nombre des souscripteurs au 5 mars dépassait 450.

NOTE SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX VOLUMES;

PAR M. CH. LOMBARD,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Licencié ès Sciences physiques et mathématiques.

Considérons un solide compris entre deux plans parallèles au plan des yz; appelons H la distance de ces deux plans; B, B′ et b, respectivement, les surfaces des sections extrêmes et celle de la section parallèle et équidistante. Le volume de ce solide aura pour expression

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4b),$$

pourvu que la surface S d'une section quelconque parallèle au plan des yz soit une fonction rationnelle de l'abscisse de cette section, fonction de la forme

$$S = a + bx + cx^2 + cx^3 \ (*).$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 241.

(Le théorème ne serait plus vrai, si la fonction était d'un degré supérieur au troisième.)

Nous pouvons, sans changer cette condition, supposer l'origine au milieu de la distance H, puisque les formules de transformation des coordonnées étant entières, rationnelles et du premier degré, S ne cessera pas d'être rationnelle et son degré ne sera pas élevé. En posant $H = 2h$, on aura pour l'expression du volume

$$V = \int_{-h}^{+h} (a + ba + cx^2 + ex^3)\, dx = 2x\, h + \frac{2ch^3}{3}.$$

D'un autre côté, on obtiendra les sections B, B' et b en faisant dans l'expression de S successivement

$$x = -h, \quad x = +h, \quad x = 0.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} B &= a - bh + ch^2 - eh^3, \\ B' &= a + bh + ch^2 + eh^3, \\ b &= a. \end{aligned}$$

En éliminant a, b, c, e entre ces trois équations et l'expression de V, on obtient la formule énoncée plus haut.

Cette élimination se fait facilement en ajoutant quatre fois la dernière équation aux deux précédentes ; on a ainsi

$$B + B' + 4b = ba + 2ch^2 = \left(2ah + \frac{2ch^3}{3}\right)\frac{3}{h} = \frac{3V}{h},$$

d'où on tire

$$V = \frac{h}{3}(B + B' + 4b):$$

et comme $h = \frac{H}{2}$, on a, en substituant,

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4b).$$

Cette formule, due à M. Sarrus, s'applique aux pris-

mes et cylindres, aux cônes, pyramides et aux troncs de cônes et de pyramides, à la sphère, aux ellipsoïdes, ainsi qu'aux segments de sphères ou d'ellipsoïdes, etc.

Si l'on suppose, en effet, les bases du cylindre ou prisme parallèles au plan des yz, la section S sera, dans ce cas, une constante, et la condition analytique nécessaire et suffisante pour l'application de la formule se trouve remplie : il est clair, en effet, que pour les prismes et cylindres, les trois sections B, B' et b sont égales et l'expression de V devient $\frac{H}{6} \times 6B$ ou $H \times B$.

Il en est de même pour les cônes et les pyramides. Si l'on suppose l'origine au sommet et le plan de la base parallèle au plan des yz, l'expression de S sera $\frac{Bx^2}{H^2}$, qui est encore une fonction rationnelle. La formule est donc applicable aux cônes, aux pyramides et à leurs troncs.

On le vérifie aisément en remarquant que dans le premier cas $B' = 0$, B est la base de la pyramide, b est le quart de B. L'expression de V devient donc $\frac{H}{6} \cdot 2B$ ou $\frac{B \times H}{3}$.

Si l'on voulait la vérifier pour le tronc, il faudrait évaluer b en fonction de B et de B' et substituer cette valeur dans l'expression de V : on retomberait ainsi sur la formule connue du tronc de pyramide.

Pour cela, appelons x, y, z les côtés homologues des trois sections semblables B, B', b ; on aura

$$\frac{B}{x^2} = \frac{B'}{y^2} = \frac{b}{z^2}$$

ou

$$\frac{\sqrt{B}}{x} = \frac{\sqrt{B'}}{y} = \frac{\sqrt{b}}{z}.$$

Or

$$z = \frac{x+y}{2};$$

donc

$$\sqrt{b} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{2}:$$

d'où l'on tire

$$4b = B + B' + 2\sqrt{BB'}.$$

En substituant dans l'expression de V, on trouve

$$V = \frac{H}{6}\left(2B + 2B' + 2\sqrt{BB'}\right) = \frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right),$$

ce qui est la formule connue.

Enfin le théorème s'applique encore à la sphère, aux ellipsoïdes et à leurs segments. En effet, l'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

l'expression de S sera

$$\pi\beta\gamma\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right),$$

expression rationnelle.

On peut le vérifier, en remarquant que, dans ce cas,

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad b = \pi\beta\gamma \quad \text{et} \quad H = 2\alpha,$$

par suite, V devient

$$\frac{2\alpha}{6} 4\pi\beta\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma;$$

de même pour la sphère.

On déduit aisément de ce théorème une démonstration d'une formule de Simpson fréquemment employée pour le cubage des travaux de terrassement.

On partage le volume à mesurer en un nombre pair $2n$ de tranches au moyen de $2n+1$ plans parallèles et équidistants. Représentons par

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ldots,\ S_{2n+1}$$

les surfaces des sections ainsi obtenues. Appelons h la distance constante de l'une d'elles à la suivante. Regardons comme des troncs de pyramides les volumes compris entre S_1 et S_3, entre S_3 et S_5, entre S_5 et S_7, etc., entre S_{2n-1} et S_{2n+1}. En appliquant à ces troncs successifs la formule que nous venons de démontrer, et remarquant que h n'est que la moitié de la hauteur de chacun de ces troncs, on aura

$$\text{Volume entre } S_1 \text{ et } S_3 = \frac{h}{3}(S_1 + S_3 + 4S_2),$$

$$\text{Volume entre } S_3 \text{ et } S_5 = \frac{h}{3}(S_3 + S_5 + 4S_4),$$

$$\text{Volume entre } S_5 \text{ et } S_7 = \frac{h}{3}(S_5 + S_7 + 4S_6),$$

. . . .

$$\text{Volume entre } S_{2n-1} \text{ et } S_{2n+1} = \frac{h}{3}(S_{2n-1} + S_{2n+1} + 4S_{2n}),$$

et, en ajoutant, on trouve, pour le volume total,

$$V = \frac{h}{3}\left(\begin{array}{l} S_1 + 4S_2 + 2S_3 + 4S_4 + 2S_5 + 4S_6 + \ldots \\ \quad + 2S_{2n-1} + 4S_{2n} + S_{2n+1} \end{array}\right).$$

En d'autres termes, le volume total est égal au tiers de l'équidistance multiplié par la somme des sections extrêmes, augmentée de deux fois la somme des autres sections de rang impair et de quatre fois la somme des sections de rang pair.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES CURIEUX D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. ALEXANDRE ALLEGRET,
Professeur à Paris.

On trouve dans le premier livre de l'*Arithmétique* de Diophante quelques énoncés de problèmes susceptibles d'une grande extension et qui, modifiés légèrement, conduisent à d'autres problèmes linéaires que la sagacité de Leonardo Pisano (*voir* le *Bulletin*, 1855-56) s'est appliquée à résoudre. Je m'occuperai spécialement dans cet article des propositions XXV, XXVI, XXVII et XXVIII, Dioph., liv. Ier, qui rentrent comme cas particuliers dans les deux problèmes d'arithmétique suivants.

Problème I. On range un certain nombre de personnes en cercle, et on donne à chacune une certaine somme dont elle est chargée de remettre une fraction déterminée d'avance à la personne qui se trouve placée à sa droite. Chaque personne reçoit alors de la main gauche une somme, en même temps qu'elle en remet une autre de la main droite. On demande de déterminer quelle somme il faudrait donner primitivement à chacune de ces personnes pour qu'après tous les échanges effectués comme il vient d'être dit, elles se trouvent toutes en possession d'une même somme.

Solution. Ce problème est susceptible d'une solution uniforme, indépendante du nombre des personnes qui entrent dans l'énoncé. Pour fixer les idées, je me bornerai à traiter le cas où il s'agit de cinq personnes; on verra facilement que la méthode est générale.

Soient

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5$$

les cinq fractions données d'avance, et posons, pour plus de simplicité,

$$b_1 = \frac{1}{a_1+1},\quad b_2 = \frac{1}{a_2+1},\quad b_3 = \frac{1}{a_3+1},$$

$$b_4 = \frac{1}{a_4+1},\quad b_5 = \frac{1}{a_5+1},$$

ou

$$a_1 = \frac{1-b_1}{b_1},\quad a_2 = \frac{1-b_2}{b_2},\quad a_3 = \frac{1-b_3}{b_3},$$

$$a_4 = \frac{1-b_4}{b_4},\quad a_5 = \frac{1-b_5}{b_5};$$

on aura, d'après les conditions du problème, cette suite d'équations

$$x_5 + a_1 x_1 = x_1 + a_2 x_2 = x_2 + a_3 x_3 = x_3 + a_4 x_4 = x_4 + a_5 x_5,$$

les cinq inconnues de la question étant représentées par

$$\frac{x_1}{b_1},\quad \frac{x_2}{b_2},\quad \frac{x_3}{b_3},\quad \frac{x_4}{b_4},\quad \frac{x_5}{b_5},$$

et x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 étant cinq autres inconnues auxiliaires qu'il s'agit de déterminer.

Remarquons que, comme il ne peut être question que de la recherche du rapport de ces diverses inconnues, on pourra poser

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}$$

Pour toute autre inconnue, x_3 par exemple, on aura

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

et plus généralement, i ou son résidu suivant le module 5 désignant l'un quelconque des indices 1, 2, 3, 4 ou 5, on aura

$$x_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_{i+4} \end{vmatrix} = a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}a_{i+4} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Faisant passer la dernière ligne du dernier déterminant à la première place, ce qui revient à multiplier le déterminant par $(-1)^3$, on aura

$$x_i = a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}a_{i+4} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} \end{vmatrix}$$

Or ce déterminant est susceptible d'une réduction analogue à la précédente et on est ainsi conduit à la formule suivante d'une remarquable simplicité :

$$\frac{1}{b_i}x_i = \frac{1}{b_i}\left(\begin{matrix} a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}a_{i+4} - a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3} \\ + a_{i+1}a_{i+2} - a_{i+1} + 1 \end{matrix}\right).$$

Application. Supposons qu'on donne

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{3}, \quad b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_4 = \frac{1}{5}, \quad b_5 = \frac{1}{6},$$

on aura

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_3 = 3,\quad a_4 = 4,\quad a_5 = 5$$

et

$$x_1 = 2.3.4.5 - 2.3.4 + 2.3 - 2 + 1 = 101,$$
$$x_2 = 3.4.5.1 - 3.4.5 + 3.5 - 3 + 1 = 10,$$
$$x_3 = 4.5.1.2 - 4.5.1 + 4.4 - 4 + 1 = 37,$$
$$x_4 = 5.1.2.3 - 5.1.2 + 5.1 - 5 + 1 = 21,$$
$$x_5 = 1.2.3.4 - 1.2.3 + 1.2 - 1 + 1 = 20.$$

Les cinq inconnues seront donc proportionnelles aux cinq nombres suivants :

202, 30, 148, 105 et 120,

ce qu'on peut vérifier immédiatement.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 334 (MANNHEIM);

PAR M. ABEL RAINBEAUX
ET M. A. SAINTARD,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Lionnet).

Etant donnés un triangle ABC et un point quelconque O dans l'intérieur de ce triangle, on mène les transversales AOa, BOb, COc; on a l'identité

$$\frac{1}{AOb} + \frac{1}{BOc} + \frac{1}{COa} = \frac{1}{AOc} + \frac{1}{BOa} + \frac{1}{COb}.$$

On a (*voir* page 22)

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{AOB} + \frac{1}{AOb} = \frac{1}{AOc} + \frac{1}{AOC},$$

$$(\beta)\qquad \frac{1}{BOC} + \frac{1}{BOc} = \frac{1}{BOa} + \frac{1}{AOB},$$

$$(\gamma)\qquad \frac{1}{AOC} + \frac{1}{COa} = \frac{1}{COb} + \frac{1}{BOC}.$$

Ajoutant membre à membre (α) et (β), on a

$$(\delta)\qquad \frac{1}{BOC}+\frac{1}{AOb}+\frac{1}{BOc}=\frac{1}{AOc}+\frac{1}{BOa}+\frac{1}{AOC}.$$

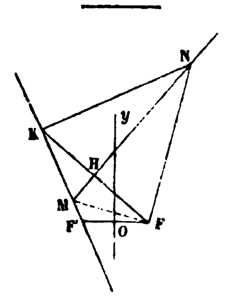
En ajoutant membre à membre (δ) et (γ), on a enfin

$$\frac{1}{AOb}+\frac{1}{BOc}+\frac{1}{COa}=\frac{1}{AOc}+\frac{1}{BOa}+\frac{1}{COb}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 358 (FAURE)

(voir t. XVI, p. 58);

PAR M. L. BOURDELLES,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).



1°. Soit M le point de rencontre de la sécante arbitraire F′K avec une des coniques; je mène par ce point la tangente MN à cette conique: je dis que cette droite sera tangente à la parabole ayant pour foyer le point F et pour directrice la sécante F′K.

En effet, j'abaisse du foyer F une perpendiculaire à cette tangente. Soient K le point où elle rencontre la sécante et H le point où elle coupe la tangente; si je joins M, F, le triangle KMF est isocèle, car la droite MH, tangente à la conique au point M, est bissectrice de l'angle KMF. Il en résulte que le point H est le milieu de KF, et, par suite, que MN est tangente à la parabole considérée.

La même démonstration s'applique à toutes les coniques homofocales; par conséquent, si l'on mène des tangentes à toutes ces courbes par les points où la sécante les rencontre, la courbe enveloppe de ces tangentes sera une parabole.

2°. Il est évident que cette parabole est tangente à l'axe Oy des coniques qui contient les foyers imaginaires, car il est perpendiculaire sur FF' et en son milieu O.

3°. Toute tangente commune à une conique et à la parabole est vue du foyer sous un angle droit.

En effet, je considère la tangente menée par le point M; soit N le point où elle touche la parabole. Si du point N j'abaisse une perpendiculaire NK sur la directrice, je forme un triangle NKM, rectangle en K, qui est égal au triangle MFN; donc l'angle MFN sous lequel on voit la tangente MN du foyer F est aussi droit. C. Q. F. D.

Note. MM. E. Carénon et E. Laguières, élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie), ont résolu la question de la même manière. M. Abel Rainbeaux donne une solution analytique. M. Rassicod, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), ramène ingénieusement la proposition à celle-ci : Du foyer F' comme centre et du grand axe comme rayon, on décrit le cercle *directeur,* on prolonge le rayon vecteur quelconque F' P jusqu'à ce qu'il rencontre le cercle directeur en Q; par le point Q, on mène une tangente au cercle, et par le point P une tangente à l'ellipse. Le lieu d'intersection E de deux tangentes est une parabole. La connexion de ce résultat avec celui dont il s'agit est évidente. En faisant varier la droite arbitraire, le point E décrit la directrice de l'ellipse relative au foyer F.

Note. MM. Sylvestre et Boyeldieu, élèves de M. Catalan, et M. Poupelet, de l'institution Reusse, ont adressé les mêmes solutions.

THÉORÈME SUR LE TRIANGLE SPHÉRIQUE ;

PAR M. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Théorème. ABC triangle sphérique ; O centre de la sphère, V_1 volume du parallélipipède qui a pour arêtes OA', OB', OC' ; A', B', C' sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a

$$V_1 = \sin \frac{1}{2} S.$$

(CORNELIUS KEOGH.)

Démonstration. En désignant par a', b', c' les côtés du triangle A', B', C', on a

$$\cos c' = \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{a} a \sin \frac{1}{2} b \cos C,$$

ou, en substituant les expressions connues de $\cos \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{2} a$, etc., en fonction des angles,

$$\cos c' = \cos \frac{1}{2} S \sqrt{\frac{\sin \left(A - \frac{1}{2} S\right) \sin \left(B - \frac{1}{2} S\right)}{\sin A \sin B}}, \ldots$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned} V_1^2 &= \sin^2 b' \sin^2 c' \sin^2 A' \\ &= 1 - \cos^2 n' - \cos^2 b' - \cos^2 c' + 2 \cos a' \cos b' \cos c', \end{aligned}$$

et en substituant les expressions précédentes de $\cos c'$, $\cos b'$, $\cos a'$, il vient, après quelques transformations faciles,

$$V_1^2 = 1 - \cos^2 \frac{1}{2} S$$

ou

$$V_1 = \sin\frac{1}{2}S.$$

PROGRAMME D'UNE NOUVELLE THÉORIE DE LA MESURE DES PRISMES;

PAR M. DIEU,
Professeur à la Faculté de Grenoble.

THÉORÈME I. *La mesure d'un parallélipipède rectangle droit est le produit de sa base par sa hauteur.*

(Démonstration par la décomposition en cubes.)

Corollaire I. Cette mesure s'étend :

1°. Au parallélipipède droit.

(Equivalent au parallélipipède rectangle de base équivalente et de même hauteur, construit en formant, de la manière bien connue, des rectangles sur les bases parallélogrammes : on a une partie commune et des parties évidemment superposables.)

2°. Au prisme triangulaire droit.

(Moitié du parallélipipède droit de base double et de même hauteur.)

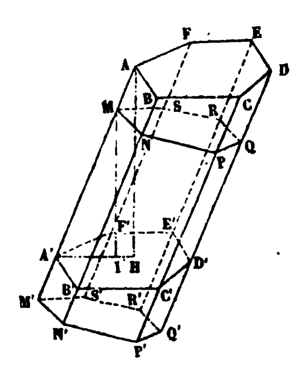
3°. Au prisme polygonal droit.

(Somme de prismes triangulaires.)

Remarques. Deux prismes droits de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents. Deux prismes droits de bases équivalentes sont proportionnels à leurs hauteurs et deux prismes droits de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.

THÉORÈME II. *La mesure d'un prisme oblique est le produit de la section droite par la longueur des arêtes latérales.*

Remarque. S'il s'agit d'un parallélipipède, il faut dire : Le produit d'une section droite par la longueur des arêtes perpendiculaires à cette section.



(AD′ étant le prisme oblique, MNP... une section droite et MQ′ le prisme droit construit sur MNP... dont la hauteur MM′ = AA′. On prouve facilement que ce prisme droit est équivalent au prisme oblique, partie commune MD′ et parties superposables MD, M′D′. Pour établir la superposition de ces dernières parties, il est bon de remarquer que les angles trièdres [M, M′], [N, N′], etc., sont égaux deux à deux, faces égales chacune à chacune.)

Remarques. Deux prismes obliques sont équivalents lorsque leurs sections droites sont équivalentes et leurs arêtes latérales égales. Ils sont proportionnels à leurs arêtes latérales, si les sections droites sont équivalentes, et à leurs sections droites si les arêtes latérales sont égales.

THÉORÈME III. *La mesure d'un prisme oblique quelconque est le produit de sa base par sa hauteur.*

Démonstration. Soient A′D le prisme, MNP... une section droite, MI et AH deux perpendiculaires aux bases du prisme. Désignons par B l'aire de ces bases, par S celle

des sections droites, par h la hauteur AH, enfin par A la longueur des arêtes AA'....

D'après un théorème connu, en remarquant que la section droite MNP... est sur son plan, la projection de la base A'B'C'..., on a

$$\frac{S}{B} = \frac{MI}{MA'}.$$

Mais les triangles semblables MA'I, AA'H donnent

$$\frac{MI}{MA'} = \frac{AH}{AA'} = \frac{h}{a};$$

donc

$$\frac{S}{B} = \frac{h}{a},$$

d'où

$$Bh = Sa = \text{volume prisme (théor. précédent)}.$$

Remarques. Deux prismes quelconques de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents. Deux prismes quelconques de bases équivalentes sont proportionnels à leurs hauteurs, et deux prismes quelconques de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.

THÉORÈME SUR LES RACINES COMMENSURABLES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. EMILE MATHIEU,

Professeur.

Soit l'équation algébrique à coefficients *entiers*

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Hx + L = 0.$$

1°. L'équation n'a pas de racines commensurables, si, A et L étant impairs, l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ est aussi impair.

2°. L'équation n'a pas non plus de racines commensurables, si, des quatre nombres A, L, $f(1)$ et $f(-1)$, aucun n'est divisible par 3.

Démonstration. En effet, soit $\frac{a}{b}$ une racine fractionnaire irréductible de cette équation; on aura

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \varphi(x)$$

ou

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \left| \begin{array}{l|l|l|} \mathrm{A}x^m + \frac{\mathrm{A}a}{b} & x^{m-1} + \frac{\mathrm{A}a^2}{b^2} & x^{m-2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}a^{m-1}}{b^{m-1}} \\ \quad + \mathrm{B} & \quad + \frac{\mathrm{B}a}{b} & \quad + \frac{\mathrm{B}a^{m-2}}{b^{m-2}} \\ & \quad + \mathrm{C} & \quad + \ldots\ldots \\ & & \quad + \mathrm{H} \end{array} \right.$$

Posons

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{b^{m-1}},$$

$\psi(x)$ étant un polynôme algébrique dont les coefficients sont *entiers ;* donc

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \frac{\psi(x)}{b^{m-1}}.$$

Soit α un nombre entier; on obtient l'identité

$$f(\alpha) = \frac{(b\alpha - a)\,\psi(\alpha)}{b^m}$$

et

$$\psi(\alpha) = \frac{b^m f(\alpha)}{b\alpha - a}.$$

Or si un nombre premier p divise b^m, il divise b, il est

donc premier avec a; donc il n'y a pas de facteur commun à b^m et à $b\alpha - a$; il faut donc que $\frac{f(\alpha)}{b\alpha - a}$ soit un nombre entier, quel que soit α.

Faisons-y successivement

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = -1,$$

et alors

$$\frac{L}{a}, \quad \frac{f(1)}{b-a}, \quad \frac{f(-1)}{b+a}$$

sont *entiers*.

Or $\frac{b}{a}$ est racine de l'équation inverse

$$Lx^m + Hx^{m-1} + \ldots + Bx + A = 0;$$

donc, par la même raison que $\frac{L}{a}$ est entier, $\frac{A}{b}$ sera aussi entier, dans l'équation inverse.

D'après cela, si A et L, multiples respectifs de b et a, sont impairs, a et b sont aussi impairs; donc $b - a$ et $b + a$ sont pairs et $f(1)$ et $f(-1)$ sont pairs.

Donc si A et L sont impairs et que l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ soit aussi impair, l'équation ne peut avoir de racines fractionnaires; le raisonnement reste le même lorsque $b = 1$: donc l'équation n'a pas de racines commensurables; dans ce cas, le théorème rentre dans le cas examiné (*Nouvelles Annales,* t. XV, p. 449).

Supposons, en second lieu, que A et L ne soient pas divisibles par 3, a et b ne le seront pas non plus; on aura

$$a = 3p \pm 1, \quad b = 3q \pm 1,$$

et il est facile de voir que l'un des nombres $a - b$ et $a + b$ sera divisible par 3; donc l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ sera nécessairement divisible par 3.

Donc l'équation n'a pas de racines commensurables, si

des quatre nombres A, L, $f(1)$ et $f(-1)$ aucun n'est divisible par 3.

Corollaire. Toute équation d'un nombre impair de termes dont tous les coefficients sont impairs n'a aucune racine commensurable.

Observation. Si le terme tout connu manque, il y a des racines nulles.

SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ,

Plans polaires, Construction d'une surface du troisième degré;

PAR M. POUDRA.

Proposition I. Lorsque plusieurs surfaces du deuxième degré passent par huit points communs, les plans polaires d'un neuvième point M pris par rapport à ces surfaces passent par une même droite.

Démonstration. En effet, toutes ces surfaces ont en commun une courbe du quatrième ordre; donc si par le point M on mène un plan quelconque, il coupera les surfaces du deuxième degré suivant des coniques qui auront quatre points communs : les polaires du point M, relatif à ces coniques, passeront donc par un même point N qui sera ainsi dans tous les plans polaires. Il en sera de même pour tout autre plan mené par M; donc tous ces points N devant se trouver en même temps dans tous les plans polaires de ce point M, il en résulte qu'il faut que tous ces plans passent par une même droite.

Corollaire I. Si le point M est un des points communs à toutes les surfaces, les plans polaires de ce point seront les plans tangents aux surfaces en ce point. Donc tous les plans tangents à une série de surfaces du deuxième degré ayant en commun une même courbe du quatrième ordre

en un point de cette courbe passent par une même droite.

Corollaire II. Si le point M est à l'infini, chaque plan polaire passe par le centre de la surface ainsi que chaque polaire. Donc, lorsque plusieurs surfaces du deuxième degré passent par une même courbe du quatrième, tous les centres se trouvent sur une même droite.

Proposition II. Les plans polaires relatifs à quatre de ces surfaces ont le même rapport anharmonique, quelle que soit la position du point M.

En effet, par le point M menons un plan quelconque. Il coupera les quatre surfaces suivant quatre coniques passant par quatre mêmes points. Le rapport anharmonique des polaires d'un point quelconque de ce plan est toujours le même, et ce rapport est égal à celui des quatre plans polaires. Or cela ayant lieu pour tous les plans passant par M, existe pour les points de leur commune intersection et, par suite, pour un point quelconque de l'espace. Donc, etc.

Corollaire. Si le point M est un des points communs d'intersection des surfaces, les plans tangents en ce point formeront donc un faisceau dont le rapport anharmonique sera le même, quelle que soit sa position sur la courbe d'intersection. Donc tous ces plans tangents formeront par les intersections de faisceaux homographiques un hyperboloïde passant par cette même courbe. (On voit, en effet, que pour deux points de cette courbe les deux faisceaux de plans tangents étant homographiques, se coupent sur cet hyperboloïde.) Chaque génératrice de cette surface se trouvant à la fois dans tous les plans tangents à toutes les surfaces passant par ce point, il en résulte que cet hyperboloïde sera tangent à toutes ces surfaces du deuxième degré suivant la courbe commune d'intersection.

Nous appellerons aussi, pour abréger, rapport anhar-

monique de quatre de ces surfaces du deuxième degré passant par une même courbe d'intersection, le rapport anharmonique des plans polaires d'un point quelconque relatives à ces courbes, ou bien le rapport anharmonique des quatre plans tangents à ces surfaces passant par une même droite, génératrice de l'hyperboloïde tangent à toutes les surfaces du deuxième ordre passant par la même courbe d'intersection.

Remarquons que l'hyperboloïde tangent ne contient généralement sur chaque génératrice qu'un seul point de la courbe du quatrième ordre, intersection commune des surfaces du deuxième degré, tandis que les hyperboloïdes qui nous ont servi (*voir* t. XV, p. 385) à déterminer cette courbe ont une génératrice qui passe par deux points de cette courbe.

Proposition III. Quand une série de surfaces du deuxième degré ont une même courbe d'intersection, si l'on prend les plans polaires d'un point quelconque par rapport à ces surfaces, et qu'ensuite par une droite P quelconque on mène des plans (dont trois de direction arbitraire) forment un faisceau homographique au faisceau formé par les plans polaires, je dis que ces plans, qui correspondront un à un respectivement aux surfaces du deuxième degré, rencontreront respectivement ces surfaces suivant des coniques dont le lieu géométrique sera une surface du troisième ordre passant par la courbe d'intersection et par la droite P.

En effet, si l'on coupe tout le système par un plan, les surfaces du deuxième degré donneront par leurs intersections un faisceau de coniques passant par quatre mêmes points et dont le rapport anharmonique sera celui des plans polaires, et le faisceau de plans donnera un faisceau de droites dont le rapport anharmonique sera celui du faisceau de plans; donc ce faisceau de droites sera homo-

graphique avec celui des coniques, et, par conséquent, les points d'intersections respectifs donneront, comme on sait (t. XIV, p. 360) une courbe du troisième ordre passant par les quatre points communs des coniques et par le sommet du faisceau de droites, sommet qui appartient à la droite P. Tous les plans sécants donneront de même des courbes du troisième ordre; donc le lieu de toutes ces courbes du troisième ordre sera bien une certaine surface du troisième ordre passant par la courbe d'intersection et par la droite P.

Proposition IV. Par quinze points de l'espace faire passer une surface du troisième degré.

Par huit de ces points, on fait passer un faisceau de surfaces du deuxième degré passant successivement par les points 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ce qui fait sept de ces surfaces. On cherche ensuite par le problème (*Nouvelles Annales,* t. XV, p. 161) la droite par laquelle sept plans étant menés par des points 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ces sept plans forment un faisceau homographique à celui des sept surfaces du deuxième degré passant respectivement par ces points. Les intersections des surfaces du deuxième degré par les plans respectifs correspondants donneront des sections coniques appartenant à la surface du deuxième degré passant par les quinze points donnés (prop. III).

Proposition V. Si par huit points on fait passer un faisceau de surfaces du deuxième degré et par huit autres points un autre faisceau, mais tel, que les rapports anharmoniques des deux faisceaux soient les mêmes, alors les deux surfaces du deuxième degré correspondantes de chaque faisceau se couperont suivant des courbes du quatrième degré dont l'ensemble formera une surface du quatrième degré passant par les seize points donnés (*voir* t. XII, p. 358).

SUR LA DIVISION ABRÉGÉE

(voir t. XIII, p. 170);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Professeur au lycée Charlemagne.

PRINCIPE. *Quand on substitue au diviseur le nombre formé par ses* m + 1 *premiers chiffres significatifs (en remplaçant par des zéros ceux des chiffres supprimés qui sont à gauche de la virgule), on augmente le quotient d'une quantité moindre que l'unité de l'ordre de son* $m^{\text{ième}}$ *chiffre.*

En effet, substituer au diviseur exact 648,2717954 la valeur approchée 648,271 revient à multiplier le quotient par

$$\frac{648,2717954}{648,271} = 1 + \frac{0,0007954}{648,271},$$

ou à l'augmenter de son produit par $\frac{0,0007954}{648,271}$. Or cette fraction est moindre que $\frac{0,001}{100} = \frac{1}{10^5}$; d'ailleurs le quotient contient au plus 99999 unités de son cinquième chiffre : il est donc inférieur à 10^5 unités de l'ordre de ce chiffre; et, par suite, l'erreur en plus commise sur ce quotient n'atteint pas une unité du cinquième chiffre.

C. Q. F. D.

RÈGLE. *Pour obtenir, à moins d'une unité d'un certain ordre, le quotient de deux nombres entiers ou décimaux, on commence par déterminer l'ordre des plus hautes unités du quotient exact, et, par suite, le nombre des chiffres du quotient demandé; on prend* DEUX *chiffres de plus au diviseur et on divise le dividende par le*

nombre ainsi formé, abstraction faite des virgules. Seulement, après chaque division partielle, au lieu d'abaisser à la droite du reste le chiffre suivant du dividende, on divise ce reste tel qu'il est par le diviseur précédent privé de son dernier chiffre, et l'on s'arrête dès qu'on a au quotient le nombre de chiffres voulu. On place ensuite la virgule d'après l'approximation énoncée.

Exemple. Soient les deux nombres 15466,273863, 648,2717954 dont on demande le quotient à moins de 0,01.

Les plus hautes unités du quotient exact sont des dizaines; le quotient demandé aura donc *quatre* chiffres, puisque son dernier chiffre doit exprimer des centièmes. On prend pour diviseur le nombre de *six* chiffres 648,271, et en suivant la marche indiquée on trouve 23,85.

15466,27	648,271
250085	23,85
55604	
3748	
50,8	

Démonstration. En remplaçant le diviseur par le nombre de *six* chiffres 648,271, on augmente le quotient d'une quantité moindre qu'une unité de l'ordre de son *cinquième* chiffre, c'est-à-dire moindre que 0,001. Telle serait l'erreur, si l'on conservait pour diviseur 648,271; mais dans l'opération suivante, au lieu de diviser le reste par 648,271, on prend pour nouveau diviseur le nombre de *cinq* chiffres 648,27; de là résulte une nouvelle erreur, en plus, moindre qu'une unité du *quatrième* chiffre du nouveau quotient, c'est-à-dire moindre qu'une unité du *cinquième* chiffre du quotient total, et, par suite, moindre encore que 0,001. En continuant ainsi, on voit que chaque opération augmente le quotient d'une quantité moindre que 0,001; donc, après quatre opérations, l'erreur finale en plus sera plus petite que 0,004 et à fortiori que 0,01.

De plus, en négligeant de diviser le dernier reste par le dernier diviseur, c'est-à-dire en négligeant les chiffres du quotient qui suivent les centièmes, on commet une erreur en moins inférieure à 0,01.

Les deux erreurs, l'une en plus, l'autre en moins, se compensent en partie, et comme chacune d'elles est inférieure à 0,01, l'erreur totale est moindre que 0,01 en plus ou en moins.

Remarque. La règle précédente semble exiger que le quotient demandé ait moins de *onze* chiffres afin que l'erreur en plus soit moindre que $0,001 \times 10 = 0,01$. Mais hâtons-nous d'observer que la limite indiquée dans notre principe est loin d'être aussi resserrée que possible.

Au lieu de prendre 100 pour limite inférieure du diviseur, on peut mettre 640 puisque le dernier diviseur employé a toujours trois chiffres (on prend en effet deux chiffres de plus au diviseur qu'au quotient et l'on ne commence à supprimer un chiffre sur la droite du diviseur qu'à partir de la deuxième opération); on trouve alors pour limite de l'erreur, dans chaque opération partielle, $\frac{1}{6,4}$ de l'unité du cinquième chiffre du quotient, on a donc

$$\frac{0,001}{6,4} = \frac{0,01}{64},$$

et pour que l'erreur totale précédente produite par les altérations successives du diviseur ne dépasse pas 0,01, *il suffit que le nombre des chiffres du quotient demandé ne surpasse pas le nombre 64 formé par l'ensemble des deux premiers chiffres du diviseur.*

On voit ainsi :

Qu'il suffira de prendre au diviseur un chiffre de plus qu'au quotient toutes les fois que le nombre des chiffres

du quotient demandé n'excédera pas le premier chiffre du diviseur, et que, *en général,* n *étant le nombre des chiffres du quotient demandé, il faudra compter sur la gauche du diviseur assez de chiffres pour former un nombre au moins égal à* n *et puis prendre* n *chiffres de plus.* C'est la règle de M. Lionnet (t. XI, p. 148).

Il n'y a d'ailleurs aucune modification à faire dans le cas où un dividende partiel contient dix fois le diviseur correspondant. On prend alors 10 pour quotient partiel; on trouve que les quotients partiels suivants sont nuls, et le quotient ainsi obtenu est évidemment approché par excès.

RECUEIL DE FORMULES RELATIVES AU CERCLE

(voir t. XII, p. 202).

Multiples de π de 1 à 9 avec vingt décimales.

$\pi =$	3,14159 26535 89793 23846
$2\pi =$	6,28318 53071 79586 47692
$3\pi =$	9,42477 79607 69379 71539
$4\pi =$	12,56637 06143 59172 95385
$5\pi =$	15,70796 32679 48966 19231
$6\pi =$	18,84955 59215 38759 43077
$7\pi =$	21,99114 85751 28552 66924
$8\pi =$	25,13274 12287 18345 90770
$9\pi =$	28,27433 38823 08139 14616

Multiples de $\frac{1}{\pi}$ de $\frac{1}{\pi}$ à $\frac{9}{\pi}$ avec vingt décimales.

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830\ 98861\ 83790\ 6715\dot{4}$$

$$\frac{2}{\pi} = 0,63661\ 97723\ 67581\ 3530\dot{8}$$

$$\frac{3}{\pi} = 0,95492\ 96585\ 51372\ 01461$$

$$\frac{4}{\pi} = 1,27323\ 95447\ 35162\ 68613$$

$$\frac{5}{\pi} = 1,59154\ 94309\ 18953\ 3576\dot{9}$$

$$\frac{6}{\pi} = 1,90985\ 93171\ 02744\ 02923$$

$$\frac{7}{\pi} = 2,22816\ 92029\ 86534\ 70076$$

$$\frac{8}{\pi} = 2,54647\ 90894\ 70325\ 37230$$

$$\frac{9}{\pi} = 2,86478\ 89756\ 54116\ 0438\dot{4}$$

M. Du Hays a communiqué cette Table de $\frac{1}{\pi}$ avec vingt décimales; M. Koralek a calculé $\frac{1}{\pi}$ avec vingt-cinq décimales. Les dix-neuf décimales à gauche sont les mêmes que ci-dessus et les six décimales à droite sont 377675.

Observation. Le point placé sur la décimale à droite indique que la valeur est trop forte d'une quantité moindre que $\frac{1}{2} . 10^{-20}$; l'absence du point indique que la valeur est trop faible d'une quantité moindre que $\frac{1}{2} \cdot 10^{-20}$.

A l'aide de ces deux Tables, les expressions dans lesquelles π entre comme facteur ou comme diviseur se ramènent à des additions :

$$l\pi = 1,44472\ 98858\ 49400\ 17414\ 34237$$
$$L\pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 11268\ 288$$

(Voir t. V, p. 80.)

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

VI.

Calcul numérique des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quand a *est très-petit.*

Je crois qu'il faudrait dire : « quand $\frac{ac}{b^2}$ est très-petit. » Il est du moins certain que les solutions qu'on a données de cette question dans des Traités d'Algèbre *entièrement conformes au programme officiel* peuvent être en défaut, quelque petit que soit a par rapport à b et c, lorsque la valeur de $\frac{ac}{b^2}$ n'est pas suffisamment petite.

Dans l'un de ces Traités, on a pris pour exemple l'équation

$$0,001 . x^2 + x - 1 = 0.$$

L'application de la méthode des *approximations successives* à cette équation a donné des valeurs de plus en plus approchées de la racine positive cherchée. Mais si on avait pris pour exemple l'équation

$$0,001 . x^2 + x - 10000 = 0,$$

dans laquelle la valeur de a, comparée à celle de c, est 10000 fois plus petite que dans l'équation

$$0,001 . x^2 + x - 1 = 0,$$

la méthode des approximations successives aurait conduit à des valeurs de plus en plus éloignées de la racine cherchée, comme il est facile de s'en assurer.

En général, lorsque l'équation considérée

$$ax^2 + bx - c = 0$$

a des racines de signes contraires, pour que la méthode dont il s'agit donne des valeurs de plus en plus approchées de la racine positive de cette équation, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}.$$

Quand l'équation proposée a des racines de même signe et inégales, on a nécessairement

$$\frac{ac}{b^2} < \frac{1}{4},$$

et la méthode n'est jamais en défaut. G.

QUESTION D'EXAMEN.

On donne en grandeur et en position les deux axes d'une hyperbole, construire deux diamètres conjugués qui forment un angle donné.

Je désigne par OA, OB les demi-axes donnés; le premier OA étant supposé transverse. Les diagonales du rectangle construit sur les axes détermineront les aymptotes

OX, OY, dont l'angle YOX est divisé en deux parties égales par l'axe transverse OA. Sur l'une des deux asymptotes, OX par exemple, je prends un point quelconque X', et sur la droite OX' je décris, du côté où se trouve le sommet A, un segment capable de l'angle donné que doivent faire entre eux les diamètres conjugués cherchés. Par le milieu M de OX', je conduis à OY une parallèle qui ira couper l'arc du segment décrit en un certain point P. La droite OP, menée du centre au point P, sera la direction qu'il faut donner à celui des deux diamètres conjugués qui doit couper la courbe. La direction de l'autre s'obtiendra en menant par le centre de la courbe une parallèle à la droite PX'.

Pour déterminer la longueur du demi-diamètre dirigé suivant OP, on mènera par le sommet A une parallèle à OP, qui rencontrera les directions des asymptotes en des points C, D; puis on prendra une moyenne géométrique entre AC et AD. La longueur du demi-diamètre non transverse sera déterminée par une construction entièrement semblable.

Le problème admet une seconde solution qu'on obtiendrait en substituant au segment capable de l'angle donné un segment capable du supplément de cet angle. Les diamètres de la seconde solution sont, par rapport aux axes, symétriques des diamètres de la première solution.

G.

SOLUTION DE LA QUESTION 343

(voir t. XV, p. 353);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Si p et $4p+1$ sont des nombres premiers absolus, 2

est racine primitive relativement au nombre $4p+1$.

(TCHEBICHEF.)

Pour que 2 soit racine primitive de $4p+1$, il faut, comme l'indique la marche que l'on suit pour obtenir ces racines, que ce nombre ne se trouve ni parmi les résidus quadratiques, ni parmi les résidus de puissance p des $4p$ premiers nombres naturels. Or on sait que si 2 était résidu quadratique par rapport à l'un de ces nombres, x par exemple, c'est-à-dire si l'on avait

$$x_1^2 \equiv 2 \quad \text{mod.} \ (4p+1),$$

on aurait aussi (Serret, *Algèbre supérieure*, p. 332)

$$(1) \qquad 2^{2p} \equiv 1 \quad \text{mod.} \ (4p+1),$$

et s'il était résidu de puissances p, on aurait de même

$$(2) \qquad 2^4 \equiv 1 \quad \text{mod.} \ (4p+1).$$

La première de ces deux congruences est impossible, car n représentant un nombre premier, on a constamment (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 657)

$$2^{\frac{n-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{n-1}{4}} \quad \text{mod.} \ (n),$$

expression qui se réduit dans le cas actuel à

$$(3) \qquad 2^{2p} \equiv (-1)^p \quad \text{mod} \ (4p+1),$$

et comme p est premier et par conséquent impair, la forme (3) entraîne l'impossibilité de la forme (1).

Quant à la congruence (2), elle ne pourrait évidemment avoir lieu que dans le cas de $p=1$, et dans ce cas on n'a plus à considérer les résidus de puissances p. Ainsi 2, ne se trouvant pas parmi les résidus des puissances marquées par les facteurs premiers de $4p$, sera racine primitive relativement à $4p+1$.

NOTE
Sur un problème d'analyse indéterminée;

PAR M. ARTHUR CAYLEY.

Euler a donné dans le Mémoire : *Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite solvendi* (*Comment. Arith. Coll.*, t. II, p. 263) la solution que voici de l'équation indéterminée

$$(1)\qquad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \zeta y^2 + \eta y + \vartheta.$$

En supposant que l'on ait la solution $x = a$, $y = b$ de manière que

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = \zeta b^2 + \eta b + \vartheta,$$

et en posant

$$s = \sqrt{\alpha r^2 + 1},$$

où r est une quantité quelconque, l'équation sera satisfaite par les valeurs

$$x = sa + \zeta rb + \frac{(s-1)\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2} r\eta,$$

$$y = \alpha ra + sb + \frac{(s-1)\eta}{2\zeta} + \frac{1}{2} r\beta;$$

en effet, on voit sans peine que ces valeurs donnent identiquement

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha x^2 + \beta x + \gamma - (\zeta y^2 + \eta y + \vartheta) \\ &= \alpha a^2 + \beta a + \gamma - (\zeta b^2 + \eta b + \vartheta) = 0. \end{aligned} \right.$$

En supposant de plus que les coefficients α, β, γ, ζ, η, ϑ soient des nombres entiers tels, que $\alpha\zeta$ soit un en-

tier positif non carré, on peut toujours déterminer le nombre entier r de manière que s soit un nombre entier: cela étant, et en supposant que a, b soient des entiers, il est évident que x, y seront des nombres rationnels. Euler a de plus remarqué que l'on peut toujours faire en sorte que x, y soient des nombres entiers. En effet, si les formules donnent $x = a'$, $y = b'$ des valeurs non entières, en substituant dans les formules au lieu de a, b les valeurs a', b', on obtiendra pour x, y des valeurs entières; cela se vérifie sans peine.

L'équation indéterminée (2) rentre dans celle-ci

$$(3)\quad (a, b, c, f, g, h)(x', y', z')^2 = (a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2,$$

(*Voir* note I.)

en supposant que la forme ternaire

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$$

se transforme en elle-même au moyen d'une substitution linéaire quelconque. On peut supposer que cette substitution soit telle, que l'on ait $z' = z$; cela étant, en écrivant $z' = z = 1$ et en mettant de plus $h = 0$, l'équation (3) se réduit évidemment à une forme telle que l'équation (2). Or on peut trouver par la méthode générale de M. Hermite la solution convenable de l'équation (3). En supposant, comme à l'ordinaire,

$$\mathfrak{A} = bc - f^2 \ldots, \quad \mathfrak{F} = gh - af \ldots,$$
$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh,$$

(*Voir* note II.)

il faut pour cela écrire

$$x' = 2\xi - x,$$
$$y' = 2\eta - y,$$
$$z' = 2\zeta - z,$$

et

$$ax + hy + gz = a\xi + h\eta + g\zeta - q\,\mathfrak{C}\eta + q\,\mathfrak{F}\zeta,$$
$$hx + bx + fz = h\xi + b\eta + f\zeta + q\,\mathfrak{C}\xi - q\,\mathfrak{G}\zeta,$$
$$gx + fy + cz = g\xi + f\eta + c\zeta - q\,\mathfrak{F}\xi + q\,\mathfrak{G}\eta,$$

où q est une quantité arbitraire. En effet, en multipliant ces équations par ξ, η, ζ et en ajoutant, on obtient

$$(a, b, c, f, g, h)(\xi, \eta, \zeta)(x, y, z)$$
$$= (a, b, c, f, g, h)(\xi, \eta, \zeta)^2 \text{ (note III)},$$

et, au moyen de cette équation et des valeurs

$$x' = 2\xi - x,$$
$$y' = 2\eta - y,$$
$$z' = 2\zeta - z,$$

on forme tout de suite l'équation (3) (note IV). De plus, en multipliant les trois équations par $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et en ajoutant, on obtient

$$kz = k\zeta \text{ (note V)},$$

c'est-à-dire

$$z = \zeta$$

et de là

$$z' = z.$$

Cela étant, les deux équations donnent, en remplaçant ζ par z,

$$a\xi + (h - q\mathfrak{C})\eta = ax + hy + (g - q\mathfrak{F})z,$$
$$(h + q\mathfrak{C})\xi + b\eta = hx + by + (f + q\mathfrak{G})z,$$

et de là, en remarquant que

$$ab - (h - q\mathfrak{C})(h + q\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} + q^2\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}(1 + q^2\mathfrak{C}),$$

on obtient très-facilement, éliminant successivement η

et ξ,

$$(1+q^2\mathfrak{C})\xi = (1+qh)x + qby + (qf + q^2\mathfrak{G})z,$$
$$(1+q^2\mathfrak{C})\eta = -qax + (1-qh)y + (-qg + q^2\mathfrak{F})z$$

et ensuite

$$\begin{gathered}(1+q^2\mathfrak{C})x' \\ = (1+2qh - q^2\mathfrak{G})x + 2qby + 2(qf + q^2\mathfrak{G})z, \\ (1+q^2\mathfrak{C})y' \\ = -2qax + (1-2qh - q^2\mathfrak{C})y + 2(-qg + q^2\mathfrak{F})z,\end{gathered}$$

c'est-à-dire, en écrivant $z = z' = 1$, les valeurs

$$(4)\quad \left\{\begin{gathered}(1+q^2\mathfrak{C})x' \\ = (1+2qh - q^2\mathfrak{C})x + 2qby + 2(qf + q^2\mathfrak{G}), \\ (1+q^2\mathfrak{C})y' \\ = -2qax + (1-2qh - q^2\mathfrak{C})y + 2(-qg + q^2\mathfrak{F}),\end{gathered}\right.$$

satisfont identiquement à l'équation

$$(5)\quad (a, b, c, f, g, h)(x', y', 1)^2 = (a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2.$$

En prenant $h = 0$, on a

$$\mathfrak{C} = ab, \quad \mathfrak{F} = -af, \quad \mathfrak{G} = -bg,$$

et les formules deviennent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}(1+q^2ab)x' &= (1-q^2ab)x + 2qby + 2q(f - qbg), \\ (1+q^2ab)y' &= -2qax + (1-q^2ab)y - 2q(g + qaf),\end{aligned}\right.$$

valeurs qui satisfont identiquement à l'équation (note VI)

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&(ax'^2 + 2gx' + l') + (by'^2 + 2fy' + m') \\ &= (ax^2 + 2gx + l) + (by^2 + 2fy + m),\end{aligned}\right.$$

et en y écrivant

$$\frac{1-q^2ab}{1+q^2ab} = s = \sqrt{1 - abr^2},$$

on obtient des formules qui correspondent précisément aux équations données par Euler pour x, y en termes de a, b.

Londres, 10 mars 1857.

NOTES DU RÉDACTEUR.

Note I. D'après la commode notation introduite par M. Cayley, l'équation (3) développée a cette forme

$$ax'^2 + by'^2 + c'z'^2 + 2fy'z' + 2gx'z' + 2hx'y'$$
$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy.$$

Note II. Désignant par k le déterminant de chaque membre de l'équation (3), on a

$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh;$$

prenant les dérivées de k successivement par rapport à chacune des six lettres a, b, c, f, g, h, on a

$$\mathfrak{A} = bc - f^2, \quad \mathfrak{B} = ac - g^2, \quad \mathfrak{C} = ab - h^2,$$
$$\mathfrak{F} = + \frac{1}{2}\frac{dk}{df} = gh - af, \quad \mathfrak{G} = fh - bg, \quad \mathfrak{H} = fg - ch.$$

Note III. Cette notation développée donne

$$x(a\xi + h\eta + g\zeta) + y(h\xi + b\eta + f\zeta) + z(g\xi + f\eta + c\zeta)$$
$$= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\zeta\eta.$$

Note IV. Remplaçant dans la dernière équation respectivement x, y, z par $2\xi - x'$, $2\eta - y'$, $2\zeta - z'$, on obtient

$$x'(a\xi + h\eta + g\zeta) + y'(h\xi + b\eta + f\zeta) + z'(g\xi + f\eta + c\zeta)$$
$$= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\xi\eta.$$

Note V. Exécutant les opérations indiquées, on

trouve

$$x(a\mathfrak{G}+h\mathfrak{F}+g\mathfrak{C})+y(h\mathfrak{G}+b\mathfrak{F}+f\mathfrak{C})$$
$$+z(g\mathfrak{G}+f\mathfrak{F}+c\mathfrak{C})$$
$$=\xi(a\mathfrak{G}+h\mathfrak{F}+g\mathfrak{C})+\eta(h\mathfrak{G}+b\mathfrak{F}+f\mathfrak{C})$$
$$+\zeta(g\mathfrak{G}+f\mathfrak{F}+c\mathfrak{C})-q:$$

or

$$g\mathfrak{G}+f\mathfrak{F}+c\mathfrak{C}=k;$$

donc

$$kz=k\zeta,\quad z=\zeta,\quad z=z\zeta-z'=2z-z',$$

donc

$$z=z'.$$

Note VI. Faisant

$$z=z'=1,\quad h=0,$$

l'équation (3) prend la forme

$$ax'^2+2gx'+by'^2+2fy'+c'$$
$$=ax^2+2gx+by^2+2fy+c.$$

Faisant

$$c=q'=l+m,$$

on obtient

$$(ax'^2+2gx'+l')+(by'^2+2fy'+m')$$
$$=(ax^2+2gx+l)+(by^2+2fy+m).$$

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION 232

(voir t. X, p. 182);

PAR M. E. PROUHET.

La question 232 a déjà été résolue d'une manière très-remarquable par M. Tardy (t. XI, p. 345). Pour me con-

former au désir exprimé par ce savant professeur (t. XI, p. 354), je vais donner ma propre solution avec les simplifications qui résultent d'un point de vue un peu plus général auquel j'ai été amené par de nouvelles réflexions.

1. Soient A_1, A_2,..., A_n, n points distribués comme on voudra dans un plan, et concevons ces points liés par des droites, savoir le point A_1 au point A_2, celui-ci au point A_3, etc., et enfin le point A_n au point A_1. Nous obtiendrons un polygone rentrant, d'une forme d'ailleurs quelconque.

Je désignerai par P_1 l'aire de ce polygone; par P_2 l'aire du polygone obtenu en joignant les milieux des côtés consécutifs du premier, etc.

2. Prenons maintenant des axes rectangulaires, et désignons par x_1, y_1, x_2, y_2, etc., les coordonnées des points A_1, A_2, etc.

Posons en outre

$$[\alpha, \beta] = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha,$$

$$\Sigma\alpha = [1, \alpha+1] + [2, \alpha+2] + \ldots + [n, \alpha].$$

Ces fonctions jouissent de propriétés qu'il suffit d'indiquer, parce qu'elles sont bien connues ou d'une démonstration facile. Ainsi l'on a

$$[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha],$$

$$[\alpha, \alpha] = 0,$$

$$\Sigma_{n-\alpha} = -\Sigma\alpha,$$

$$\Sigma_\omega = 0 \quad \text{si} \quad n = 2\omega,$$

$$\Sigma_\omega = -\Sigma_{\omega-1} \quad \text{si} \quad n = 2\omega - 1.$$

Enfin les coordonnées ζ et η d'un sommet de P_k sont

donnés par les formules symboliques

$$\xi = \frac{1}{2^{k-1}}(1+x)^{k-1}x^{\alpha},$$

$$\eta = \frac{1}{2^{k-1}}(1+y)^{k-1}y^{\alpha},$$

dans lesquelles, après le développement du second membre, il faut remplacer les exposants par des indices.

3. Ces préliminaires admis, il est facile de démontrer le théorème suivant :

Il existe une relation, indépendante du mode de distribution des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *entre* P_1, P_2, $P_3, \ldots$ *et* P_ω, ω *désignant* $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ *selon que* n *est pair ou impair.*

En effet, on a d'abord pour l'aire du premier polygone (*voir* t. XV, p. 373)

$$P_1 = \frac{1}{2}\Sigma_1 = A_1\Sigma_1.$$

Pour obtenir P_2, il suffira de changer dans cette formule x_1, y_1, x_2, y_2, etc., en $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$, etc., en en sorte que P_2 sera une somme d'expressions telles que les suivantes

$$\frac{1}{2}\,\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{y_2+y_3}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{y+y_2}{2}\cdot\frac{x_2+x_3}{2},$$

dont le développement ne fournira que des termes de la forme $a\,[1, 2]$ ou $b\,[1, 3]$. On pourra donc écrire

$$P_2 = B_1\Sigma_1 + B_2\Sigma_2,$$

B_1, B_2 étant des coefficients numériques indépendants des coordonnées.

4. En continuant de cette manière, on aura les égalités suivantes :

$$(1)\qquad P_1 = A_1\,\Sigma_1,$$

$$(2)\qquad P_2 = B_1\,\Sigma_1 + B_2\,\Sigma_2,$$

$$(3)\qquad P_3 = C_1\,\Sigma_1 + C_2\,\Sigma_2 + C_3\,\Sigma_3,$$

. . . .

$$(\omega)\qquad P_\omega = L_1\,\Sigma_1 + L_2\,\Sigma_2 + L_3\,\Sigma_3 + \ldots + L_\omega\,\Sigma_\omega,$$

auxquelles il faudra joindre, suivant les cas,

$$(\omega+1)\qquad \Sigma_\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma_\omega = -\Sigma_{\omega-1}\ (^*).$$

5. La loi des coefficients qui entrent dans ces équations est assez compliquée, mais il suffit, pour notre objet, de remarquer que ceux que nous désignons par A_1, B_2, $C_3, \ldots, L_\omega$ ne sont pas nuls. On trouve en effet

$$A_1 = \frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},\quad C_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4},\quad D_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8},\ldots$$

Il résulte de cette remarque qu'on pourra toujours éliminer entre ces $\omega + 1$ équations les quantités $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\omega$ qui sont au nombre de ω. Le résultat de cette élimination sera la relation entre $P_1, P_2, \ldots, P_\omega$ dont l'existence était à démontrer.

Cette relation sera d'ailleurs linéaire et de la forme

$$(\mathrm{R})\qquad P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + \ldots + A_\omega P_\omega = 0.$$

(*) $\frac{1}{2}\Sigma_2$, $\frac{1}{2}\Sigma_3$, etc., expriment les surfaces des polygones obtenus en joignant de deux en deux, de trois en trois, les sommets de P_1. Par exemple l'égalité (2), dans laquelle $B_1 = \frac{1}{4}$, $B_2 = \frac{1}{8}$, peut s'écrire ainsi

$$P_2 = \frac{P_1}{2} + \frac{Q}{4},$$

Q désignant l'aire du polygone obtenu en joignant de deux en deux les sommets de P_1.

6. Pour trouver les coefficients A_2, A_3,..., A_ω, soit k un entier au plus égal à n, et désignons par $\frac{k'}{n'}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{k}{n}$. Prenons pour P_1 un polygone régulier étoilé de n' côtés et dont l'angle au centre est égal à $\frac{2k'\pi}{n'}$. Ce polygone pourra être assimilé à un polygone de n côtés, en considérant son périmètre comme un fil non interrompu qui se serait enroulé h fois autour de ses sommets, h représentant le quotient $\frac{n}{n'}$.

P_1 étant régulier, il en sera de même de P_2, P_3, etc. Chacun de ces polygones est composé de n triangles ayant le centre du polygone pour sommet commun.

Or la comparaison des triangles élémentaires de P_1 et de P_2 donne aisément

$$P_2 = P_1 \cos^2 \frac{k'\pi}{n'} = P_1 \cos^2 \frac{k\pi}{n};$$

on trouvera de même

$$P_3 = P_2 \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^4 \frac{k\pi}{n},$$

$$P_4 = P_3 \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^6 \frac{k\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_\omega = P_{\omega-1} \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^{2(\omega-1)} \frac{k\pi}{n}.$$

La substitution de ces valeurs dans la relation (R), après qu'on aura supprimé le facteur commun P_1 et remplacé $\cos^2 \frac{k\pi}{n}$ par x, donnera

$$\text{(E)} \qquad 1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_\omega x^{\omega-1} = 0.$$

k étant l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, \omega - 1$,

il en résulte que l'équation (E) admet pour racines

$$\cos^2\frac{\pi}{n},\quad \cos^2\frac{2\pi}{n},\quad \cos^2\frac{3\pi}{n},\ldots,\quad \cos^2\frac{(\omega-1)\pi}{n}.$$

Or on trouve une équation qui admet ces mêmes racines lorsque l'on égale à zéro le développement de $\sin na$ en fonction de $\cos a$, après y avoir remplacé $\cos a$ par x. Cette équation est la suivante :

$$(\mathcal{E})\qquad 1+\mathcal{A}_2 x+\mathcal{A}_3 x^2+\ldots+\mathcal{A}_\omega x^{\omega-1}=0,$$

$\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3,\ldots, \mathcal{A}_\omega$ étant des fonctions de n comprises dans l'un des types

$$\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2p-2)^2]}{2.3\ldots(2p-1)}$$

ou

$$\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2p-3)^2]}{1.2.3\ldots(2p-2)},$$

suivant que n est pair ou impair.

Les équations (E) et ($\mathcal{E}$) ont donc les mêmes racines et doivent être identiques. Par conséquent, on aura

$$A_2=\mathcal{A}_2,\quad A_3=\mathcal{A}_3,\ldots.$$

7. Ainsi les deux égalités qui constituent la question **232** se trouvent démontrées et de plus généralisées, de telle sorte qu'elles expriment une propriété qui appartient à n points distribués comme on voudra dans un plan, propriété qui ne dépend que du *nombre* de ces points.

SOLUTION DE LA QUESTION 349

(voir t. XV, p. 407);

PAR LE P. H. ROCHETTE,

Si une équation du troisième degré et sa dérivée ont toutes leurs racines rationnelles, les racines a, b, c de la première seront données par les formules

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

m, h et u étant des nombres rationnels. (PROUHET.)

Soient donc a, b, c les trois racines de l'équation donnée

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les racines de la dérivée soient rationnelles est exprimée par la relation

$$P^2 - 3Q = C^2.$$

Si nous y remplaçons P et Q par leurs valeurs en fonction des racines, elle prendra la forme suivante :

$$(a - b)^2 + (a - c)(b - c) = C^2,$$

et cette relation entre les trois racines a, b, c suffit pour qu'on puisse les mettre sous la forme indiquée.

En effet, si nous éliminons m et h entre les trois équations

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

nous obtiendrons une équation du second degré en u

$$(a - c)u^2 - 2(a - b)u - (b - c) = 0,$$

qui donnera pour u des valeurs rationnelles toutes les fois que

$$(a-b)^2+(a-c)(b-c)$$

sera un carré parfait. On pourra donc, dans ce cas-là, trouver aussi pour m et h des valeurs rationnelles, et exprimer les trois nombres rationnels a, b, c au moyen des fonctions indiquées de m, h et u.

Le problème a deux solutions dans le cas où P^2-3Q n'est pas nul, et une seule dans le cas contraire.

On démontrerait très-facilement que réciproquement lorsque les trois racines a, b, c d'une équation du troisième degré sont données par les formules

$$a=m+h,\quad b=mu^2+h,\quad c=2mu+h,$$

les racines de la dérivée sont rationnelles.

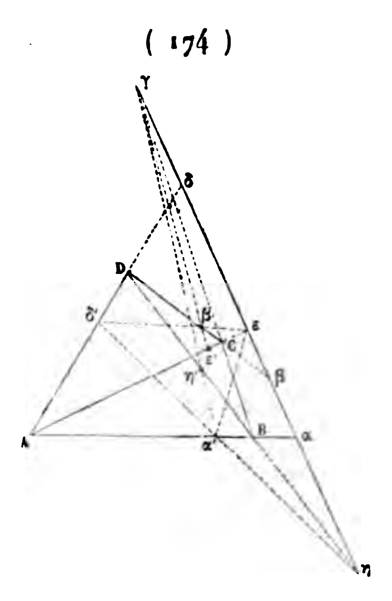
SOLUTIONS DES QUESTIONS 353 ET 354

(voir t. XV, p. 464);

Par M. L. BOURDELLES,
Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Question 353.

Soit ABCD un quadrilatère coupé par une transversale en α sur le côté AB et en β sur le côté opposé CD; soient α' le conjugué harmonique de α par rapport aux points A, B, et β' le conjugué harmonique de β par rapport aux points C, D; menons la droite $\alpha'\beta'$, faisons une construction analogue sur les côtés opposés AC, BD et sur les diagonales AC, BD : les trois droites passent par le même point. (de Laffitte.)



Je désigne le point d'intersection de la sécante avec

BC	par γ_1	et par	γ'	son conjugué.
AD	— δ_1	—	ρ'	—
AC	— ε_1	—	ε'	—
BD	— η_1	—	η'	—

Les droites DB, $\delta\alpha$ se coupent en un point η; je le joins aux points α' et δ' ainsi qu'au point A. Les deux droites $\eta\delta'$, $\eta\alpha'$, étant conjuguées de la droite $\delta\eta$ par rapport aux mêmes droites DB, Aη, doivent se confondre, c'est-à-dire que la ligne $\delta'\alpha'$ passe par le point η. On verrait de la même manière que la droite $\beta'\gamma'$ passe aussi par le point η.

Un raisonnement semblable montrerait que les droites $\alpha'\gamma'$, $\delta'\beta'$ passent par le point ε et que les droites $\eta'\beta'$, $\alpha'\varepsilon'$ passent par le point γ.

Or dans le quadrilatère $\alpha'\gamma'\beta'\delta'$ les diagonales $\alpha'\beta'$, $\delta'\gamma'$ se coupent en un même point O, pôle de $\eta\varepsilon$. De même

dans le quadrilatère $\alpha'\varepsilon'\beta'\eta'$ les diagonales $\alpha\beta'$, $\eta'\varepsilon'$ se coupent en un même point situé comme le point O sur $\alpha'\beta'$ qui est une diagonale commune à ces deux quadrilatères. Ce point d'intersection est le pôle de la droite $\eta\gamma$. Mais ces deux droites $\eta\gamma$, $\eta\varepsilon$ coïncident : donc le point d'intersection des droites $\alpha'\beta'$, $\eta'\varepsilon'$ est le même que celui des droites $\alpha'\beta'$, $\delta'\gamma'$, ce qui démontre le théorème.

« On pourrait simplifier la démonstration en remar-
» quant que deux côtés quelconques de l'hexagone formé
» par les six points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ sont divisés homo-
» graphiquement par les quatre autres ; il en résulte que
» les diagonales qui joignent les sommets opposés passent
» par un même point. » (*Géométrie supérieure*, n° 414.)

Remarques. Les six points α', β', γ', δ', ε', η' sont toujours sur une même conique, car les côtés opposés de l'hexagone dont ces six points sont les sommets, se coupent sur une même droite qui est la sécante.

Si la sécante s'éloigne à l'infini, on retrouve ce théorème :

La ligne qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère et les lignes qui joignent les milieux des côtés opposés se coupent en un même point.

Ce point divise chacune d'elles en deux parties égales.

On aurait pu déduire aussi ce théorème du théorème proposé en faisant la perspective de la figure de manière à envoyer la sécante à l'infini, en employant le procédé décrit par M. Poncelet. (*Propriétés projectives*, page 54.)

Question 354.

On déduit ce théorème de la proposition 353 par les polaires réciproques. Les deux théorèmes sont corrélatifs (*voir* p. 24).

Remarque. Si l'on suppose que le point s'éloigne à l'infini sur une droite quelconque, on trouve ce théorème :

Si dans un quadrilatère on mène une transversale quelconque et qu'on joigne le sommet A *au milieu du segment intercepté sur la sécante par les côtés* AB, AD *aboutissant à ce sommet; si l'on fait la même construction par rapport au sommet opposé* B, *les deux droites ainsi obtenues se coupent en un certain point. En opérant de même par rapport aux sommets* B *et* C *ainsi que par rapport aux points de concours des côtés opposés, les trois points d'intersection sont en ligne droite.*

On peut également déduire ce théorème en faisant la perspective de la figure sur laquelle est fondée la question 354.

Note. M. Richard Oxamendi adresse une solution aussi fondée sur des considérations segmentaires.

SOLUTION DE LA QUESTION 359

(voir t. XVI, p. 58);

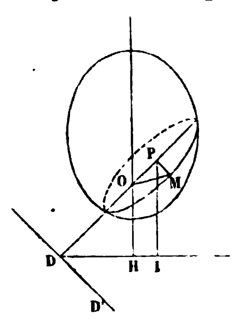
PAR M. L. BOURDELLES,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Une surface de révolution étant engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe principal, tout plan mené par un foyer O de la conique coupe la surface suivant une conique qui a le même point O pour foyer (*). (MÖBIUS.)

Soit DD′ l'intersection du plan sécant et du plan polaire du point O. Je dis que le point O est le foyer de la section et que DD′ est la directrice.

(*) MM. Persoz et Clery donnent une solution analytique et font la bonne observation que l'axe principal doit être l'axe à foyer. M. Poupelet, élève de M. Amiot (lycée Napoléon), adresse une solution analytique et géométrique; de même M. A. Rainbaux. TM.

Pour le démontrer, j'abaisse du point M, pris d'une



manière quelconque sur la courbe, une perpendiculaire MP sur son axe, lequel va rencontrer DD′ au point D. Il suffit de faire voir que

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{DP}} = \text{constante}.$$

Or, en abaissant du point P la perpendiculaire PI sur le plan polaire, on aura

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OH}}.$$

Mais si je considère le méridien de la surface passant par le point M, sa trace sur le plan polaire est la directrice de la conique méridienne, et comme la distance du point M à cette directrice est égale à PI, on aura

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PI}} = k = \text{constante}.$$

Donc, en remplaçant PI par sa valeur dans l'égalité (1), il viendra

$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{k} \times \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OH}} = \text{constante},$$

car les longueurs DO, OH ne varient pas quand le point M se déplace sur la courbe.

QUESTIONS.

372. Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le *degré* de l'enveloppe de la droite qui renferme ces trois points.

373. Soit une équation algébrique à coefficients entiers et le premier terme ayant pour coefficient l'unité; si les modules de toutes les racines sont égaux à l'unité, toutes les racines de l'équation sont des racines de l'unité.

(HERMITE.)

374. Soient

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma),\quad (\alpha',\ \beta',\ \gamma'),\quad \lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

les coordonnées de deux points et l'équation d'une droite situés dans le même plan. Posons

$$u = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \end{vmatrix} \qquad v = s \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \end{vmatrix}.$$

$uw - v^2 = 0$ est l'équation d'une conique qui passe par les deux points et touche la droite; a, b, c, s sont des constantes arbitraires. (CAYLEY.)

Observation. On fait usage ici de la notation de Hesse; les coordonnées d'un point dans un plan sont exprimées par les formes $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; on revient à la notation vulgaire en faisant

$$\gamma = 1,\quad z = 1;$$

dans l'équation ν, la constante s multiplie le déterminant.

375. Deux cercles concentriques ayant pour rayons r et $r\sqrt{-1}$ se coupent à angle droit. Démontrer et expliquer ce résultat d'apparence paradoxale.

376. Sur toute surface du troisième degré, on peut trouver vingt-sept droites.

377. Soient AA_1, BB_1, CC_1 les trois perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle ABC respectivement sur les côtés opposés; considérons le triangle A_1, B_1, C_1; soient A_2 le point où B_1C_1 coupe AA_1; B_2 le point où A_1C_1 coupe BB_1, C_2 le point où A_1B_1 coupe CC_1; considérons le triangle $A_2B_2C_2$; soient A_3 l'intersection de B_2C_2 avec AA_1; B_3 l'intersection de A_2C_2 avec BB_1, et C_3 l'intersection A_2B_2 avec CC_1; et ainsi de suite.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

étant les équations des côtés BC, AC, AB du triangle, l'équation de A_nB_n sera

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0$$

ou

$$m_n = \frac{m_{n-1} + 2}{m_{n-1}}, \quad m_{n-1} = \frac{m_{n-2} + 2}{m_{n-2}}, \ldots, \quad m_2 = \frac{m_1 + 2}{m_1},$$
$$m_1 = 1,$$

d'où

$$m_{2n} = \frac{2^{2n+1} + 1}{2^{2n} - 1}, \quad m_{2n+1} = \frac{2^{2n+2} - 1}{2^{2n+1} + 1};$$

l'équation de $A_\infty B_\infty$ est donc

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 2\gamma \cos C = 0;$$

de même pour les côtés B_nC_n, A_nC_n.

1°. La droite AA_1 bissecte l'angle $B_nA_nC_n$; de même les droites BB_1, CC_1.

2°. Toutes les droites A_nB_n passent par le même point;

de même les droites $A_n C_n$, $B_n C_n$; et ces trois points sont sur une même droite.

(E. Harrison, B. A. Trin. Coll. Cambr.)

378. Deux droites fixes A, A′ et deux points fixes o, o' sont donnés dans un même plan. Une molécule M parcourt la première droite avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a + bt,$$

et une molécule M′ parcourt la seconde droite A′ avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a' + b't;$$

e désigne l'espace, t le temps et a, b, a', b' sont des constantes données. S et S′ étant deux positions *simultanées* des deux molécules, on demande : 1° de trouver l'équation du lieu géométrique de l'intersection des deux droites oS, o'S′; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite SS′; 3° de démontrer qu'il existe une relation *homographique* entre les points S et S′.

379. Mêmes données géométriques; le mouvement du point M est donné par l'équation

$$e = at$$

et celui du point M′ par

$$et = a';$$

on demande de trouver : 1° l'équation du lieu géométrique de l'intersection des droites oS, oS′; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite SS′; 3° de démontrer qu'il existe entre les points S et S′ une relation d'*involution*.

380. Soient donnés un angle trièdre trirectangle de sommet S et un point quelconque O par lequel on mène un plan P coupant les faces de l'angle suivant ABC; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois

triangles; p, p', p'' étant les aires des parallélogrammes, on a

$$\frac{1}{p^2 \sin^2(\mathrm{SA}, \mathrm{P})} + \frac{1}{p'^2 \sin^2(\mathrm{SB}, \mathrm{P})} + \frac{1}{p''^2 \sin^2(\mathrm{SC}, \mathrm{P})}$$
$$= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}\right)^2 \frac{1}{\sin^2(\mathrm{SO}, \mathrm{P})};$$

(SA, P) est l'angle de la droite SA et du plan P, p est l'aire du parallélogramme ayant l'un de ses sommets en A ; de même p' a un sommet en B et p'' en C.

Lorsque le point O est extérieur au triangle ABC, il y a un changement de signes à faire dans le second membre.

(MANNHEIM.)

381. Représentons par Σp la somme de tous les diviseurs de p, l'unité et p compris. Soient $1, d_1, d_2, d_3, \ldots, m$ *tous* les diviseurs du nombre m. Faisons

$$\frac{m}{1} = m, \quad \frac{m}{d_1} = \delta_1, \quad \frac{m}{d_2} = \delta_2, \quad \frac{m}{d_3} = \delta_3, \ldots, \quad \frac{m}{m} = 1;$$

on aura cette identité

$$\Sigma 1 + d_1 \Sigma d_1 + d_2 \Sigma d_2 + d_3 \Sigma d_3 + \ldots + m \Sigma m$$
$$= \frac{m^2}{1} \Sigma 1 + (\delta_1)^2 \Sigma d_1 + (\delta_2)^2 \Sigma d_2 + (\delta_3)^2 \Sigma d_3 + \ldots + 1 \Sigma m$$

où $\Sigma 1 = 1$.

Exemple.

$$m = 6, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = 3,$$
$$\Sigma d_1 = 3, \quad \Sigma d_2 = 4, \quad \Sigma 6 = 12,$$
$$\delta_1 = 3, \quad \delta_2 = 2,$$
$$1 + 2.3 + 3.4 + 6.12 = 36.1 + 9.3 + 4.4 + 12 = 91;$$

l'identité peut s'écrire ainsi d'une manière abrégée

$$\Sigma (d \Sigma d) = \Sigma (\delta^2 \Sigma d).$$

(J. LIOUVILLE.)

382. Soit $f(x)$ une fonction algébrique de x et soient $1, d_1, d_2, d_3, \ldots, m$ tous les diviseurs de m. Remplaçant

x par tous ces diviseurs, posons

$$f(1)+f(d_1)+f(d_2)+\ldots+f(m)=\mathrm{F}(m).$$

Soient parmi ces diviseurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ *tous* les nombres premiers facteurs de m; on a l'identité

$$f(m)=\mathrm{F}(m)-\Sigma\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)+\Sigma\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right)-\Sigma\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)+\ldots$$

ou

$$\Sigma\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)=\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_2}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_3}\right),$$

$$\Sigma\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right)=\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_3}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_4}\right)+\ldots$$
$$+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_2\alpha_3}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_2\alpha_4}\right)+\ldots$$

. . . .

$$\Sigma\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)=\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}\right)+\ldots.$$

La loi est en évidence. (J. Liouville.)

383. Soient donnés dans un même plan : 1° une courbe algébrique par une équation de degré n ; 2° un triangle dont les côtés sont donnés par les trois équations linéaires

$$p=0,\quad q=0,\quad r=0;$$

d'un point quelconque M pris sur la courbe, abaissons sur les côtés du triangle p, q, r respectivement les perpendiculaires P, Q, R; construisons une seconde courbe dont les points aient pour coordonnées $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$, $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$; démontrer : 1° que la seconde courbe est aussi de degré n; 2° que l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants M, m des deux courbes est de degré $2n$.

384. La droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ordinaire change à chaque instant de longueur et de direction : trouver l'équation de la ligne

décrite par le milieu de cette droite et la loi du mouvement.

385. Mêmes données : trouver l'équation de l'enveloppe de la droite.

386. Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être ni un carré ni le double d'un carré (*).

(FAURE.)

387. Lorsque les coefficients de l'équation générale du quatrième degré

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

ont entre eux la relation

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'invariant cubique de la fonction du quatrième degré est nul, l'expression algébrique des racines de l'équation ne contient pas de radical cubique.

(FAURE.)

388. m droites sont données dans un plan, ainsi qu'un point A. Soient (a, b) le point d'intersection de deux quelconques de ces droites a, b, et B la droite conjuguée harmonique de la droite qui passe par A et (a, b) relativement aux deux droites a et b. Nous aurons dans le plan $\frac{1}{2}m(m-1)$ points (a, b) et autant de droites B. On demande : 1° de démontrer que par ces $\frac{1}{2}m(m-1)$ points on peut toujours mener une courbe de degré $m-1$ qui touche les droites B en ces points (a, b) ; 2° donner l'équation de cette courbe ; 3° appelant A la courbe ainsi construite, considérons une autre courbe B tracée au moyen d'un second point A′ de la même manière que la précédente ; du point A, on peut mener $(m-1)(m-2)$ tan-

(*) Le produit de tant de nombres consécutifs qu'on veut ne peut être une puissance parfaite d'aucun nombre. TM.

gentes à la courbe B, par le point A′ on peut en mener autant à la courbe A : on a ainsi $2(m-1)(m-2)$ points de contact qui sont sur une courbe de degré $m-2$; 4° donner l'équation de cette courbe. (Faure).

389. La somme des carrés des coefficients de $(k+1)^r$, r étant entier positif, est égal à $\frac{[2r]}{[r^2]}$, les crochets désignant des produits continuels. Exemple

$$r=3,$$

alors

$$1^2+3^2+3^2+1^2=\frac{1.2.3.4.5.6}{(1.2.3)^2}=20.$$

(Lagrange.)

390. Soit AEFD un rectangle; de F on abaisse une perpendiculaire FG sur la diagonale DE; par G on mène une parallèle au côté EF rencontrant le côté AE en C et une parallèle GB au côté DF rencontrant AD en B. Faisons

$$EF=m,\quad DF=n,\quad DE=d,\quad FG=h,$$
$$CG=b,\quad BG=c,\quad DG=f,\quad EG=g,$$

on a

$$h^3=bcd,\quad d^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}},\quad d^2-b^2-c^2=3fg.$$

(H. Montucci, professeur au lycée Saint-Louis.)

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION 365 (SYLVESTER)

(voir t. XVI, p. 125);

PAR M. E. PROUHET.

Le théorème de M. Sylvester est un cas particulier du suivant :

Si a *et* b *sont deux nombres entiers,* b *étant moindre*

que a *ou au plus égal à* a, *la partie entière de*

$$\left(a + \sqrt{a^2 + 2b}\right)^{2m+1}$$

est divisible par 2^{m+1}.

Je pose, pour abréger,

$$R = a + \sqrt{a^2 + 2b}$$

et

$$R^n = A_n + B_n \sqrt{a^2 + 2b},$$

en sorte qu'on aura

$$A_1 = a, \quad B_1 = 1.$$

La partie entière de R étant $2a$, on voit que le théorème est vrai pour $m = 0$. Sa vérité, dans tous les cas, résulte des théorèmes suivants :

Théorème I. *Si* A_{2m+1} *et* B_{2m+1} *sont divisibles par* 2^k, A_{2m+3} *et* B_{2m+3} *seront divisibles par* 2^{k+1}.

En effet, on a

$$R^{2m+1}.R^2 = R^{2m+3}$$

$$= \left(A_{2m+1} + B_{2m+1}\sqrt{a^2 + 2b}\right)\left(2a^2 + 2b + 2a\sqrt{a^2 + 2b}\right),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2 + 2b)A_{2m+1} + 2a(a^2 + 2b)B_{2m+1},$$
$$B_{2m+3} = 2a\,A_{2m+1} + (2a^2 + 2b)B_{2m+1},$$

égalités qui rendent la conclusion évidente.

Corollaire. A_1 et B_1 sont divisibles par 2 : donc A_{2m+1} *et* B_{2m+1} *sont divisibles par* 2^m.

Théorème II. *La partie entière de* R^{2m+1} *est* $2A_{2m+1}$.

En effet, R étant racine de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2ax - 2b = 0,$$

R^{2m+1} sera racine de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_{2m+1}x - 2^{2m+1}b^{2m+1} = 0,$$

car la somme des $(2m+1)^{ièmes}$ puissances des racines de

l'équation (1) est $2A_{2m+1}$, et le produit de ces puissances est $-(2b)^{2m+1}$.

En résolvant l'équation (2), on aura

$$R^{2m+1} = A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}.$$

Il faut donc démontrer que l'on a en général

$$2^{2m+1} b^{2m+1} \leqq 2A_{2m+1}.$$

Cette inégalité est déjà vérifiée pour $m = 0$, et nous allons faire voir que si elle a lieu jusqu'à un certain nombre m, elle aura encore lieu pour $m+1$.

En effet, on a

$$R^{2m+3}$$

$$= \left(A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}\right)\left(2a^2 + 2b + 2a\sqrt{a^2+2b}\right),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2 + 2b)A_{2m+1} + 2a\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}\sqrt{a^2 + 2b},$$

valeur rationnelle malgré sa forme, car

$$\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}} = B_{2m+1}\sqrt{a^2 + 2b} :$$

il en résulte

$$\begin{aligned} A_{2m+3} &> (2a^2 + 2b)A_{2m+1} + 2a^2 A_{2m+1} \\ &> (2a^2 + b)\,2A_{2m+1}. \end{aligned}$$

Cette inégalité ne sera pas troublée si l'on remplace dans le second membre $2A_{2m+1}$ par $2^{2m+1} b^{2m+1}$, quantité qui est plus petite par hypothèse, et $2a^2+b$ par $2b^2$. On aura donc

$$A_{2m+3} > 2^{2m+2} b^{2m+3},$$

ou

$$2A_{2m+3} > 2^{2m+3} b^{2m+3}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. A_{2m+1} étant divisible par 2^m (corollaire du théorème Ier), il en résulte que $2A_{2m+1}$ est divisible par

2^{m+1}. Donc la partie entière de R_{2m+1} est divisible par 2^{m+1}, ce qui est le théorème de M. Sylvester généralisé.

On peut compléter l'énoncé du théorème en ajoutant que la valeur entière la plus approchée *par excès* de R^{2m} est divisible par 2^m.

SOLUTION DE LA QUESTION 366 (*)

(voir p. 128);

PAR M. MANNHEIM.

Soit C le point de rencontre des droites M, N. Je circonscris la circonférence O au triangle ABC. Du point C comme centre, je décris une circonférence tangente à la circonférence O; soit D le point de contact. Lorsque la circonférence O roule dans l'intérieur de la circonférence C, les points A et B décrivent les droites M et N, je dis qu'un point quelconque du plan de la circonférence O décrit une ellipse. (Le point O seul décrit une circonférence.)

En effet, je joins ce point au centre O, cette droite coupe la circonférence O en deux points qui décrivent des droites perpendiculaires entre elles; le lieu cherché est donc celui d'un point d'une droite de longueur constante dont les extrémités parcourent des droites perpendiculaires entre elles. Donc, etc. (D'où l'on déduit très-facilement la construction que j'ai donnée, tome IX, page 419.)

Ce que je viens de dire suffit pour la première et la seconde partie de la question 366. Je passe à la troisième partie. Soit E le centre du segment capable de l'angle

(*) On est prié de faire la figure.

donné, ce point décrit une ellipse dont la normale au point E est ED. Cette droite coupe la circonférence E aux points où cette courbe touche son enveloppe (théorème de Descartes).

D'après cela, l'enveloppe est le lieu des extrémités d'une droite de longueur constante qui se meut en restant constamment normale à une ellipse fixe. On peut dire aussi que cette enveloppe se compose de deux développantes de la développée de l'ellipse.

Il est facile de voir que la projection du foyer de l'ellipse sur les tangentes à cette courbe est une conchoïde du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, le foyer étant le pôle de cette conchoïde.

Pour la quatrième partie, je ferai remarquer que sur une droite AB, on peut décrire deux segments capables d'un angle donné : l'un fait partie de la circonférence O dont les points décrivent des droites et dont l'enveloppe se compose de la circonférence C et de son centre, l'autre ne conduit à rien d'intéressant.

Ce qui suit n'est pas proposé dans la question 366.

Soit G un point quelconque de AB. Je mène DG qui coupe la circonférence O au point H. Je puis considérer G comme faisant partie d'une droite DH dont les extrémités décrivent la droite CH et le diamètre CD.

CH étant perpendiculaire sur DG normale à l'ellipse décrite par le point G, est la direction conjuguée du diamètre CG. Lorsque DH prend la direction CH, le point G vient en G′ et l'on a CG′ = DG; DG est donc la longueur du demi-diamètre conjugué de CG.

De là la construction suivante qui donne en grandeur et en direction les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.

CG et CG′ étant les demi-diamètres conjugués donnés, du point G j'abaisse sur CG′ la perpendiculaire GH que

je prolonge dans le sens HG d'une longueur GD égale à CG'. Sur CD comme diamètre, je décris la circonférence O, je mène le diamètre GO; les distances du point G aux extrémités de ce diamètre sont les demi-axes de l'ellipse, et les droites qui vont du point C à ces mêmes extrémités déterminent la direction des axes.

Dans un prochain article, je donnerai de cette construction une démonstration géométrique fondée sur les projections, je montrerai aussi comment on peut en déduire la construction connue de M. Chasles.

Note du Rédacteur. M. Breton (de Champ) fait observer qu'il a déjà traité cette question d'une manière complète et géométriquement dans les *Nouvelles Annales* (t. V, p. 591-599); qu'on trouve dans le même recueil une solution analytique (t. IV, p. 186 et 191). Cela n'a pas empêché qu'on ne se soit donné la peine de *redécouvrir* une partie de cette théorie dans le *Journal de* M. Liouville (t. XIV, p. 417) et dans le XXXVIe cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Note sur des théorèmes de Schooten et de La Hire. *Beati qui nihil legunt: omnia invenient.*

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA QUESTION 369

(voir p. 126);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Soient ABC un triangle donné, D un point fixe dans son plan, α, β, γ les trois points où les droites DA, DB, DC rencontrent les côtés du triangle opposés aux sommets par lesquels elles passent respectivement.

Si l'on décrit la conique Σ qui passe par les points α, β, γ et qui touche les côtés BC, AC, cette conique sera aussi tangente au côté AB.

En effet, soient α_1, β_1, γ_1 les trois points infiniment voisins de α, β, γ dans les directions BC, AC et AB respectivement; s'il est possible de prouver que les côtés opposés de l'hexagone $\alpha\alpha_1\,\beta\beta_1\,\gamma\gamma_1$ se rencontrent en trois points situés en ligne droite, la proposition énoncée sera un simple corollaire du théorème de Pascal (*Géom. sup.*, n° 658), et par conséquent sera démontrée.

Les côtés opposés de cet hexagone sont AB et $\alpha\beta$, AC et $\alpha\gamma$, BC et $\beta\gamma$. Or les deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ ayant (par construction) leurs sommets situés deux à deux sur trois droites concourantes en un même point D, sont *homologiques*, et, par suite, leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points situés en ligne droite (*Géom. sup.*, n° 365). Donc, etc.

Cela posé, il s'agit de mener deux droites R et S rencontrant AB aux points r_1, s_1, BC aux points r_2, s_2 et AC aux points r_3, s_3, de telle sorte que les trois systèmes de cinq points r_1, s_1, A, γ, B; r_2, s_2, B, α, C; r_3, s_3, C, β, A soient en involution, α, β, γ étant des *points doubles*.

Qu'on décrive une conique quelconque Σ' par les trois sommets du triangle ABC. Elle aura, avec la conique inscrite Σ, trois systèmes de cordes communes ou *axes de symptose* conjugués, dont deux pourront être imaginaires, mais dont un sera toujours réel (Poncelet, *Traité des propriétés projectives*) (*). Chacun de ces systèmes de deux droites satisfera à la question proposée. Car ce système peut être regardé comme représentant une conique circonscrite au même quadrilatère que Σ et Σ', et, par conséquent, toute transversale, par exemple l'un quelconque des côtés du triangle ABC, rencontre ces deux droites et les deux coniques en six points en involution

---

(*) Deux coniques ont en commun quatre points.

(*Géom. sup.*, n° 743 étendu aux coniques). Ici deux des six points se confondent en un seul α ou β ou γ, puisque la conique Σ est tangente aux côtés du triangle ABC. Donc ces points sont des *points doubles* des involutions auxquels ils appartiennent respectivement (*Géom. sup.*, n°s 192 et 205).

La conique Σ' n'étant assujettie par l'énoncé qu'à la seule condition de passer par les trois sommets du triangle ABC, est indéterminée; une infinité satisfont à la question, et, par conséquent, il existe une infinité de systèmes de deux droites R et S qui remplissent la condition exigée.

Pour que la question soit déterminée, il faut, par exemple, qu'on donne à priori l'une R des deux droites ou bien leur point de concours O.

Dans le premier cas, on fera passer la conique Σ' par les trois points A, B, C et par les deux points d'intersection (réels ou imaginaires) de la conique Σ avec la droite donnée R. L'axe de symptose de ces deux coniques qui est conjugué à R sera la deuxième droite cherchée S.

Dans le second cas, on sait que le point O étant un point de concours de deux cordes communes conjuguées des deux coniques Σ, Σ', jouit de la propriété d'avoir même polaire par rapport à ces deux coniques. Soit donc L sa polaire prise relativement à la conique inscrite Σ. La question devient celle-ci : Par trois points A, B, C faire passer une conique Σ' telle, qu'un point donné O ait pour polaire, relativement à elle, une droite aussi donnée L, question facile à résoudre, puisqu'il suffit, pour obtenir deux nouveaux points de cette conique, de déterminer sur chacun des rayons OA et OB par exemple, le conjugué harmonique du point A ou du point B par rapport au segment que la polaire L intercepte sur ce rayon à partir du point O.

Chacun des systèmes de cordes communes des deux

coniques Σ, Σ' résout la question 369, qui, ainsi circonscrite, comporte généralement trois solutions distinctes, dont deux peuvent être imaginaires, mais dont la troisième est toujours réelle.

Ces diverses constructions peuvent se traduire en analyse d'une manière simple à l'aide des notations abrégées dont on fait usage depuis quelques années dans la géométrie analytique et dont on trouve de nombreuses et intéressantes applications dans l'excellent *Traité des sections coniques* du Rév. G. Salmon, professeur à l'université de Dublin. Mais je n'entrerai pas ici dans ces nouveaux développements, qui ne pourraient, ce me semble, rien ajouter au fond même de la solution qui précède.

NOTE SUR LES QUESTIONS 368 ET 369 (CAYLEY)

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Soient

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

les équations respectives des trois côtés BC, AC, AB des trois côtés d'un triangle ABC. Prenons un point arbitraire C dans le plan du triangle, joignons ce point aux sommets, et désignons par α, β, γ les points où ces droites rencontrent les côtés opposés A, B, C. On peut prendre pour les équations de ces trois droites

$(a\alpha)$ $\qquad B - C = 0,$

$(B\beta)$ $\qquad A - C = 0,$

$(C\gamma)$ $\qquad A - B = 0.$

Cela posé, on voit aisément qu'une conique qui pas-

sera par les points α, 6, γ aura une équation de la forme (*)

$$aA^2 + bB^2 + cC^2$$
$$-(a+b)AB - (a+c)AC - (b+c)BC = 0,$$

a, b, c désignant des coefficients numériques arbitraires.

Cette conique rencontrera le côté A en un autre point α_1, et les côtés B et C en β_1 et γ_1. On obtiendra l'équation de la droite $A\alpha_1$ en faisant $A = 0$ dans l'équation de la conique. On trouve ainsi

Equat. de $(A\alpha_1)$ $\quad Bb - Cc = 0,$

$(B\beta_1)$ $\quad Aa - Cc = 0,$

$(C\gamma_1)$ $\quad Aa - Bb = 0.$

Ces droites se coupent en un même point D_1.

La droite DD_1 aura pour équation

$$Aa(b-c) + Bb(c-a) + Cc(a-b) = 0 \quad (^{**}).$$

On trouve encore, relativement à la conique :

Polaire du point D

$$A(b+c) + B(a+c) + C(a+b) = 0;$$

Polaire du point D_1

$$Aa^2(b+c) + Bb^2(a+c) + Cc^2(a+b) = 0.$$

(*) Car les coordonnés de α satisfont aux équations

$$B - C = 0, \quad A = 0,$$

et, par conséquent, à l'équation de la conique; de même pour β et γ.

TM.

(**) Si dans cette équation on fait

$$A = B = C,$$

elle est satisfaite, donc le point D est sur cette droite; elle est encore satisfaite en posant

$$Aa = Bb = Cc;$$

donc le point D_1 est sur la droite.

TM.

Prenons sur le côté BC opposé à l'angle A deux points a, a_1 qui soient conjugués harmoniques par rapport aux points B et C et par rapport aux intersections α, α_1 de la conique avec le côté BC. Prenons sur le côté AB et AC deux couples de points analogues b, b_1 et c, c_1 (*).

On trouve facilement

Équat. de	(Aa)	$B\sqrt{b} - C\sqrt{c} = 0,$
	(Bb)	$A\sqrt{a} - C\sqrt{c} = 0,$
	(Cc)	$A\sqrt{a} - B\sqrt{b} = 0,$
	(Aa_1)	$B\sqrt{b} + C\sqrt{c} = 0,$
	(Bb_1)	$A\sqrt{a} + C\sqrt{c} = 0,$
	(Cc_1)	$A\sqrt{a} + B\sqrt{b} = 0.$

Ces équations montrent : 1° que les trois droites Aa, Bb, Cc se coupent en un même point; 2° que les trois points a_1, b_1, c_1 sont sur une même droite qui a pour équation

$$A\sqrt{a} + B\sqrt{b} + C\sqrt{c} = 0.$$

Soient maintenant

$$R = \alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$
$$S = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C = 0,$$

deux droites, la première rencontre le côté BC aux points r_1, la seconde rencontre ce même côté au point s_1; nous allons déterminer ces deux droites de manière que les points r_1, s_1, B, C, α, α_1 soient en involution, les points a et a_1 devant être les points doubles de l'involution. Il suffit d'après la manière dont les points a et a_1 ont été trouvés, d'exprimer que les quatre points a, r_1, a_1, s_1 sont en position harmonique.

Soit O le point d'intersection des droites R, S.

(*) Ne pas confondre a, b et c, points, avec a. b, etc., coefficients arbitraires. TM.

Equat. de Oa $\quad R(\beta'\sqrt{c}+\gamma'\sqrt{b})-S(\beta\sqrt{c}+\gamma\sqrt{b})=0,$

Oa_1 $\quad R(\beta'\sqrt{c}-\gamma'\sqrt{b})+S(\gamma\sqrt{b}-\beta\sqrt{c})=0,$

et pour que ces droites soient conjuguées harmoniques relativement à OR et OS, il faudra qu'on ait

$$\beta\beta' c-\gamma\gamma' b=0.$$

Si les droites R, S doivent couper les deux autres côtés du triangle, de manière à satisfaire à des conditions analogues à celles qui ont lieu relativement au côté BC, on trouvera encore les deux relations

$$\beta\beta' a-\alpha\alpha' b=0,$$
$$\alpha\alpha' c-\gamma\gamma' a=0,$$

qui avec la première déterminent les quantités α', β', γ' au moyen de α, β, γ, de sorte que la droite S aura pour équation

$$\frac{Aa}{\alpha}+\frac{Bb}{\beta}+\frac{Cc}{\gamma}=0;$$

les quantités α, β, γ sont arbitraires, car la droite R est quelconque, mais elle détermine S.

Si dans les résultats précédents on fait $a=b=c=1$, la conique devient tangente aux trois côtés du triangle, et l'on a la solution des questions 368 et 369 de M. Cayley.

Les droites représentées par les équations

$$l_1=0,\quad l_2=0,$$
$$l_2+ml_1=0,\quad l_2+nl_1=0,\quad nl_2+m^2l_1=0$$

sont en involution.

$$l_2+ml_1=0$$

est l'équation de la droite double. (Brioschi.)

On pourrait encore, au moyen des équations précédentes, trouver facilement d'autres théorèmes; je n'en citerai qu'un :

Si l'on mène les droites $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\beta\alpha$ et que l'on cherche

les équations de ces droites, on trouve

$(\alpha\gamma)$ $\quad A - B + C = 0,$

$(\gamma\beta)$ $\quad -A + B + C = 0,$

$(\beta\alpha)$ $\quad A + B - C = 0;$

et l'on voit tout de suite que les intersections de $\alpha\gamma$ et B, $\beta\gamma$ et A, $\alpha\beta$ et C sont sur la droite

$$L = A + B + C = 0.$$

Joignons aussi $\alpha_1\gamma_1$, $\gamma_1\beta_1$, $\beta_1\alpha_1$; on aura pour les équations de ces droites

$(\alpha_1\gamma_1)$ $\quad Aa - Bb + Cc = 0,$

$(\gamma_1\beta_1)$ $\quad -Aa + Bb + Cc = 0,$

$(\beta_1\alpha_1)$ $\quad Aa + Bb + Cc = 0,$

et les points d'intersection de $\alpha_1\gamma_1$ et B, $\beta_1\gamma_1$ et A, $\alpha_1\beta_1$ et C sont sur la droite

$$L_1 = Aa + Bb + Cc = 0.$$

Si l'on se reporte à l'équation de la polaire du point D, on voit que les droites L et L_1 se coupent sur cette polaire, etc.

On pourra encore remarquer que si $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ représentaient des courbes d'ordre m, au lieu de droites, on obtiendrait des théorèmes analogues aux précédents (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 364

(voir p. 125);

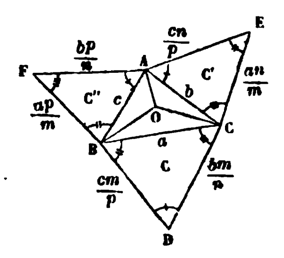
PAR M. C. CORDES,
Élève de l'institution de Lasalle (classe de M. Beynac).

Trouver sur le plan d'un triangle ABC un point O

(*) Incessamment des solutions de MM. Brioschi et Cremona.

dont la position soit telle, que les circonférences passant par le point O et deux des sommets du triangle soient entre elles comme trois droites m, n, p données.

Désignons par C, C′, C″ les trois circonférences qui



comprennent a, b, c. Supposons qu'on veuille obtenir

$$\frac{C}{m}=\frac{C'}{n}=\frac{C''}{p}.$$

Sur a, b, c construisons les triangles BCD, ACE, ABF ayant respectivement pour côtés

$$\left[a, \frac{bm}{n}, \frac{cm}{p}\right], \quad \left[\frac{an}{m}, b, \frac{cn}{p}\right], \quad \left[\frac{ap}{m}, \frac{bp}{n}, c\right].$$

Le rapport de similitude pour les deux premiers est $\frac{m}{n}$, pour le premier et le troisième, ce rapport est $\frac{m}{p}$; ces rapports expriment aussi ceux des circonférences circonscrites aux mêmes triangles: on a donc

$$\frac{C}{m}=\frac{C'}{n}=\frac{C''}{p}.$$

Reste à prouver que C, C′, C″ se coupent en un même point. Soit O le point d'intersection de C et de C′. Les deux quadrilatères BOCD, AOCE étant inscrits, on a

$$BOA = 4^{dr} - (AOC + COB) = BDC + AEC.$$

De la similitude des triangles BCD, ACE, on déduit

$$AEC = DBC,$$

par conséquent,

$$BOA = BDC + DBC,$$

ou

$$BOA = 2^{dr} - BCD.$$

Enfin de la similitude des triangles BCD, ABF, on tire

$$BCD = BFA,$$

donc

$$BOA = 2^{dr} - AFB,$$

et la circonférence C'' passe donc par le point O.

C. Q. F. D.

Lorque $m = n = p$, le point O est l'intersection des trois hauteurs du triangle ABC; car alors

$$A = D \quad \text{et} \quad BAC + BOC = 2^{dr},$$

théorème connu.

Note. 1°. En appliquant à cette construction la méthode des rayons vecteurs réciproques et prenant le point O pour pôle, on parvient à un beau théorème sur un triangle formé par des arcs d'hyperboles (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 227).

2°. Lorsque

$$C = \frac{C' \cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B} = \frac{C'' \cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} C},$$

le point O est le centre du cercle inscrit.

3°. Lorsque

$$C = \frac{C' \operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B} = \frac{C'' \operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} C},$$

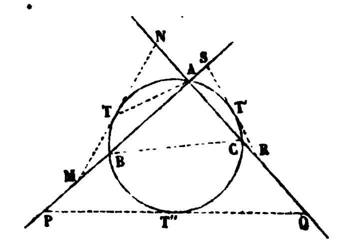
le point O est le centre du cercle circonscrit. TM.

SOLUTION DE LA QUESTION 367

(voir p 126),

PAR M. A. RAINBAUX.

Les côtés d'un angle droit inscrit dans une circonférence de cercle interceptent une demi-circonférence et sous-tendent deux arcs supplémentaires; on mène à chacun de ces trois arcs une tangente telle, que le point de contact soit au milieu de la portion de tangente interceptée entre les côtés de l'angle suffisamment prolongés. Démontrer que les trois points de contact sont les sommets d'un triangle équilatéral. (Sir F. POLLOCK.)



Soient BAC l'angle droit inscrit; MN, PQ, RS les trois tangentes; T, T', T'' les trois points de contact, milieux respectifs des trois tangentes. A étant un angle droit, le triangle ATM est isocèle et l'on a

$$\text{angle TMA} = \text{angle TAM};$$

l'angle TMA a pour mesure arc $\frac{\text{AT} - \text{BT}}{2}$, et l'angle TAM a pour mesure arc $\frac{\text{BT}}{2}$; donc

$$\text{AT} - \text{BT} = \text{BT},\quad \text{BT} = \frac{1}{2}\text{AT} \quad \text{et} \quad \text{AT} = \frac{2}{3}\text{AB}.$$

On démontre de même que

$$AT' = \frac{2}{3} AC;$$

donc

$$AT + AT' = TT' = \frac{2}{3}(AB + BC) = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ:$$

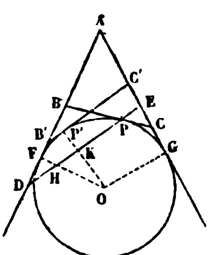
la corde TT′ est donc le côté d'un triangle équilatéral inscrit; de même les cordes T′T″, T″T (*). C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 363

(voir p. 125);

PAR M. G. COMMUNAL,
Élève de l'institution Loriol.

Mener par un point P donné dans l'intérieur d'un angle A une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle dont le périmètre soit un minimum.



Je décris une circonférence tangente aux deux côtés de l'angle et passant par le point donné, et je dis que la tangente BC, menée par le point P à cette circonférence, est la droite demandée.

Il suffit de prouver que le périmètre du triangle ABC

(*) La construction effective exige la trisection de l'angle. TM.

est moindre que celui du triangle ADE, formé en menant par le point P une droite quelconque DE qui coupera l'un des rayons OF, OG non prolongé à l'autre côté du centre. Supposons qu'elle coupe le rayon OF en un point H, l'angle EHO sera aigu et la perpendiculaire OK sur DE ira couper la circonférence en un point P' situé sur l'arc FPG. Le périmètre du triangle ADE est évidemment plus grand que celui du triangle AB'C', déterminé en menant par le point P' une tangente à la circonférence. Or les périmètres des triangles ABC, AB'C' sont égaux. Donc le périmètre du triangle ADE est plus grand que celui du triangle ABC. C. Q. F. D.

Le problème donne deux solutions. Dans la seconde solution, on fait emploi du cercle inscrit dans le triangle ABC et donne un minimum pour AB + AC — BC. Ces solutions s'appliquent aussi au triangle sphérique.

Note. M. Louis Armez, élève du lycée Louis-le-Grand, a résolu la question de la même manière.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 363;

PAR MM. A. SYLVESTRE ET BOYELDIEU,
Elèves de M. Catalan.

Cette question se résout très-simplement par les principes de la méthode géométrique des maxima et des minima (*Des Méthodes en géométrie*, par M. Paul Serret, chap. IV).

Soit MB la droite qui donne le périmètre minimum dans le triangle AOB. Si nous considérons deux directions A_1B_1 et A_2B_2 infiniment voisines, les deux triangles correspondants A_1OB_1, A_2OB_2 peuvent être considérés comme *rigoureusement isopérimètres*. Or l'enveloppe du troi-

sième côté de tous les triangles isopérimètres dont deux côtés sont fixes est une circonférence de cercle, et quand les droites $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ tendent vers AB, cette circonférence tend à passer par le point M. Il suffit donc de faire passer par le point M une circonférence tangente aux deux côtés de l'angle et de lui mener une tangente en M. Ces deux constructions sont connues d'ailleurs.

La question peut se résoudre aussi analytiquement d'une manière très-simple en prenant pour variable l'angle $ABx = \alpha$ que fait AB avec OB prolongé. Si l'on désigne par θ l'angle donné, par a et b les coordonnées du point M, il vient

$$\cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{a}{a+b} \cos^2 \frac{1}{2} \theta.$$

Pour vérifier que cette formule résulte bien de la construction précédente, considérons le cas particulier où le point serait sur la bissectrice ; elle devient

$$\cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \frac{1}{2} \theta,$$

relation évidente d'après notre construction.

Note. Cette solution analytique est de M. Sylvestre

M. Virieu, régent de Saumur, a adressé une solution par le calcul différentiel, et M. Rivet, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), une double solution géométrique et analytique bien détaillée.

NEUF THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE (*);

PAR M. P. DE LAFITTE.

I.

Dans deux figures homographiques, les trois points de

(*) A démontrer.

l'une (réels ou imaginaires) qui coïncident avec leurs homologues déterminent un cercle.

On joint les différents points de ce cercle considérés comme appartenant à la première figure avec leurs homologues dans la seconde; toutes les droites de jonction concourent en un même point S.

Ce point S est sur le cercle lui-même. Considéré comme appartenant à la seconde figure, il a son homologue S′ dans la première, et considéré comme appartenant à la première figure, il a son homologue S″ dans dans la seconde : le cercle des trois points passe par le point S′ et est tangent à la droite SS″.

II.

Dans deux figures homographiques, les trois droites de l'une qui coïncident avec leurs homologues déterminent un cercle inscrit au triangle formé par ces droites.

Les tangentes à ce cercle, considérées comme appartenant à la première figure, coupent leurs homologues sur une droite fixe L.

La droite L est tangente au même cercle. Considérée comme appartenant à la seconde figure, elle a son homologue L′ dans la première; considérée comme appartenant à la première, elle a son homologue L″ dans la seconde; le cercle est tangent à la droite L′ et passe au point d'intersection des droites L et L″.

(C'est le point de contact de L et du cercle.)

III.

Étant données deux figures homographiques sur un même plan, soient m, m', m'' les trois points qui coïncident avec leurs homologues.

1°. Si une conique est circonscrite au triangle m, m', m'', il existe sur la courbe deux points, et deux seule-

ment, tels, que deux droites tournant autour de ces points et se coupant sur la conique sont toujours homologues dans les deux figures.

2°. Si une conique est inscrite au même triangle, il existe deux tangentes à la conique, et deux seulement, telles, qu'une droite roulant sur la conique les rencontre en deux points toujours homologues dans les deux figures.

3°. Les deux propositions précédentes s'appliquent sans modifications à des coniques d'ailleurs quelconques.

IV.

On donne dans un même plan deux figures homographiques.

1°. Par un point *m* de la première qui coïncide avec son homologue, on mène une droite fixe A. Sur cette droite A on prend un point *a*. Les différentes droites de la première figure qui se coupent au point *a* rencontrent leurs homologues respectives en des points situés sur une conique, et à chaque point *a* de A correspond une telle conique.

Toutes ces coniques se touchent en un même point. Ce point de contact est le point *m*.

2°. Sur une droite M de la première figure qui coïncide avec son homologue, on prend un point fixe *a*. Par ce point on mène une droite A. Les droites menées des différents points de A à leurs homologues respectifs enveloppent une conique, et à chaque droite menée par le point fixe correspond une telle conique.

Toutes ces coniques se touchent en un même point. La tangente commune est la droite M.

Réciproquement, si les coniques relatives à deux points *a*, *b* se touchent, les points *a*, *b* sont en ligne droite avec un point double réel et le contact a lieu en ce point.

Si les coniques relatives à deux droites A, B se touchent, les droites A, B se coupent sur une droite double réelle et le contact a lieu sur cette droite.

IV (*bis*).

Dans deux figures homographiques quelconques situées dans un même plan, il existe toujours deux systèmes de deux droites homologues divisées en parties égales par leurs points homologues, et il n'en existe que *deux*.

Les deux droites de chaque figure sont parallèles à la droite de cette figure qui a pour homologue dans l'autre l'infini, et si deux points décrivent les deux droites d'une des figures *dans le même sens,* leurs homologues décriront les droites homologues en sens contraire (*).

V.

On suppose un triangle tel, que chaque sommet soit le pôle de la droite qui joint les deux autres relativement à un cercle (réel ou imaginaire).

Soient r^2 le carré du rayon; a^2, a'^2, a''^2 les carrés des cordes d'intersection des côtés du triangle et du cercle; t^2, t'^2, t''^2 les carrés des tangentes issues des trois sommets : on a, quel que soit le triangle, les deux relations

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{a''^2}=\frac{1}{2r^2},$$

$$\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t'^2}+\frac{1}{t''^2}=-\frac{1}{r^2}.$$

(*) Ce second système peut être utilisé pour représenter analytiquement deux figures *homologiques*, lorsque le centre d'homologie est sur l'axe d'homologie, cas auquel l'équation du n° 520 de la *Géométrie supérieure* devient illusoire. On peut substituer à cette équation une quelconque de celles du § III, chapitre VIII, a et a' étant les points où un rayon tournant autour du centre d'homologie rencontre les deux droites du second système, les deux droites du premier étant coïncidentes suivant l'axe d'homologie.

VI.

Par deux points donnés A, B, on peut faire passer une infinité de cercles. Deux droites quelconques issues du point A ou du point B, ou bien l'une du point A l'autre du point B, sont divisées par ces cercles en parties proportionnelles (*).

VII.

Étant donné un quadrilatère ABCD inscrit au cercle, du milieu du côté AB on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé CD; on fait la même chose pour les trois autres côtés. Du milieu de la diagonale AC, on abaisse une perpendiculaire sur l'autre diagonale; on fait la même chose pour cette seconde diagonale. Du point de concours des côtés AB et CD, on abaisse une perpendiculaire sur la droite qui joint leurs milieux; on fait la même chose pour les deux autres côtés opposés et pour les deux diagonales. Les neuf droites ainsi construites concourent en un même point.

VIII.

Soit un triangle ABC. Par le sommet A on mène une droite parallèle à la droite menée du centre G du cercle inscrit au triangle au milieu M de BC; on prend sur cette parallèle

$$AI = 2GM,$$

les points I et G étant situés de part et d'autre de AM. La plus courte distance du point I au cercle circonscrit au triangle est double du rayon du cercle inscrit.

(*) Ce théorème donne le moyen de diviser deux droites en parties proportionnelles connaissant deux points conjugués ou homologues. Ce mode de division qui donne deux points conjugués *simultanément*, et non l'un au moyen de l'autre, donne une solution très-élémentaire, très-simple et très-générale du problème célèbre de la section de raison.

Les cercles exinscrits donnent des propositions analogues.

CONSIDÉRATIONS ANALYTIQUES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. J. MENTION (*).

La solution de certains problèmes sur les courbes et les surfaces du second ordre exige qu'on laisse aux axes coordonnés la plus grande généralité. Déjà pour les courbes le calcul est fort compliqué et même impossible sans le secours des relations d'identité entre les coefficients de l'équation, qui permettent d'y introduire les simplifications nécessaires. Dans ce cas, M. Terquem a donné des formules générales pour les équations et les coordonnées des droites et points remarquables. Je me propose d'indiquer le moyen de faire une chose semblable pour les surfaces du second ordre.

Parmi les applications de la méthode que je vais exposer, ce Mémoire contiendra des problèmes connus, mais traités avec une étendue complète, et aussi d'autres questions, nouvelles et intéressantes, dont l'examen ne semble pas praticable à l'aide de pures considérations géométriques. Plus tard, j'aurai à envisager les relations d'identité, indépendamment des surfaces, sous le point de vue de l'analyse indéterminée.

I.

NOTATIONS ET RELATIONS D'IDENTITÉ.

1. D'abord je crois bon de rappeler les identités prin-

(*) Maintenant professeur à Saint-Pétersbourg.

cipales qu'emploie la théorie des courbes du second ordre (*).

Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation hexanôme. Posons

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + (B^2 - 4AC)F,$$

$$m = B^2 - 4AC = \frac{dL}{dF},$$

$$k = 2AE - BD = \frac{dL}{dE}, \quad k' = 2CD - BE = \frac{dL}{dD},$$

$$l = D^2 - 4AF = \frac{dL}{dC}, \quad l' = E^2 - 4CF = \frac{dL}{dA},$$

$$n = DE - 2BF = -\frac{dL}{dB}.$$

m et L ne changent pas avec l'origine des coordonnées. On a les identités

$$k^2 - ml = 4AL, \quad 2kk' + 2mn = -4BL,$$

$$k'^2 - ml' = 4CL, \quad k'l + kn = 2DL,$$

$$kl' + k'n = 2EL, \quad n^2 - ll' = 4FL,$$

$$4L^2 = lk'^2 + l'k^2 + 2nkk' + m(n^2 - ll').$$

Maintenant je prends l'équation des surfaces du second ordre, suivant l'usage, sous la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. I, p. 490.

Je pose

$$L = A'A''C^2 + AA''C'^2 + AA'C''^2 - B^2C^2 - B'^2C'^2 - B''^2C''^2$$
$$- 2B''A''CC' - 2BAC''C' - 2B'A'CC''$$
$$+ 2BB'CC' + 2B'B''C''C' + 2BB''CC''$$
$$+ E(AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''),$$

$$m = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = \frac{dL}{dE},$$

$$k = CA'A'' - B^2C + C'BB' - C'B''A'' + C''BB'' - C''B'A' = \frac{dL}{d(2C)},$$

$$k' = C'AA'' - B'^2C' + C''B'B'' - C''BA + CBB' - CB''A'' = \frac{dL}{d(2C')},$$

$$k'' = C''AA' - B''^2C'' + CBB'' - CB'A' + C'B'B'' - C''BA = \frac{dL}{d(2C'')},$$

$$l = A''C'^2 + A'C''^2 - 2BC''C' + B^2E - EA'A'' = \frac{dL}{dA},$$

$$l' = A''C^2 + AC''^2 - 2B'CC'' + B'^2E - EAA'' = \frac{dL}{dA'},$$

$$l'' = A'C^2 + AC'^2 - 2B''CC' + B''E - EAA' = \frac{dL}{dA''},$$

$$n = BC^2 + AC''C' - B'CC' - B''CC'' - ABE + B'B''E = -\frac{dL}{d(2B)},$$

$$n' = B'C'^2 + A'CC'' - BCC' - B''C''C' - A'B'E + EBB'' = -\frac{L}{d(2B')},$$

$$n'' = B''C''^2 + A''CC' - B'C''C' - BCC'' - A''B''E + EBB' = -\frac{dL}{d(2B'')},$$

$$F' = Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y'$$
$$+ 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E,$$

x', y', z' étant les coordonnées d'un point quelconque de l'espace. m et L ne changent pas avec l'origine

Résolvant en premier lieu l'équation par rapport à z,

on a

$$z = \frac{-(\mathrm{B}y + \mathrm{B}'x + \mathrm{C}'') \pm \sqrt{\begin{array}{l} y^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}'\mathrm{A}'') + x^2(\mathrm{B}'^2 - \mathrm{AA}'') \\ + 2xy(\mathrm{BB}' - \mathrm{A}''\mathrm{B}'') + 2y(\mathrm{BC}'' - \mathrm{A}''\mathrm{C}') \\ + 2x(\mathrm{B}'\mathrm{C}'' - \mathrm{A}''\mathrm{C}) + \mathrm{C}''^2 - \mathrm{A}''\mathrm{E} \end{array}}}{2\mathrm{A}''}.$$

Les fonctions k_1, k'_1, l_1, l'_1, n_1, m_1 relatives aux courbes du second degré entre les coefficients de la fonction hexanôme comprise sous le radical, seront égales aux fonctions correspondantes de l'équation décanôme multipliées par $4\mathrm{A}''$: ainsi

$$\mathrm{L}_1 = -4\mathrm{A}''^2\mathrm{L}\ (^*).$$

J'applique les identités connues, et je remarque qu'on pourrait résoudre par rapport à x ou y, ce qui me fournit le tableau ci-dessous :

$$k^2 - ml = -\mathrm{L}(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}'\mathrm{A}''),$$
$$k'^2 - ml' = -\mathrm{L}(\mathrm{B}'^2 - \mathrm{AA}''),$$
$$k''^2 - ml'' = -\mathrm{L}(\mathrm{B}''^2 - \mathrm{AA}'),$$
$$kk' + mn'' = \mathrm{L}(\mathrm{BB}' - \mathrm{A}''\mathrm{B}''),$$
$$kk'' + mn' = \mathrm{L}(\mathrm{BB}'' - \mathrm{A}'\mathrm{B}'),$$
$$k'k'' + m'n = \mathrm{L}(\mathrm{B}'\mathrm{B}'' - \mathrm{AB}),$$
$$k'l + kn'' = -\mathrm{L}(\mathrm{B}'\mathrm{C}'' - \mathrm{A}''\mathrm{C}),$$
$$kl' + k'n'' = -\mathrm{L}(\mathrm{BC}'' - \mathrm{A}''\mathrm{C}'),$$
$$kl'' + k''n' = -\mathrm{L}(\mathrm{BC}' - \mathrm{A}'\mathrm{C}''),$$
$$k''l + kn' = -\mathrm{L}(\mathrm{B}''\mathrm{C}' - \mathrm{A}'\mathrm{C}),$$
$$k'l'' + k''n = -\mathrm{L}(\mathrm{B}'\mathrm{C} - \mathrm{AC}''),$$
$$k''l' + k'n = -\mathrm{L}(\mathrm{B}''\mathrm{C} - \mathrm{AC}'),$$

(*) Ainsi

$$k_1 = 4[(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}'\mathrm{A}'')(\mathrm{B}'\mathrm{C}'' - \mathrm{A}''\mathrm{C}) - (\mathrm{BB}' - \mathrm{A}''\mathrm{B}'')(\mathrm{BC}'' - \mathrm{A}''\mathrm{C}')$$
$$= -4\mathrm{A}''^2\mathrm{K}.$$

$$n''^2 - ll' = -L(C''^2 - A''E),$$
$$n'^2 - ll'' = -L(C'^2 - A'E),$$
$$n^2 - l'l'' = -L(C^2 - AE).$$

2. *Valeurs des coefficients de l'équation au moyen des identités.*

On a

$$(kk' + mn'')^2 - (k^2 - ml)(k'^2 - ml')$$
$$= L^2[(BB' - A''B'')^2 - (B^2 - A'A'')(B'^2 - AA'')] = L^2A''m,$$

d'où

$$A''L^2 = k^2l' + k'^2l + 2n''kk' + mn''^2 - mll'.$$

De même

$$(kk' + mn'')(kk'' + mn') - (k^2 - ml)(k'k'' + mn)$$
$$= L^2[(BB' - A''B'')(BB'' - A'B') - (B^2 - A'A'')(B'B'' - AB)]$$
$$= -L^2Bm,$$

d'où

$$BL^2 = n(k^2 - ml) - k'(kn' + k''l) - n''(kk'' + mn').$$

de même $B'L^2$, $B''L^2$.

Les valeurs de C, C′, C″ se tirent des trois identités

$$Ak + B'k'' + B''k' + Cm = 0,$$
$$A'k' + Bk'' + B''k + C'm = 0,$$
$$A''k'' + B'k + Bk' + C''m = 0.$$

Quant à celle de E, on l'obtiendra par les identités

$$-Cl + C'n'' + C''n' = Ek,$$
$$Cn'' - C'l' + C''n = Ek',$$
$$Cn' + C'n'' - C''l'' = Ek''.$$

Enfin de

$$Ck + C'k' + C''k'' + mE = L,$$

on déduit L en fonction de $k, k', k'', l, \ldots$

Nous pouvons donc former ce nouveau groupe de relations :

$$AL^2 = k'^2 l'' + k''^2 l' + 2nk'k'' + mn^2 - ml'l'',$$

$$A'L^2 = k^2 l'' + lk''^2 + 2n'kk'' + mn'^2 - mll'',$$

$$A''L^2 = k^2 l' + k'^2 l + 2n''kk' + mn''^2 - mll',$$

$$BL^2 = nk^2 - mnl - kk'n' - k'k''l - n''kk'' - mn'n'',$$

$$B'L^2 = n'k'^2 - mn'l' - k'k''n'' - k''kl' - nkk' - mnn'',$$

$$B''L^2 = n''k''^2 - mn''l'' - kk''n - kk'l'' - n'k'k'' - mnn',$$

$$CL^2 = l'l''k - n^2 k + nn'k' + nn''k'' + k''l'n' + k'l''n'',$$

$$C'L^2 = ll''k' - n'^2 k' + nn'k + n''l''k + n'n''k'' + lnk'',$$

$$C''L^2 = ll'k'' - n''^2 k'' + nn''k + n'n''k' + kl'n' + k'ln,$$

$$EL^2 = 2nn'n'' + n''^2 l'' + n'^2 l' + n^2 l - ll'l'',$$

$$\begin{aligned} L^3 = {} & 2mnn'n'' + mn''^2 l'' + mn'^2 l' + mn^2 l - mll'l'' \\ & + 2kk'nn' + 2kk''nn'' + 2k'k''n'n'' - k'^2 n'^2 \\ & - k''^2 n''^2 - k^2 n^2 + 2nlk''k + 2n''l''kk' \\ & + 2n'l'kk'' + ll''k'^2 + l'l''k^2 + ll'k'^2. \end{aligned}$$

Il existe un grand nombre d'autres identités : nous avons seulement donné les plus importantes. Par la suite, nous donnerons au fur et à mesure celles dont on aura besoin.

3. Il faut encore noter les deux relations suivantes :

1°. Du système d'équations

$$\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma = 0,$$

$$\alpha xy - \varepsilon x - \beta y + \xi = 0,$$

$$\alpha y^2 - 2\varepsilon y + \pi = 0,$$

on conclut

$$\alpha\pi\gamma - \gamma\varepsilon^2 - \pi\beta^2 - \alpha\xi^2 + 2\beta\varepsilon\xi = 0.$$

2°. Si l'on a les six équations :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\gamma^2 = 0,$$

$$A\alpha'^2 + B\alpha'\beta' + C\beta'^2 + D\beta'\gamma' + E\alpha'\gamma' + F\gamma'^2 = 0,$$

$$A\alpha''^2 + B\alpha''\beta'' + C\beta''^2 + D\beta''\gamma'' + E\alpha''\gamma'' + F\gamma''^2 = 0,$$

on a aussi

$$A + C + F = 0.$$

Démonstration. On peut évidemment supposer γ et γ', égaux à l'unité. Alors

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + 1 = 0,$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + 1 = 0,$$

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + 1 = 0,$$

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\beta + E\alpha + F = 0,$$

. . . .

Les trois premières équations donnent

$$\alpha = \sqrt{\frac{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')}{1+\beta'\beta''}},$$

$$\alpha' = \sqrt{\frac{-(1+\beta\beta')(1+\beta'\beta'')}{1+\beta\beta''}}$$

et

$$\alpha'' = \sqrt{\frac{-(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')}{1+\beta\beta'}}.$$

Remplaçant α par sa valeur dans la relation

$$C\beta^2 + A\alpha^2 + D\beta + F = -\alpha(B\beta + E),$$

il vient

$$C\beta^2(1+\beta'\beta'') - A(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'') + D\beta(1+\beta'\beta'') + F(1+\beta'\beta'') = (B\beta+E)\sqrt{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')};$$

on a de même

$$C\beta'^2(1+\beta\beta'') - A(1+\beta\beta')(1+\beta'\beta'') + D\beta'(1+\beta\beta'') + F(1+\beta\beta'') = (B\beta'+E)\sqrt{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')}.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre et supprimant le facteur $\beta - \beta'$, on obtient

$$C(\beta+\beta') + A\beta'\beta''\beta - C(1+\beta\beta')\beta'' + D - F\beta'' = B\sqrt{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')},$$

et aussi par des moyens semblables

$$C(\beta+\beta'') + A\beta'\beta''\beta - C(1+\beta\beta'')\beta' + D - F\beta' = B\sqrt{-(1+\beta\beta')\ldots}$$

Retranchant encore, on obtient

$$(\beta' - \beta'')(A + C + F) = 0.$$

C. Q. F. D.

II.

DU PLAN TANGENT, DES AXES PRINCIPAUX. SECTIONS CIRCULAIRES.

1. Les coordonnées du centre de la surface sont $\frac{k}{m}$, $\frac{k'}{m}$, $\frac{k''}{m}$. En y transportant l'origine, l'équation de la surface prend la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = \frac{L}{m},$$

parce que

$$A k^2 + A' k'' + A'' k''^2 + 2B k'' k' + 2 B' k'' k + 2 B'' k k'$$
$$+ 2C k + 2C' k' + 2C'' k'' + m^2 E = L m.$$

Donc si $L = 0$, la surface sera conique (*), et réciproquement.

La direction d'une corde principale étant représentée par $x = \mu z$, $y = \nu z$, on aura pour déterminer μ et ν les équations

$$\frac{A\mu + B' + B''\nu}{\mu + \nu\cos xy + \cos xz} = \frac{A'\nu + B + B''\mu}{\nu + \cos yz + \mu\cos xy}$$
$$= \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \mu\cos zx + \nu\cos zy}.$$

Si l'on pose

$$A'' + B\nu + B'\mu = s(1 + \mu\cos zx + \nu\cos zy),$$

on parviendra, comme à l'ordinaire, à l'équation cubique

$$(s - A)(s - A')(s - A'') - (s - A')(s\cos zx - B')^2$$
$$-(s - A'')(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s\cos yz - B)^2$$
$$+ 2(s\cos zy - B)(s\cos zx - B')(s\cos xy - B'') = 0,$$

ou

$$s^3(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy\cos zx\cos zy)$$
$$- s^2\left[\begin{array}{l} A\sin^2 yz + A'\sin^2 zx + A''\sin^2 xy \\ - 2B'(\cos xz - \cos zy\cos xy) \\ - 2B''(\cos xy - \cos zy\cos zx) \\ - 2B(\cos yz - \cos xy\cos xz) \end{array}\right]$$
$$- s\left[\begin{array}{l} B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA' \\ + 2\cos xy(A''B'' - BB') + 2\cos zy(AB - B'B'') \\ + 2\cos xz(A'B' - BB'') \end{array}\right]$$
$$+ AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0.$$

(*) Ce cône est imaginaire lorsque le centre est à l'intérieur de la surface ; ellipsoïde. TM.

Il ne serait pas difficile de montrer que les racines de cette équation sont liées aux longueurs des axes ; mais j'obtiendrai par une autre voie l'équation ayant pour racines les carrés des demi-axes..

La marche que suit M. Leroy (*Analyse appliquée*, page 197) d'après M. Cauchy pour rechercher à quels caractères on peut reconnaître que la surface est de *révolution,* est sans contredit d'une extrême simplicité. Or rien n'empêche de la suivre avec des axes obliques. On arrive aux conditions

$$\frac{B}{\cos yz} = \frac{B'}{\cos xz} = \frac{B''}{\cos xy},$$

$$\frac{BA - B'B''}{\cos yz - \cos xz \cos xy} = \frac{B'A' - BB''}{\cos xz - \cos yz \cos xy}$$
$$= \frac{B''A'' - BB'}{\cos xy - \cos xz \cos yz}.$$

Lorsque la corde, au lieu d'être principale, sera simplement conjuguée au plan

$$dy + ex + fz = 0,$$

μ et ν s'expriment comme il suit :

$$\mu = \frac{ef(BB'' - A'B') + ed(BB' - A''B'') - e^2(B^2 - A'A'')}{df(B'B'' - AB) + ef(BB'' - A'B') - f^2(B''^2 - AA')},$$

$$\nu = \frac{df(B'B'' - AB) + de(BB' - A''B'') - d^2(B'^2 - AA'')}{df(B'B'' - AB) + ef(BB'' - A'B') - f^2(B''^2 - AA')},$$

pour les paraboloïdes dans lesquels la droite

$$x = \frac{k}{k''}z, \quad y = \frac{k'}{k''}z$$

est parallèle à l'axe, on a

$$\mu = \frac{e}{f}\frac{k}{k''}, \quad \nu = \frac{d}{f}\frac{k'}{k''}.$$

2. Coupons la surface par le plan

$$dy + ex + fz + g = 0.$$

L'intersection aura pour projection sur le plan des xy la courbe

$$\begin{aligned}
&y^2(A'f^2 + A''d^2 - 2Bdf)\\
&+ 2xy(B''f^2 + A''de - Bef - B'df)\\
&+ x^2(Af^2 + A''e^2 - 2B'ef)\\
&+ 2y(A''dg - Bgf + C'f^2 - C''df)\\
&+ 2x(A''eg - B'gf - C''ef + Cf^2)\\
&+ A''g^2 - 2C''gf + Ef^2 = 0.
\end{aligned}$$

Les fonctions m et L relatives à cette courbe sont

$$\begin{aligned}
m_1 = {}& d^2(B'^2 - AA'') + e^2(B^2 - A'A'') + f^2(B''^2 - AA')\\
&+ 2de(A''B'' - BB') + 2ef(B'A' - BB'')\\
&+ 2df(AB - B'B''),\\
L_1 = {}& le^2 + l'd^2 + l''f^2 + 2egk + 2dgk' + 2gfk''\\
&+ mg^2 - 2dfn - 2efn' - 2den'',
\end{aligned}$$

$l, l', l'', k, \ldots, n''$ ayant les significations fixés plus haut.

A l'aide de ces expressions, nous pourrions étudier les surfaces du second ordre et avoir leurs caractères spécifiques. Je supprime la discussion dont la place serait plutôt dans une théorie systématique des surfaces du second ordre, que je n'ai pas l'intention d'établir ici.

Quand la *section* se réduira à un point ou au système de deux droites, le plan sera tangent à la surface. Ainsi la relation

$$\begin{aligned}
&mg^2 + le^2 + l'd^2 + l''f^2 + 2keg + 2k'dg + 2k''gf\\
&\qquad - 2dfn - 2efn' - 2aen'' = 0
\end{aligned}$$

représente la condition nécessaire et suffisante (*) pour le

(*) Nécessaire, mais non suffisante; le point de contact est imaginaire lorsque m_1 et L_1 sont négatifs. TM.

contact du plan

$$dy + ex + fz + g = 0$$

avec la surface du second ordre.

Si $l = 0$, ou $l' = 0$, ou $l'' = 0$, la surface touche un des plans coordonnés.

3. On aura les sections circulaires, en identifiant l'équation se rapportant à la section plane en général avec celle de la projection de l'intersection du plan

$$dy + ex + fz + g = 0$$

et de la sphère

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \\ &+ 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos xy + 2(x-\alpha)(z-\gamma)\cos xz \\ &+ 2(y-\beta)(z-\gamma)\cos yz = R^2.\end{aligned}$$

Cette projection ayant pour équation

$$\begin{aligned}&y^2(d^2+f^2-2df\cos zy) \\ &+ 2xy(f^2\cos xy + de - ef\cos zy - df\cos xz) \\ &+ x^2(f^2+e^2-2ef\cos xz) \\ &+ 2y[(\beta+\alpha\cos xy+\gamma\cos yz)f^2 - df(\gamma+\alpha\cos xz+\beta\cos yz)] \\ &+ 2x[(\alpha+\beta\cos xy+\gamma\cos xz)f^2 - ef(\gamma+\alpha\cos xz+\beta\cos yz)] \\ &+f^2\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\cos xy+2\alpha\gamma\cos xz \\ +2\beta\gamma\cos yz - R^2\end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

il viendra en identifiant (p. 217)

$$\begin{aligned}d^2+f^2-2df\cos xy &= (A'f^2 + A''d^2 - 2Bdf)\lambda, \\ f^2\cos xy + de - ef\cos zy - df\cos xz & \\ &= (B''f^2 + A''de - Bef - B'df)\lambda, \\ f^2+e^2-2ef\cos xz &= (Af^2 + A''e^2 - 2B'ef)\lambda,\end{aligned}$$

où λ est un facteur à déterminer.

De là on conclut

$$\frac{d^2}{f^2}(1-\lambda A'')+1-\lambda A'-\frac{2d}{f}(\cos zy-\lambda B)=0,$$

$$\cos yx-\lambda B''+\frac{d}{f}\frac{e}{f}(1-\lambda A'')-\frac{e}{f}(\cos zy-\lambda B)$$
$$-\frac{d}{f}(\cos xz-\lambda B')=0,$$

$$1-\lambda A+\frac{e^2}{f^2}(1-\lambda A'')-\frac{2e}{f}(\cos xz-\lambda B')=0.$$

Donc, en vertu d'une identité, on est conduit à cette équation du troisième degré en λ

$$(1-\lambda A)(1-\lambda A')(1-\lambda A'')-(1-\lambda A')(\cos xz-\lambda B')^2$$
$$-(1-\lambda A'')(\cos xy-\lambda B'')^2-(1-\lambda A)(\cos yz-\lambda B)^2$$
$$+2(\cos zy-\lambda B)(\cos xz-\lambda B')(\cos xy-\lambda B'')=0,$$

ou

$$\lambda^3(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'')$$
$$-\lambda^2\left[\begin{array}{l}B^2-A'A''+B'^2-AA''+B''^2-AA'\\+2\cos xy(A''B''-BB')+2\cos zy(AB-B'B'')\\+2\cos zx(A'B'-BB'')\end{array}\right]$$
$$-\lambda\left[\begin{array}{l}A\sin^2 yz+A'\sin^2 xz+A''\sin^2 xy\\-2B'(\cos xz-\cos zy\cos xy)\\-2B''(\cos xy-\cos zy\cos zx)\\-2B(\cos yz-\cos xy\cos xz)\end{array}\right]$$
$$+1-\cos^2 xy-\cos^2 xz-\cos^2 yz+2\cos xy\cos xz\cos yz=0\ (*).$$

Pour découvrir la signification géométrique de λ, transportons l'origine des coordonnées au centre de la surface, ce qui ne changera pas les coefficients de l'équation du troisième degré, et imaginons que la sphère soit concentrique à la surface. Un raisonnement direct apprend

(*) Cette dernière expression est le volume du parallélipipède qu'on obtient en prenant à partir de l'origine une longueur égale à l'unité sur les trois axes. TM.

(*voyez* les *Développements de Géométrie* de M. Charles Dupin, page 168) qu'il y a deux sections circulaires ayant pour centre celui de la surface et pour rayon la longueur de l'axe moyen. Mais l'identification fournit

$$\lambda E = - R^2;$$

et, l'origine des cooordonnées étant au centre,

$$E = \frac{L}{m}.$$

Donc le carré de l'axe moyen sera racine de l'équation du troisième degré dont l'inconnue deviendrait $-\lambda \frac{L}{m}$. On voit de même à priori que les sphères concentriques à la surface et ayant pour rayons les longueurs des axes extrêmes, coupées par leurs plans correspondants, donneraient des cercles ne pouvant appartenir à la surface du second ordre, quoique λ reste toujours réel. Conséquemment, le calcul, qui n'admettait aucune différence entre ces divers cas, doit faire trouver les trois valeurs de λ correspondantes aux axes principaux, et l'équation dont l'inconnue est $-\lambda \frac{L}{m}$ a bien pour racines les carrés des demi-axes.

Notre déduction s'accorde, au surplus, avec l'énoncé qu'on lit à la page 399, des *Propriétés projectives*.

Ainsi l'équation aux carrés des demi-axes dans le cas le plus général sera

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^3 + \lambda_1^2 \frac{L}{m^2}[\Sigma(B^2 - A'A'') + \Sigma 2\cos xy\,(A''B'' - BB')] \\
&- \lambda_1 \frac{L^2}{m^3}[\Sigma A \sin^2 yz - \Sigma 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz)] \\
&- \frac{L^3}{m^4}(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz \\
&+ 2\cos xy \cos xz \cos zy) = 0.
\end{aligned}$$

On trouve cette équation dans un Mémoire de M. Bé-

rard (*Annales* de Gergonne, t. III) où elle paraît avoir été peu remarquée (*).

4. Problème. *Étant donnée l'équation d'un plan, calculer les coordonnées de son pôle.*

L'équation générale du plan polaire d'un point (x, y, z) étant

$$\begin{aligned} &X(Ax + B'z + B''y + C) + Y(A'y + Bx + B''z + C') \\ &+ Z(A''z + By + B'x + C'') + Cx + C'y + C''z + E = 0, \end{aligned}$$

si

$$dY + eX + fZ + g = 0$$

est l'équation du plan dont on cherche le pôle, les coordonnées de celui-ci satisferont aux trois équations

$$\begin{aligned} &x(Ag - Ce) + y(B''g - C'e) + z(B'g - C''e) = Ee - Cg, \\ &x(B''g - Cd) + y(A'g - C'd) + z(Bg - C''d) = Ed - C'g, \\ &x(B'g - Cf) + y(Bg - C'f) + z(A''g - C''f) = Ef - C''g; \end{aligned}$$

d'où l'on tire ces valeurs de x, y, z :

$$x = \frac{el + gk - dn'' - fn'}{mg + ek + dk' + fk''},$$

$$y = \frac{dl' + gk' - en'' - fn}{mg + ek + dk' + fk''},$$

$$z = \frac{fl'' + gk'' - dn' - en}{mg + ek + dk' + fk''}.$$

lorsque x, y, z sont donnés, on déduit $\frac{d}{g}, \frac{e}{g}, \frac{f}{g}$.

III.

DES GÉNÉRATRICES RECTILIGNES ET DU CÔNE CIRCONSCRIT.

1. Soient

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta$$

(*) M. de Saint-Guilhem (*Journal de Mathématiques*, t. I, p. 318) et M. Lebesgue (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 406) l'ont aussi donnée.

les équations d'une génératrice rectiligne. Alors on a

$$m\beta^2 + 2\alpha\beta k'' + l''\alpha^2 - 2\beta k + 2\alpha n' + l = 0,$$
$$m\delta^2 + 2\gamma\delta k'' + l''\gamma^2 - 2\delta k' + 2\gamma n + l' = 0,$$

relations qui renferment tous les résultats connus. Je remarque seulement que le cas particulier du cône entraîne l'égalité $L = 0$.

Ensuite les coefficients α et γ dépendent l'un de l'autre d'après cette troisième relation

$$A\alpha^2 + A'\gamma^2 + 2B\gamma + 2B'\alpha + 2B''\alpha\gamma + A'' = 0,$$

d'où

$$\gamma = \frac{-(B + B''\alpha) \pm \sqrt{B^2 - A'A'' + (BB'' - A'B')\alpha + \alpha^2(B''^2 - AA')}}{A'}.$$

Or pour $m = 0$, la quantité sous le radical est un carré parfait, donc alors

$$\gamma = i\alpha + p,$$

$$i = \frac{\pm\sqrt{B''^2 - AA'} - B''}{A'} = \frac{\dfrac{+k''}{\sqrt{-L}} - B''}{A'},$$

$$p = \frac{\pm\dfrac{A'B' - BB''}{2\sqrt{B''^2 - AA'}} - B}{A'} = \frac{\pm\dfrac{k\sqrt{-L}}{k''} - B}{A'}.$$

Par conséquent, il y a deux séries de génératrices rectilignes parallèles aux deux plans

$$y = ix + pz$$

respectivement.

2. Soit

$$dy + ex + fz = dy' + ex' + fz'$$

l'équation d'un plan tangent à la surface et passant par le point x', y', z'. En substituant à g la valeur

$$-(dy' + ex' + fz')$$

dans la relation de contact, celle-ci devient (p. 217)

$$\frac{d^2}{f^2}(my'^2 - 2k'y' + l') - \frac{2d}{f}\frac{e}{f}(ky' + k'x' + n'' - mx'y')$$

$$+ \frac{c^2}{f^2}(mx'^2 - 2kx' + l) - \frac{2d}{f}(k'x' + k''y' + n - my'z')$$

$$- \frac{2e}{f}(kz' + k''x' + n' - mz'x') + mz'^2 - 2k''z' + l'' = 0.$$

Il faut en calculer les déterminants m_1 et L_1.

1°.

$$m_1 = y'^2(k^2 - ml) - 2x'y'(kk' + mn'') + x'^2(k'^2 + ml')$$

$$+ 2y'(kn'' + k'l) + 2x'(k'n'' + kl') + n''^2 - ll'$$

$$= -L\left[\begin{array}{l} y'^2(B^2 - A'A'') + x'^2(B'^2 - AA'') \\ + 2x'y'(BB' - A''B'') + 2y'(BC'' - A''C') \\ + 2x'(B'C'' - A''C) + C''^2 - A''E \end{array}\right]$$

$$= -L[(A''z' + By' + B'x' + C'')^2 - A''F'].$$

2°.

$$L_1 = 4\left\{\begin{array}{l} (my'^2 - 2k'y' + l') \\ \times(kz' + k''x' + n' - mz'x')^2 \\ + 2(ky' + k'x' + n'' - mx'y') \\ \times(k'z' + k''y' + n - my'z') \\ \times(kz' + k''x' + n' - mz'x') \\ + (mx'^2 - 2kx' + l) \\ \times(k'z' + k''y' + n - my'z')^2 \\ + \left[\begin{array}{l} y'^2(k^2 - ml) \\ - 2x'y'(kk' + mn'') \\ + x'^2(k'^2 - ml') + 2y'(kn'' + k'l) \\ + 2x'(k'n'' + kl') + n''^2 - ll' \end{array}\right] \\ \times(mz'^2 - 2k'z' + l'') \end{array}\right\} = 4L^2F' \text{ (*)}.$$

(*) Lorsque m_1 et F' sont négatifs, le point x', y', z' est intérieur. Lorsque m_1 et F' sont de signes différents ou tous deux positifs, le point est extérieur. TM.

Pour $L = 0$, cas du cône, l'équation entre $\frac{d}{f}$ et $\frac{e}{f}$ se décompose en deux facteurs du premier degré, ce qui doit être.

3. *Équation du cône circonscrit.* Il faut chercher la surface enveloppe du plan

$$d(y - y') + e(x - x') + f(z - z') = 0,$$

$\frac{d}{f}$, $\frac{e}{f}$ satisfaisant à l'équation du second degré trouvée ci-dessus (p. 223). Voici le résultat, en appelant m_1, l_1, $k_1, \ldots, n_1$ les fonctions d'identité relatives à cette équation

$$m_1(z - z')^2 + 2(y - y')(z - z')k'_1$$
$$+ 2(z - z')(x - x')k_1 + l'_1(y - y')^2$$
$$+ l_1(x - x')^2 - 2n_1(y - y')(x - x') = 0$$

ou

$$l_1 x^2 + l'_1 y^2 + m_1 z^2 + 2k'_1 yz + 2k_1 zx - 2n_1 yx$$
$$- 2x(k_1 z' + l_1 x' - n_1 y') - 2y(k'_1 z' + l_1 y' - n_1 x')$$
$$- 2z(m_1 z' + k'_1 y' + k_1 x') + m_1 z'^2 + 2k'_1 y' z'$$
$$+ 2k_1 z' x' \mp l'_1 y'^2 + l_1 x'^2 - 2n_1 x' y' = 0.$$

Cône asymptotique. Ici

$$x' = \frac{k}{m}, \quad y' = \frac{k'}{m}, \quad z' = \frac{k''}{m}.$$

L'équation du cône asymptote, par des réductions faciles au moyen des relations d'identité, est finalement

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = \frac{L}{m}.$$

4. Problème. *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une surface du second degré.*

Soient

$$dy + ex + fz + g = 0,$$
$$d'y + e'x + f'z + g' = 0,$$
$$d''y + e''x + f''z + g'' = 0,$$

les équations de trois plans tangents à une surface du second degré et se coupant à angle droit. Les axes étant rectangulaires, on a

$$dd' + ee' + ff' = 0,$$
$$dd'' + ee'' + ff'' = 0,$$
$$d'd'' + e'e'' + f'f'' = 0,$$

et de plus (p. 223)

$$\begin{aligned} & d^2(my'^2 - 2k'y' + l') \\ & - 2de(ky' + k'x' + n'' - mx'y') \\ & + e^2(mx'^2 - 2k'x' + l) \\ & - 2df(k'z' + k''y' + n - my'z') \\ & - 2ef(kz' + k''x' + n' - mz'x') \\ & + (mz'^2 - k''z' + l'')fz = 0, \end{aligned}$$

ainsi que deux autres équations analogues en d', e', f', d'', etc., où x', y', z' sont les coordonnées du point de concours des trois plans. Donc, d'après une identité précédemment démontrée (p. 213),

$$\begin{aligned} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2k'y' - 2kx' - 2k''z' \\ + l + l' + l'' = 0. \end{aligned}$$

C'est l'équation d'une sphère ayant même centre que la surface et pour carré de son rayon la somme algébrique des carrés des demi-axes.

Poisson, qui a résolu ce problème dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (*), a laissé de côté le

(*) *Voir* t. V, page 670.

cas des deux paraboloïdes pour lesquels le lieu est

$$2kx' + 2k'y' + 2k''z'' = l + l' + l'',$$

c'est-à-dire un plan perpendiculaire à l'axe.

Plus bas, j'aurai besoin de l'équation du lieu actuel en coordonnées obliques. Il m'a paru difficile de l'obtenir directement. En effet, la condition de perpendicularité devenant alors

$$\begin{aligned}&ee'\sin^2 yz + dd'\sin^2 xz + ff'\sin^2 xy\\&-(\cos xy - \cos zy\cos zx)(d'e + de')\\&-(\cos yz - \cos zx\cos xy)(d'f + df')\\&-(\cos zx - \cos xy\cos yz)(ef' + e'f) = 0,\end{aligned}$$

l'identité analogue à celle qui vient de nous servir serait bien plus compliquée. J'ai donc préféré déduire cette équation générale de l'hypothèse où les axes étaient rectangulaires ; on obtient ainsi immédiatement

$$\begin{aligned}&mx'^2 + my'^2 + mz'^2 + 2mx'y'\cos xy + 2my'z'\cos yz\\&+ 2mx'z'\cos xz - 2x'(k + k'\cos xy + k''\cos zx)\\&-2y'(k' + k\cos xy + k''\cos yz)\\&-2z'(k'' + k'\cos yz + k\cos xz) + l + l' + l''\\&-2n\cos yz - 2n'\cos xz - 2n''\cos xy = 0,\end{aligned}$$

et pour $m = 0$,

$$\begin{aligned}&y'(k' + k\cos xy + k''\cos yz)\\&+ x'(k + k'\cos xy + k''\cos zx)\\&+ z'(k'' + k'\cos yz + k\cos zx)\\&+ n\cos yz + n'\cos xz + n''\cos xy - \frac{l + l' + l''}{2} = 0.\end{aligned}$$

IV.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

1. Trouver le lieu des centres des surfaces du second

ordre assujetties à toucher sept plans donnés de position.

Prenons trois des plans pour plans coordonnés : alors

$$l=l'=l''=0.$$

Soient

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1,$$

$$\frac{x}{a''}+\frac{y}{b''}+\frac{z}{c''}=1,$$

$$\frac{x}{a'''}+\frac{y}{b'''}=\frac{z}{c'''}=1,$$

les équations des quatre autres plans.

Nous aurons successivement, par la condition de tangence (p. 217),

$$\frac{an}{m}+\frac{bn'}{m}+\frac{cn''}{m}=bcx+acy+abz-\frac{abc}{2},$$

$$\frac{a'n}{m}+\frac{b'n'}{m}+\frac{c'n''}{m}=b'c'x+a'c'y+a'b'z-\frac{a'b'c'}{2},$$

$$\frac{a''n}{m}+\frac{b''n'}{m}+\frac{c''n''}{m}=b''c''x+a''c''y+a''b''z-\frac{a''b''c''}{2},$$

$$\frac{a'''n}{m}+\frac{b'''n'}{m}+\frac{c'''n''}{m}=b'''c'''x+a'''c'''y+a'''b'''z-\frac{a'''b'''c'''}{2},$$

où x, y, z désignent les coordonnées du centre de la surface variable. Il y a donc entre les quantités $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}, \frac{n''}{m}$ quatre équations du premier degré; par conséquent, les seconds membres de ces équations seront liés entre eux

par une relation linéaire, c'est-à-dire que le lieu géométrique cherché est un plan.

Corollaire I. Les centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à huit plans appartiendront à une droite, intersection des huit plans qu'on obtiendrait en combinant les proposés sept à sept.

Corollaire II. Le centre de la surface tangente à neuf plans sera donc sur neuf droites.

2. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont la somme algébrique des carrés des axes soient donnée.

Prenons encore trois des plans pour plans des coordonnées. Nous aurons d'abord, comme ci-dessus,

$$\frac{an}{m}+\frac{bn'}{m}+\frac{cn''}{m}=bcx+acy+abz-\frac{abc}{2},$$

$$\frac{a'n}{m}+\frac{b'n'}{m}+\frac{c'n''}{m}=b'c'x+a'c'y+a'b'z-\frac{a'b'c'}{2},$$

$$\frac{a''n}{m}+\frac{b''n'}{m}+\frac{c''n''}{m}=b''c''x+a''c''y+a''b''z-\frac{a''b''c''}{2}.$$

Puis, appelant ψ^2 la somme des carrés des demi-axes qui est donnée, on obtient (p. 209)

$$-\frac{L}{m^2}\left[\begin{array}{l} \mathrm{B}^2-\mathrm{A}'\mathrm{A}''+\mathrm{B}'^2-\mathrm{A}\mathrm{A}''+\mathrm{B}''^2-\mathrm{A}\mathrm{A}' \\ +2\cos xy(\mathrm{A}''\mathrm{B}''-\mathrm{B}\mathrm{B}') \\ +2\cos zy\,(\mathrm{A}\mathrm{B}-\mathrm{B}'\mathrm{B}'') \\ +2\cos xz(\mathrm{A}'\mathrm{B}'-\mathrm{B}\mathrm{B}'') \end{array}\right]=\psi^2,$$

équation qui se transforme par les *identités* (p. 209) en

$$\frac{k^2}{m^2}+\frac{k'^2}{m^2}+\frac{k''^2}{m^2}+2\cos xy\left(\frac{kk'}{m^2}+\frac{n''}{m}\right)$$
$$+2\cos zy\left(\frac{k'k''}{m^2}+\frac{n}{m}\right)+2\cos xz\left(\frac{k'k''}{m^2}+\frac{n'}{m}\right)=\psi^2$$

ou

$$x^2+y^2+z^2+2\cos xy\left(xy+\frac{n''}{m}\right)$$
$$+2\cos zy\left(zy+\frac{n}{m}\right)+2\cos zx\left(xz+\frac{n'}{m}\right)=\psi^2.$$

Or $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m}$, $\frac{n''}{m}$ s'expriment au moyen des trois équations précédentes linéairement en x, y, z. Donc le lieu géométrique est une sphère.

La position de son centre est indépendante du carré donné. En effet, soient

$$\frac{n}{m}=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta,$$
$$\frac{n'}{m}=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta',$$
$$\frac{n''}{m}=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z+\delta'',$$

α, β, γ,..., γ'' étant des fonctions de a, b, c, etc.

Le centre de la sphère sera au point de rencontre des plans

$$x+y\cos xy+z\cos xz+\alpha\cos zy+\alpha'\cos xz+\alpha''\cos xy=0,$$
$$y+x\cos xy+z\cos yz+\beta\cos zy+\beta'\cos xz+\beta''\cos xy=0,$$
$$z+y\cos yz+x\cos xz+\gamma\cos zy+\gamma'\cos xz+\gamma''\cos xy=0.$$

Remarque. Si l'on se proposait de construire des surfaces du second ordre tangentes à sept plans et dont la somme algébrique des carrés des axes fût donnée, il y aurait sept sphères devant renfermer leurs centres. Mais, d'autre part, ces centres appartiennent à un plan; ainsi généralement tous les groupes de sept sphères qui découleront des différentes valeurs du carré ψ^2 auront un même *plan radical.* Pour une surface tangente à huit plans et dont la somme des carrés des axes serait connue, le centre serait à l'intersection d'une droite et des huit petits

cercles correspondants aux groupes de sept sphères qu'on obtiendrait en combinant les huit plans proposés sept à sept.

Du reste, abstraction faite de toute surface auxiliaire, on aperçoit sans peine la belle et difficile étude géométrique qui résulterait de la combinaison du système de six, sept ou huit plans avec le système de sphères provenant du second lieu ci-dessus traité et qu'on ne connaissait pas encore, que je sache. Il faudrait, pour se livrer à cette étude, fixer nettement la position du centre de la sphère par rapport aux six plans : problème plus ardu que son analogue en géométrie plane. Car dans celui-ci, où l'on détermine le lieu des centres des coniques tangentes à trois droites et dont la somme algébrique des carrés des axes est connue, le centre du lieu (qui est un cercle) coïncide précisément avec le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois droites (*). Au contraire, rien n'est trouvé sur la figure formée par six plans quelconques.

3. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont les produits deux à deux des carrés des axes ont une somme donnée.

Ici la quatrième relation entre $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}, \frac{n''}{m}$ se conclura de l'équation (p. 220)

$$-\frac{L_1}{m^3}\left[\begin{array}{l} A \sin^2 yz + A' \sin^2 xz + A'' \sin^2 xy \\ - 2B' (\cos xz - \cos xy \cos zy) \\ - 2B'' (\cos xy - \cos zy \cos zx) \\ - 2B (\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{array}\right] = \psi^4,$$

ψ étant une ligne connue.

(*) Je possède depuis longtemps un moyen géométrique d'obtenir ce lieu.

Les identités fournissent

$$\frac{\mathrm{AL}^2}{m^3} = \frac{2n}{m}\frac{k'}{m}\frac{k''}{m} + \frac{n^2}{m^2},$$

$$\frac{\mathrm{A'L}^2}{m^3} = \frac{2n'}{m}\frac{k}{m}\frac{k''}{m} + \frac{n'^2}{m^2},$$

$$\frac{\mathrm{A''L}^2}{m^3} = \frac{2n''}{m}\frac{k}{m}\frac{k'}{m} + \frac{n''^2}{m^2},$$

$$\frac{\mathrm{BL}^2}{m^3} = \frac{n}{m}\frac{k^2}{m^2} - \frac{k'}{m}\frac{k}{m}\frac{n'}{m} - \frac{n''}{m}\frac{k}{m}\frac{k''}{m} - \frac{n'}{m}\frac{n''}{m}\cdots$$

....

Tous ces coefficients contiendront donc x, y z au troisième degré, et ce sera le degré de la surface, lieu des centres.

4. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont le produit des axes est donné.

Nous avons, dans ce cas, pour quatrième relation entre $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m}$, $\frac{n''}{m}$ et x, y, z (p. 220) :

$$\frac{\mathrm{L}^3}{m^4}\left(\begin{array}{l}1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz \\ + 2\cos xy \cos xz \cos yz\end{array}\right) = \psi^4.$$

On a (*voir* les *identités*)

$$\frac{\mathrm{L}^3}{m^4} = \frac{2n}{m}\frac{n'}{m}\frac{n''}{m} + \frac{2k}{m}\frac{k'}{m}\frac{n}{m}\frac{n'}{m} + \frac{2k}{m}\frac{k''}{m}\frac{n}{m}\frac{n''}{m} + \frac{2k'}{m}\frac{k''}{m}\frac{n'}{m}\frac{n''}{m}$$
$$- \frac{k^2}{m^2}\frac{n^2}{m^2} - \frac{k'^2}{m^2}\frac{n'^2}{m^2} - \frac{k''^2}{m^2}\frac{n''^2}{m^2}.$$

On voit clairement que le lieu est une surface du quatrième degré.

Observation. Il résulte des trois lieux précédents qu'on

peut construire au plus vingt-quatre surfaces du second ordre tangentes à six plans et égales à une surface donnée. Et le théorème analogue à celui de M. Steiner en géométrie plane s'énoncera ainsi :

Théorème. *Les vingt-quatre surfaces du second ordre tangentes à six plans et égales en volume ont leurs centres sur une même sphère.*

5. Tous les pôles d'un plan fixe par rapport aux surfaces du second ordre tangentes à sept plans appartiennent à un plan. C'est une conséquence des formules trouvées § II, n° 4. Et les pôles d'un même plan par rapport aux surfaces tangentes à huit plans seront sur une droite.

En particulier, le point de contact de la surface variable avec chaque plan décrira une droite. De sorte que les points de contact respectifs de la surface assujettie à toucher neuf plans donnés seront situés chacun sur huit droites.

6. Théorème. *Tous les plans d'où l'on voit sous un trièdre trirectangle les paraboloïdes tangents à six plans donnés concourent en un même point.*

Un quelconque de ces plans a pour équation (p. 226)

$$\begin{aligned} &y(k' + k\cos xy + k''\cos zy)\\ &+ x(k + k'\cos xy + k''\cos zx)\\ &+ z(k'' + k'\cos zy + k\cos zx)\\ &+ n\cos yz + n'\cos xz + n''\cos xy = 0. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} n &= \alpha k + \beta k' + \gamma k'',\\ n' &= \alpha' k + \beta' k' + \gamma' k'',\\ n'' &= \alpha'' k + \beta'' k' + \gamma'' k'', \end{aligned}$$

α, β, γ,..., γ'' étant des nombres donnés. Dès lors l'é-

quation précédente pourra s'écrire

$$k\left(\begin{array}{c} y\cos xy + x + z\cos zx \\ +\alpha\cos zy + \alpha'\cos zx + \alpha''\cos xy \end{array}\right)$$
$$+k'\left(\begin{array}{c} y + x\cos xy + z\cos yz \\ +\beta\cos zy + \beta'\cos zx + \beta''\cos xy \end{array}\right)$$
$$+k''\left(\begin{array}{c} z + y\cos yz + x\cos xz \\ +\gamma\cos zy + \gamma'\cos xz + \gamma''\cos xy \end{array}\right) = 0;$$

et il est évident que le plan variable passera constamment par le point dont les coordonnées résultent des trois équations

$$y\cos xy + x + z\cos zx + \alpha\cos zy + \alpha'\cos zx + \alpha''\cos xy = 0,$$
$$y + x\cos xy + z\cos yz + \beta\cos zy + \beta'\cos zx + \beta''\cos xy = 0,$$
$$z + y\cos yz + x\cos zx + \gamma\cos zy + \gamma'\cos zx + \gamma''\cos xy = 0.$$

Or le centre de la sphère traitée n° 2 devait aussi y satisfaire. Donc le point de concours n'est autre que le centre de cette sphère.

Corollaires. Les plans d'où l'on verrait sous un trièdre trirectangle les paraboloïdes tangents à sept plans renfermeront les points de concours qu'on aurait en combinant les plans proposés six à six. Cela ne se pourra que si tous ces points sont situés sur une même droite qui sera perpendiculaire au plan, lieu des centres.

Ainsi nous retombons sur le théorème relatif au plan radical commun des sphères qui ont été définies plus haut (p. 229).

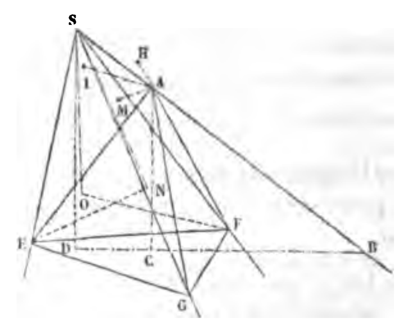
Enfin le plan d'où l'on verrait sous un trièdre trirectangle le paraboloïde tangent à huit plans est perpendiculaire à la droite, lieu des centres, qui est un diamètre de ce paraboloïde.

SOLUTION DE LA QUESTION 361

(voir t. XVI, p. 58);

PAR M. MARECHAL,
Élève de l'institution Loriol.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B on mène un plan quelconque détermi-



nant un tétraèdre T, de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T.

On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

Il faut prouver que la valeur de

$$\frac{\frac{1}{3}\text{EGF}\times\text{AC}\times\frac{1}{3}\text{SGF}\times\text{AM}\times\frac{1}{3}\text{SEG}\times\text{AI}\times\frac{1}{3}\text{SEF}\times\text{AH}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3\overline{\text{EGF}}^3\times\overline{\text{SD}}^3}$$

est une quantité constante.

Supprimant les facteurs communs constants, il reste à prouver que le rapport

$$\frac{AC \times SGF \times SEG \times SEF}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^3}$$

est constant.

Les deux droites SD et AC étant parallèles, le point C se trouvera sur BD. Les deux triangles semblables SDB, ACB donnent

$$\frac{AC}{SD} = \frac{AB}{SB},$$

d'où

$$AC = SD \times \frac{AB}{SB}.$$

Remplaçant dans le rapport précédent AC par sa valeur, ce rapport devient

$$\frac{SD \times \frac{AB}{SB} \times SGF \times SEF \times SEG}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^3}.$$

Supprimant le facteur commun et laissant de côté le facteur constant $\frac{AB}{SB}$, il reste à prouver que le rapport

$$\frac{SGF \times SEG \times SEF}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2}$$

est constant.

Or,

$$EGF \times SD = SGF \times EN,$$
$$EGF \times SD = SEG \times OF.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2 = SGF \times EN \times SEG \times OF.$$

Remplaçant dans le rapport précédent $\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2$ par sa

valeur, il devient

$$\frac{SGF \times SEG \times SEF}{SGF \times SEG \times EN \times OF},$$

et il reste à prouver que le rapport $\frac{SEF}{EN \times OF}$ est constant.

Or,

$$SEF = \frac{1}{2} SE \times SF \times \sin ESF;$$

$$EN = ES \times \cos SEN,$$

$$OF = FS \times \cos SFO.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membr., on trouve

$$EN \times OF = ES \times \cos SEN \times FS \times \cos SFO;$$

donc le rapport précédent devient

$$\frac{\frac{1}{2} SE \times SF \times \sin ESF}{ES \times SF \times \cos SEN \times \cos SFO}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2} \sin ESF}{\cos SEN \times \cos SFO}.$$

Il suffit de prouver que ce rapport est constant, ce qui est évident, car les angles ESF, SEN, SFO sont constants.

Note. MM. Clery, Saintard, de Courcel, Dorlodot, Renaud, élèves du lycée Saint-Louis, Poupelet, institution Reuss, ont donné la même démonstration.

DÉMONSTRATION

D'une formule dont on peut déduire, comme cas particulier, le binôme de Newton.

Soient x, a, b *des quantités quelconques, et* m *un nombre* entier *et positif, on aura*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} (x+a)^m &= x^m + m.a(x+b)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}.a(a-2b)(x+2b)^{m-2}+\ldots \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a(a-nb)^{n-1}(x+nb)^{m-n}+\ldots \\ &+ ma[a-(m-1)b]^{m-2}[x+(m-1)b]+a(a-mb)^{m-1}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule, que l'on doit à Abel (*), a été démontrée dans l'un des Traités d'Algèbre *conformes au programme officiel;* nous allons faire connaître une autre démonstration qui est, sauf quelques modifications de peu d'importance, celle qu'Abel a donnée.

Remarquons d'abord que l'égalité (1) est évidente quand $m=1$, puisqu'elle se réduit alors à

$$x+a=x+a.$$

Elle est encore immédiatement vérifiée lorsque $m=2$, car, dans ce cas, elle devient

$$(x+a)^2 = x^2+2a(x+b)+a(a-2b)=x^2+2ax+a^2.$$

Il ne reste donc plus qu'à faire voir que si l'égalité (1) est vraie pour une certaine valeur particulière de m, elle existe encore lorsqu'on augmente cette valeur d'une unité. Ainsi, en supposant que m représente un nombre entier positif, pour lequel l'exactitude de l'égalité (1) ait été

(*) *Œuvres complètes*, t. I, p. 31.

constatée, il s'agit de prouver qu'on a

$$(2)\left\{\begin{aligned}(x+a)^{m+1} &= x^{m+1} + (m+1)a(x+6)^m + \frac{(m+1)m}{1.2}a(a-26)(x+26)^{m-1}+\ldots\\ &+ \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}a(a-n6)^{n-1}(x+n6)^{m-n+1}+\ldots\\ &+ (m+1)a(a-m6)^{m-1}(x+m6) + a[a-(m+1)6]^m.\end{aligned}\right.$$

Pour abréger l'écriture, nous désignerons par $f(x)$ le second membre de l'égalité (1) qui existe par hypothèse, et nous nommerons $\varphi(x)$ le second membre de l'égalité (2) qu'il s'agit d'établir.

En prenant les dérivées par rapport à x des deux fonctions $(x+a)^{m+1}$ et $\varphi(x)$, on trouve

$$(m+1)(x+a)^m \quad \text{et} \quad (m+1)f(x).$$

Mais

$$(x+a)^m = f(x),$$

par hypothèse : donc, les deux dérivées obtenues sont égales entre elles, et, par conséquent, les deux fonctions primitives $(x+a)^{m+1}$, $\varphi(x)$ ne peuvent différer que par une constante, c'est-à-dire qu'on a nécessairement l'égalité

$$(3) \qquad (x+a)^{m+1} = \varphi(x) + C,$$

en désignant par C une quantité indépendante de x.

Pour déterminer la valeur de la constante C, nous remarquerons que si l'on multiplie par $(m+1)6$, les termes x^m, $ma(x+6)^{m-1}$, etc., de $f(x)$, et qu'on ajoute respectivement aux produits résultant de ces multiplications les termes x^{m+1}, $(m+1)a(x+6)^m$, etc., de $\varphi(x)$, on obtiendra des sommes qui admettront chacune comme facteur le binôme $x+(m+1)6$. En effet on a

$$(m+1)6.x^m + x^{m+1} = x^m[x+(m+1)6];$$

et

$$m(m+1)\beta . a(x+\beta)^{m-1} + (m+1)a.(x+\beta)^{m}$$
$$= (m+1)a(x+\beta)^{m-1}[x+(m+1)\beta];$$

et, en général, la somme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n} \times (m+1)\beta$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1).(m-n+2)}{1.2.3\ldots n} a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1}$$

est égale à

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n} a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}[x+(m+1)\beta].$$

De cette remarque, nous concluons que si l'on multiplie par $(m+1)\beta$ les deux membres de l'égalité (1)

$$(x+a)^m = f(x)$$

et qu'on ajoute l'égalité qui en résulte

$$(m+1)\beta(x+a)^m = (m+1)\beta f(x),$$

membre à membre avec (3)

$$(x+a)^{m+1} = \varphi(x) + C,$$

on aura, en désignant par $\psi(x)$ un polynôme entier par rapport à x,

$$(m+1)\beta(x+a)^m + (x+a)^{m+1}$$
$$= \psi(x) \times [x+(m+1)\beta] + a[a-(m+1)\beta]^m + C;$$

ou, parce que

$$(m+1)\beta(x+a)^m + (x+a)^{m+1}$$
$$= [x+a+(m+1)\beta](x+a)^m,$$

on aura

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} [x+a+(m+1)\beta](x+a)^m \\ = \psi(x) \times [x+(m+1)\beta] + a[a-(m+1)\beta]^m + C. \end{array} \right.$$

Cela posé, si dans cette dernière égalité on remplace

x par $-(m+1)\beta$, il vient

$$a[a-(m+1)\beta]^m = a[a-(m+1)\beta]^m + C,$$

d'où

$$C = 0.$$

Par conséquent, on a

$$(x+a)^{m+1} = \varphi(x).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

En posant $\beta = 0$, la formule (1) donne le développement de la puissance m d'un binôme $(x+a)$.

Nous examinerons prochainement d'autres applications de cette formule. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 279

(voir t. XII, p. 327);

PAR M. CHARLES MERAY (*).

Soient un triangle ABC, deux droites P, Q se coupant en F et rencontrant les droites AB, A'C respectivement en G et en K; menons par le point A une droite mobile Λ rencontrant les droites BC, P, Q respectivement en D, I, L. Inscrivons deux coniques, l'une dans le pentagone BDLFG et l'autre dans le pentagone CDIFK. En vertu du théorème de Brianchon, le point de contact de la première conique sur BC se trouve sur la droite qui joint le point F avec le point d'intersection m des deux droites GD, BL; de même le point de contact de la deuxième conique sur CD se trouve sur la droite Fm'. m' étant le point d'intersection des droites KD, CL, si l'on fait mouvoir Λ, les points D, L forment sur les droites BC et Q

(*) Aujourd'hui élève à l École Normale.

deux divisions homographiques dont deux points homologues sont C, K : donc M′ décrit une droite M, de même m en décrit une autre N; donc les faisceaux ayant pour centres F, K et formés par les droites telles que km' sont homographiques, ainsi que ceux ayant pour centres P et G et pour rayons les droites Gm, Fm. Mais les rayons GD, KD forment évidemment deux faisceaux homographiques; donc les rayons Fm, Fm' forment aussi deux faisceaux homographiques ayant même centre, les rayons doubles sont évidemment P, Q; donc le rapport anharmonique de P, Q, Fm, Fm' est constant : si le point F est le foyer des coniques et les droites P, Q les tangentes issues du foyer, on retombe sur le théorème de M. Stubbs.

Paris, 1854.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 332

(voir t. XV, p. 248, et t. XVI, p. 26);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

La démonstration du théorème énoncé est excessivement simple si l'on prend la fonction O sous la forme

$$X = X_1 X_2^2 \ldots X_k^k \ldots X_n^n,$$

X_k étant le produit des facteurs simples correspondants aux racines de degré de multiplicité k.

En effet,

$$\frac{dX}{dx} = X'_1 X_2^2 \ldots X_k^k \ldots X_n^n + 2X'_2 X_1 X_2 \ldots X_k^k \ldots X_n^n + \ldots$$

$$+ kX'_k X_1 X_2^2 \ldots X_k^{k-1} \ldots X_k^k$$

$$+ \ldots + nX'_n X_1 X_2^2 \ldots X_k^k \ldots X_n^{n-1}.$$

Par conséquent

$$P = X_2 X_3^2 \ldots X_k^{k-1} \ldots X_n^{n-1},$$

$$Q = \frac{X}{P} = X_1 X_2 \ldots X_k \ldots X_n,$$

$$R = \frac{\frac{dX}{dx}}{P} = p_1 X'_1 + 2p_2 X'_2 + \ldots$$

$$+ kp_k X'_k + \ldots + np_n X'_n;$$

où l'on a posé

$$p_k = \frac{Q}{X_k};$$

c'est-à-dire que p_k renferme tous les facteurs X_1, X_2,..., X_n sauf le facteur X_k.

$$\frac{dQ}{dx} = p_1 X'_1 + p_2 X'_2 + \ldots + p_k X'_k + \ldots + p_n X'_n.$$

Donc

$$R - k\frac{dQ}{dx} = (1-k)p_1 X'_1 + (2-k)p_2 X'_2 + \ldots + (n-p_n)p_n X'_n;$$

le terme $p_k X_k'$ a disparu.

$\left(R - k\frac{dQ}{dx}\right)$ est donc divisible par X_k et ne l'est par aucune des fonctions X_1, X_2,..., X_n qui sont premières entre elles. Donc X_k est le plus grand commun diviseur des polynômes Q et $R - k\frac{dQ}{dx}$.

C'est la proposition énoncée.

SOLUTION DE LA QUESTION 334

(voir t. XV, p. 248, et t. XVI, p. 82);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

La construction indiquée dans cette question donne lieu à plusieurs identités analogues à celle qui est énoncée; ces identités sont toutes évidentes, si l'on remarque que

$$\begin{aligned} AOb &= aOB, \\ BOc &= bOC, \\ COa &= cOA; \end{aligned}$$

ce sont des angles opposés par le sommet.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 357 (MICHAEL ROBERTS)

(voir t. XVI, p. 57);

PAR M. L'ABBÉ P. SAUZE,
Professeur au collége libre de Mende (Lozère).

D'un point quelconque M, on mène à une conique E deux sécantes qui la coupent en A et B, en C et D.

Si l'on a

$$\frac{AB}{MA.MB} = \frac{CD}{MC.MD}, \tag{1}$$

toute conique E′ ayant les mêmes foyers FF′ que la première, sera coupée par les sécantes en des points A′ et B′, C′ et D′ tels, que l'on aura ainsi

$$\frac{A'B'}{MA'.MB'} = \frac{C'D'}{MC'.MD'}. \tag{2}$$

Prenons pour axes coordonnés les sécantes MB, MD. L'équation de la conique E, rapportée à ces axes, sera de la forme

(3) $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Dans cette équation, si l'on désigne par x', x'' les valeurs de x pour $y = 0$ et par y', y'' les valeurs de y quand $x = 0$, la relation (1) nous conduit à

$$\frac{x' - x''}{x'x''} = \frac{y' - y''}{y'y''}$$

qui entraîne la suivante entre les coefficients

(4) $$d^2 - 4af = e^2 - 4cf \text{ (*)}.$$

Soit maintenant

$$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 = 0$$

l'équation de notre conique E rapportée à son centre et à ses axes; en appelant α, β les angles de MB, MD avec le grand axe, et P, Q les coordonnées de M relatives à ces axes, le retour aux axes obliques transformera cette équation en celle-ci :

(5) $$\left\{\begin{array}{l} B^2(p + x\cos\alpha + y\cos\beta) \\ + A^2(q + x\sin\alpha + p\sin\beta)^2 - A^2B^2 = 0. \end{array}\right.$$

En identifiant cette équation avec l'équation (3), on aura

$$\begin{aligned} a &= A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha, \\ c &= A^2\sin^2\beta + B^2\cos^2\beta, \\ d &= 2A^2q\sin\alpha + 2B^2p\cos\alpha, \\ e &= 2A^2q\sin\beta + 2B^2p\cos\beta, \\ f &= p^2B^2 + q^2A^2 - A^2B^2. \end{aligned}$$

(*) Soit $cy^2 + ey + f = 0$, l'équation inverse est $fz^2 + ez + c = 0$; le carré de la différence des racines est $\frac{e^2 - 4cf}{4f^2}$; donc, etc. TM.

Dès lors la relation (4) deviendra

$$\begin{aligned} 8pq\,A^2B^2 \sin\alpha\cos\alpha &+ A^2B^2(A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha) \\ &- A^2B^2(p^2\sin^2\alpha + q^2\cos^2\alpha) \\ = 8pq\,A^2B^2\sin\beta\cos\beta &+ A^2B^2(A^2\sin^2\beta + B^2\cos^2\beta) \\ &- A^2B^2(p^2\sin^4\beta + q^2\cos^2\beta) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &4pq(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \\ &+ (\sin^2\alpha - \sin^2\beta)(A^2 - B^2 + q^2 - p^2) = 0. \end{aligned}$$

Si la quantité $A^2 - B^2$ reste constante, cette équation ne cessera pas d'avoir lieu quelles que soient les valeurs particulières de A et de B.

On voit donc que la conique E′, homofocale à la conique E, sera coupée par les sécantes en des points A′ et B′, C′ et D′ tels, que

$$\frac{A'B'}{MA'.MB'} = \frac{C'D'}{MC'.MD'}.$$

C. Q. F. D.

Si du point M on menait des tangentes à la conique E, ces tangentes seraient évidemment dans le cas des sécantes MB, MD; dès lors, en appelant $(A_1 B_1)$ $(C_1 D_1)$ leurs points d'intersection avec une conique E_1, homofocale à E, on aurait

$$\frac{A_1B_1}{MA_1.MB_1} = \frac{C_1D_1}{MC_1.MD_1},$$

c'est-à-dire, conformément à l'énoncé de la question 357,

$$\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} = \frac{1}{MC_1} + \frac{1}{MD_1}$$

ou

$$\frac{1}{MA_1} - \frac{1}{MB_1} = \frac{1}{MC_1} - \frac{1}{MD_1},$$

selon la position de M.

La méthode analytique que nous avons suivie nous

permettrait de démontrer très-simplement que si deux sécantes issues d'un point M coupent une conique en des points A et B, C et D satisfaisant aux relations ci-dessus, un système de deux autres sécantes ayant même point de concours et mêmes bissectrices que les premières déterminera sur la conique des points A′ et B′, C′ et D′ pour lesquels auront lieu les mêmes relations.

Le théorème contenu dans la question 357 nous permet d'établir la proposition suivante :

Deux coniques étant homofocales, les surfaces engendrées par leur révolution autour de leur axe principal seront telles, que tous les plans tangents à l'une couperont l'autre suivant des coniques ayant même paramètre.

Soient les deux ellipses homofocales E, E′. Imaginons qu'elles résultent de la section de deux ellipsoïdes homofocaux de révolution par un plan mené suivant le grand axe.

Les tangentes MT, MT′ (qui se coupent en M dans l'intérieur de E′) nous représenteront les traces sur le plan de la figure, de deux plans ayant avec l'ellipsoïde inférieur un point de contact sur le méridien d'intersection.

Ces deux plans couperaient la surface E′ suivant deux ellipses dont AB, CD (segments compris dans l'intérieur de E′) seraient les grands axes. Représentons par a, a' les demi-longueurs de ces axes, par b, b' celles des petits axes, et appelons MN la perpendiculaire élevée en M au plan de la figure dans l'ellipsoïde E′.

Cette perpendiculaire, qui, pour chaque ellipse, serait une ordonnée perpendiculaire au grand axe, nous donnerait

$$\overline{MN}^2 = \frac{b^2}{a^2}(MA.MB) = \frac{b'^2}{a'^2}(MC.MD),$$

d'où

$$\frac{b^2}{a}\left(\frac{\text{MA.MB}}{a}\right)=\frac{b'^2}{a'}\left(\frac{\text{MC.MD}}{a'}\right);$$

or

$$\frac{\text{MA.MB}}{a}=\frac{\text{MC.MD}}{a'},$$

donc

$$\frac{b^2}{a}=\frac{b'^2}{a'}.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration faite avec mes deux ellipsoïdes se ferait évidemment avec toutes les surfaces du second ordre.

Nous avons supposé les tangentes T et T′ se coupant dans l'intérieur de l'ellipse E′. Si cela n'avait pas lieu, on pourrait mener une série de plusieurs tangentes dont les premières feraient partie, et qui seraient telles, que leurs points consécutifs d'intersection seraient dans l'intérieur de E′, ce qui permettrait de compléter la démonstration.

Note. On déduit de cette question le théorème suivant :

Étant données deux coniques homofocales, l'une fixe C, *l'autre variable* C′, *on mène à* C′ *deux tangentes* T, T′, *parallèlement à deux directions données, ces tangentes coupent* C *aux points* A, B, A′, B′; *on a, quelle que soit* C′,

$$\frac{\text{AB}}{\text{A}'\text{B}'}=\text{constante}.$$

(MANNHEIM.)

SOLUTION DE LA QUESTION 350 (WRONSKI)

(voir t. XV, p. 407);

PAR M. BRIOSCHI (*),
Professeur à l'université de Pavie.

Étant donnée une fonction homogène complète de degré r entre n variables, racines d'une équation de degré n également donnée, les coefficients numériques de la fonction étant tous égaux à l'unité, trouver la valeur de la fonction exprimée en fonction des coefficients de l'équation.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

La fonction homogène qui a les propriétés énoncées sera évidemment le coefficient de z^r dans le développement suivant les puissances ascendantes de z de l'expression

$$\frac{1}{(1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \ldots (1 - x_n z)} = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Or, en posant

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots,$$

on a

$$-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \ldots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots};$$

mais

$$-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x_1}{1 - x_1 z} + \frac{x_2}{1 - x_2 z} + \ldots + \frac{x_n}{1 - x_n z}$$

(*) L'illustre analyste est disciple et successeur de M. Bordoni, auteur de plusieurs ouvrages très-estimés en Italie et nullement connus au dehors de cette contrée toujours féconde en hommes de talent et digne de meilleures destinées. TM.

et

$$\frac{1}{1 - x_r z} = 1 + x_r z + x_r^2 z + \ldots;$$

en conséquence on aura

$$(1) \qquad s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \ldots = \frac{A_1 + 2A_2 z + \ldots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots},$$

où

$$s_r = x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r.$$

L'équation (1) nous donne les suivantes :

$$A_1 = s_1,$$
$$2A_2 = s_2 + A_1 s_1,$$
$$3A_3 = s_3 + A_1 s_2 + A_2 s_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$rA_r = s_r + A_1 s_{r-1} + A_2 s_{r-2} + \ldots + A_{r-1} s_1,$$

lesquelles multipliées par $a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots, a_0$ donnent, en les sommant,

$$ra_0 A_r + (r-1) a_1 A_{r-1} + \ldots + A_1 a_{r-1}$$
$$= -(a_1 A_{r-1}) + 2a_2 A_{r-2} + \ldots + ra_r)^*,$$

d'où

$$a_0 A_r + a_1 A_{r-1} + \ldots + a_{r-1} A_1 + a_r = 0.$$

On en déduit

$$A_r = \frac{(-1)^r}{a_0^r} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} \ldots & a_1 \end{vmatrix} \quad (*)$$

(*) Nous engageons les éleves à faire $n = 2$; tout devient intuitif, et la belle démonstration du célèbre analyste subsiste pour n quelconque.

TM.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 368 (CAYLEY)

(voir p 192).

PAR M. LOUIS CREMONA.
Professeur au lycée de Cremone.

Toute conique qui touche les côtés du triangle ABC ($p=0$, $q=0$, $r=0$) est représentée par l'équation (Salmon, *Conic sections*, 3e édition, p. 247)

$$l^2p^2+m^2q^2+n^2r^2-2mnqr-2nlrp-2lmpq=0\ (^*),$$

où l, m, n sont des indéterminées. Les points α, β, γ étant déterminés respectivement par les couples d'équations simultanées

$$p=0,\quad q-r=0;$$
$$q=0,\quad r-p=0;$$
$$r=0,\quad p-q=0;$$

la conique passera par les points α, β, γ, si l'on satisfait aux conditions

$$m^2+n^2-2mn=0,$$
$$n^2+l^2-2nl=0,$$
$$l^2+m^2-2lm=0,$$

ou bien

$$l=m=n;$$

donc l'équation cherchée est

$$p^2+q^2+r^2-2qr-2rp-2pq=0.$$

Note. M. Joseph Martelli, de Milan, donne la même démonstration avec plus de développement.

(*) Ou bien $(lp)^{\frac{1}{2}}+(mq)^{\frac{1}{2}}+(nr)^{\frac{1}{2}}=0$.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 369

(voir p. 192);

PAR M. LOUIS CREMONA,
Professeur au lycée de Cremone.

Soient

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC;

$$q - r = 0, \quad r - p = 0, \quad p - q = 0$$

sont donc les équations de trois droites passant respectivement par les sommets A, B, C et se rencontrant au même point D; soient α, β, γ, les points où AD, BD, CD rencontrent BC, CA, AB. Soient

$$lp + mq + nr = 0,$$
$$l_1 p + m_1 q + n_1 r = 0$$

les équations de deux droites R, R_1 qui rencontrent respectivement BC, CA, AB aux points a, a_1; b, b_1; c, c_1; par conséquent, les équations des droites Da, Da_1, sont

$$n(r-p) - m(p-q) = 0,$$
$$n_1(r-p) - m_1(p-q) = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre droites DB, DC, Dα, Da,

$$r - p = 0,$$
$$p - q = 0,$$
$$r - p - (p - q) = 0,$$
$$r - p - \frac{m}{n}(p - q) = 0$$

est $\frac{n}{m}$ (Salmon, *Conic sections*, p. 53) et le rapport an-

harmonique des droites conjuguées DC, DB, Dα, Da_1,

$$p - q = 0,$$
$$r - p = 0,$$
$$p - q - (r - p) = 0,$$
$$(p - q - \frac{n_1}{m_1}(r - p) = 0,$$

est $\frac{m_1}{n_1}$; donc les points B, C, α, a, a_1 seront en involution si l'on a

$$mm_1 = nn_1.$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois systèmes de cinq points

$$\begin{array}{l} B,\ C,\ \alpha,\ a,\ a_1, \\ C,\ A,\ \beta,\ b,\ b_1, \\ A,\ B,\ \gamma,\ c,\ c_1, \end{array}$$

(α, β, γ points doubles) soient en involution, seront

$$ll_1 = mm_1 = nn_1.$$

Il s'ensuit qu'en prenant arbitrairement la droite R,

$$lp + mq + nr = 0,$$

la droite R_1 sera

$$\frac{p}{l} + \frac{q}{m} + \frac{r}{n} = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 323

(voir t. XV, p. 226);

PAR M. MARSANO,
Professeur à Gênes.

Conservons la même figure que sur la page 226.

M. Marsano démontre qu'en général : 1° les quatre

points T, t, C, c sont sur une même circonférence; 2° si l'on porte sur OT une longueur $OL = R$ et sur Ot une longueur $Ol = R$, l'aire du triangle OLl est équivalente à l'aire du quadrilatère $TtMm$, où M, m sont les points de contact respectifs des tangentes intérieures OT, Ot.

Dans le cas particulier où $TOt = \frac{\pi}{2}$, L tombe en M et l en m; l'auteur s'appuie sur cette proposition que dans deux triangles rectangles semblables, le produit des hypoténuses est égal à la somme des produits des côtés homologues de l'angle droit; proposition qu'on trouve aussi dans ces deux Mémoires de l'auteur : *Memoria sui trianguli simili*, Genova, 1846, in-8, et *Memoria sui rapporti delle figure*, par G.-B. Marsano. Genova, 1846.

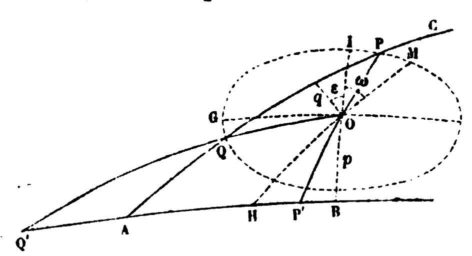
M. Marsano répond aussi aux questions 322 et 323.

SOLUTION DE LA QUESTION 312

(voir tome XIV, page 305);

PAR M. E. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Mener par un point donné dans un angle sphérique un arc de grand cercle tel, que le rapport des sinus des deux segments soit égal à une quantité donnée.



Soient p, q, les perpendiculaires sphériques abaissées

d'un point O pris dans l'intérieur d'un angle sphérique CAB sur les côtés de cet angle. Menons dans une direction quelconque un arc de grand cercle HOM, faisant un angle ω avec le prolongement OI de p, et prenons sur cet arc un point M tel, que

$$\frac{\sin OM}{\sin OH}=\frac{\sin OI}{\sin p},$$

ou, en faisant $OM=\rho$, $OH=\delta$, $OI=\beta$,

$$\frac{\sin \rho}{\sin \delta}=\frac{\sin \beta}{\sin p},$$

β désignant un angle donné que je supposerai plus petit que p.

Le triangle HOB donnant

$$\cot \delta=\cot p \cos \omega,$$

l'élimination de δ entre cette équation et la précédente fournit, en prenant $\sin \alpha=\dfrac{\sin \beta}{\sin p}$,

$$\frac{1}{\sin^2 \rho}=\frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \alpha}+\frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \beta}$$

ou

$$\cot^2 \rho=\cot^2 \alpha \sin^2 \omega+\cot^2 \beta \cos^2 \omega,$$

équation du lieu des points M et qui appartient à une conique sphérique ayant son centre en O et pour demi-axes $OI=\beta$, $OG=\alpha$. Cette courbe coupe le côté AC en deux points P et Q qui, étant joints au point O, donneront

$$\frac{\sin OP}{\sin OP'}=\frac{\sin OQ}{\sin OQ'}=\frac{\sin \beta}{\sin p}=\sin \alpha$$

et résolvent la question.

La détermination analytique des points P et Q n'offre

aucune difficulté. Si l'on désigne, en effet, par ε l'angle de q avec le prolongement de p, le grand cercle AC a pour équation

$$\cot\rho = \cot q \cos(\omega + \varepsilon).$$

L'élimination de ρ entre cette équation et celle de la conique se fait immédiatement et conduit à une équation du second degré par rapport à $\tan g\,\omega$ qui fait connaître les angles polaires POI, QOI, et, par suite, OP, OQ.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 361

(voir page 234);

PAR M. LE D[r] JOSEPH MARTELLI, DE MILAN.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène un plan quelconque déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T. On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

Si nous désignons par $x_s, y_s, z_s, x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b$ les coordonnées du sommet S et des deux points fixes A et B, celles des points B_1, B_2, B_3, où le plan mené par B coupe les arêtes du trièdre seront de la forme

$$x_1 = x_s + \lambda h_1, \qquad y_1 = y_s + \lambda k_1, \qquad z_1 = z_s + \lambda l_1,$$
$$x_2 = x_s + \mu h_2, \qquad y_2 = y_s + \mu k_2, \qquad z_2 = z_s + \mu l_2,$$
$$x_3 = x_s + \nu h_3, \qquad y_3 = y_s + \nu k_3, \qquad z_3 = z_s + \nu l_3,$$

$h_1, k_1, l_1, h_2, k_2, l_2, h_3, k_3, l_3$ étant des quantités données; λ, μ, ν trois indéterminées; donc

$$\text{Tétraèdre ASB}_1\text{B}_2 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\lambda\mu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu\, M_{1,2},$$

$$\text{Tétraèdre ASB}_1\text{B}_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\lambda\nu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = \lambda\nu\, M_{1,3},$$

$$\text{Tétraèdre ASB}_2\text{B}_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\mu\nu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = \mu\nu\, M_{2,3},$$

$$\text{Tétraèdre AB}_1\text{B}_2\text{B}_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix}$$

et

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} = \frac{\lambda\mu\nu}{6}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu\, N_{1,2,3}.$$

Or, puisque les points B, B_1, B_2, B_3 sont dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_b - x_s & y_b - y_s & z_b - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix} = 0;$$

mais les points S, A, B étant en ligne droite, on a aussi

$$\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_s & z_s \\ 1 & x_a & z_a \\ 1 & x_b & z_b \end{vmatrix} = 0,$$

donc la relation précédente devient

$$\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu\dfrac{x_a - x_s}{x_b - x_s} \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on a

$$\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} \begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = 6\lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} N_{1,2,3},$$

et, par suite,

$$\text{Tétraèdre } A\,B_1\,B_2\,B_3 = \lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} N_{1,2,3}.$$

Nous aurons ainsi

$$\frac{P}{V^3} = \frac{(x_b - x_a) M_{1,2} M_{1,3} M_{2,3}}{(x_b - x_s) N^2_{1,2,3}}$$

quantité indépendante de λ, μ, ν. Donc on a en effet

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

Observation. On peut de même très-facilement démontrer pour un angle plan un théorème analogue aux précédents, c'est-à-dire : Dans un angle plan de sommet S, on donne deux points fixes A, B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène une droite quelconque déterminant un triangle T d'aire E. Soit P le produit des aires des trois triangles que l'on obtient en joignant A aux trois sommets du triangle T. On a la relation

$$\frac{P}{E^2} = \text{constante}.$$

Note du Rédacteur. M. Mannheim fait observer que le théorème de M. Faure s'obtient en exprimant par le procédé des polaires réciproques que des tétraèdres de même base et de hauteurs égales sont équivalents, une sphère étant la surface directrice.

SUR LES AIRES DES POLYGONES INSCRITS OU CIRCONSCRITS AU CERCLE ET A L'ELLIPSE;

PAR M. LE DOCTEUR JOSEPH SACCHI.

Soient $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_x, \ldots, h_n)$ l'aire d'un polygone inscrit ou circonscrit à un cercle ayant pour rayon l'unité en fonction des droites h_x qui le déterminent; $l_1, l_2, \ldots, l_x, \ldots, l_n$ les droites analogues aux susdites et appartenant à un polygone analogue inscrit ou circonscrit à une ellipse ayant les demi-axes principaux a, b; λ_x le demi-diamètre parallèle à l_x. L'aire A de ce dernier polygone est

$$A = ab\,\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_x, \ldots, r_n) \quad \text{ou} \quad r_x = \frac{l_x}{\lambda_x}.$$

Les applications sont nombreuses :

1°. L'aire d'un triangle inscrit dans un cercle ayant l'unité pour rayon étant

$$\varphi = \frac{h_1 h_2 h_3}{4},$$

l'aire d'un triangle inscrit dans l'ellipse ayant les demi-axes a, b sera

$$A = \frac{ab}{4} r_1 r_2 r_3,$$

c'est la formule de Mac-Cullagh; et comme l'on a aussi

$$\varphi = \sqrt{s(s-h_1)(s-h_2)(s-h_3)}$$

ou

$$2s = h_1 + h_2 + h_3,$$

ainsi l'on aura

$$A = ab\sqrt{t(t-r_1)(t-r_2)(t-r_3)}$$

ou

$$2t = r_1 + r_2 + r_3,$$

formule qui est due à mon ami le D[r] Brioschi (*Teorica dei determinanti*, p. 28; *Sopra alcuni teoremi di geometria*, Annali del Sig. Tortolini, 1853).

2°. Pour le triangle circonscrit au cercle, on a

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2},$$

par conséquent, pour le triangle circonscrit à l'ellipse on aura

$$A = \frac{ab}{2}(r_1 + r_2 + r_3),$$

formule plus simple que celle qui a été trouvée par le D[r] Brioschi, *loco citato*.

Ainsi les aires φ_1, φ_2, φ_3 d'un quadrilatère inscrit, ou circonscrit à un cercle, inscrit et circonscrit simultanément à deux cercles étant

$$\varphi_1 = \sqrt{(s - h_1)(s - h_2)(s - h_3)(s - h_4)},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(dd_0)^2 - (h_1 h_3 - h_2 h_4)^2},$$

$$\varphi_3 = \sqrt{h_1 h_2 h_3 h_4}$$

où

$$2s = h_1 + h_2 + h_3 + h_4,$$

et d, d_0 sont les deux diagonales, on aura les aires d'un quadrilatère inscrit, circonscrit dans l'ellipse, inscrit dans l'ellipse des demi-axes ab et circonscrit à un autre qui est concentrique et homothétique à la première ainsi représentées

$$A_1 = ab\sqrt{(t - r_1)(t - r_2)(t - r_3)(t - r_4)},$$

$$A_2 = \frac{ab}{2}\sqrt{(rr_0)^2 - (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2},$$

$$A_3 = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}$$

où

$$2t = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$

PROBLÈME MALFATTI

(voir t. XII, p. 131).

Dans l'endroit cité, on a les trois équations

$$x = s\sin^2(\sigma - \varphi),$$
$$y = s\sin^2(\sigma - \chi),$$
$$z = s\sin^2(\sigma - \psi).$$

Substituant pour σ, φ, χ, ψ leurs valeurs, M. Cayley trouve (*Quarterly Journal,* déc. 1855, p. 226) :

$$2x = s - \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} + \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}} - \sqrt{\frac{(s-a)ac}{s}} - \sqrt{\frac{(s-c)bc}{s}},$$

$$2y = s - \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} - \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}} + \sqrt{\frac{(s-b)ac}{s}} - \sqrt{\frac{(s-c)bc}{s}},$$

$$2z = s - \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} - \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}} - \sqrt{\frac{(s-b)ac}{s}} + \sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}},$$

$$2yz = \sqrt{(s-b)(s-c)} - \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{bc},$$
$$2zx = \sqrt{(s-c)(s-a)} - \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{ac},$$
$$2xy = \sqrt{(s-a)(s-b)} - \sqrt{s(s-c)} + \sqrt{ab}.$$

SUR LA QUESTION 365

(voir page 125):

PAR M. LEBESGUE.

Soient a, b, m entiers, b non carré :

1°. $a - \sqrt{b}$, positif plus petit que 1,

$$(a+\sqrt{b})^m = A + B\sqrt{b} = P.$$

$2a - 1$ est le plus grand entier contenu dans P.

2°. $\sqrt{b} - a$ positif plus petit que 1 et m pair.

$2A - 1$ est le plus grand entier contenu dans P.

3°. $\sqrt{b} - a$ positif plus petit que 1 et m impair.

$2A$ est le plus grand entier contenu dans P.

4°.

$$b = 3,\quad a = 1,\quad 3B^2 - A^2 = 2^{2n+1},$$
$$m = 2n+1.$$

2^{n+1} est la plus haute puissance de 2 qui divise $2A$.

C'est le théorème de M. Sylvester avec une condition de plus.

5°.

$$b = 3,\quad a = 1,\quad m = 2n,\quad A^2 - 3B^2 = 2^n.$$

$2A$ est l'entier immédiatement au-dessus de P et 2^{n+1} est la *plus haute puissance* de 2 qui le divise.

On trouverait sans peine d'autres théorèmes analogues.

NOTE

Sur des lieux géométriques relatifs à des faisceaux de coniques.

1. Le lieu géométrique du pôle d'une droite fixe relativement à un faisceau de coniques circonscrites au même quadrilatère est une conique. En effet, projetant le système de manière que la droite aille à l'infini, les pôles deviennent les centres du faisceau projeté des coniques qui passeront toujours par quatre mêmes points; or le lieu de ces centres est une conique; donc, etc.

Remarque. C'est par erreur qu'on lit page 388 du tome IV que ce lieu est une ligne du sixième degré.

Lorsque la droite fixe est une des six cordes communes aux coniques, le lieu cherché devient une droite.

2. L'enveloppe des polaires d'un point fixe relativement à un faisceau de coniques inscrites dans le même quadrilatère est une conique.

Lorsque ce point est un des angles du quadrilatère, la conique se réduit à un point.

3. L'enveloppe des polaires d'un point fixe relativement à un faisceau de coniques circonscrites au même quadrilatère est un point.

4. Le lieu géométrique des pôles d'une droite fixe relativement à un faisceau de coniques inscrites à un quadrilatère est une droite.

Observation. Lorsque la droite fixe se transporte à l'infini, les pôles deviennent les centres de coniques qui sont ainsi en ligne droite. Théorème de Newton.

NOTE

Sur la polaire réciproque d'une conique et d'une surface du second degré.

1. Soient données cette équation rendue homogène d'une conique

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ \qquad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, \end{array}\right.$$

$\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la conique directrice, l'équation de la polaire réciproque de la conique (1) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$\frac{d\varphi}{dx_1}$ est la dérivée de φ relativement à x_1, etc., et où

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \quad a_{31} = a_{13};$$

car ce déterminant a pour résultat l'équation (a) du tome VII, page 413 des *Nouvelles Annales*.

Observation. Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \frac{d\varphi}{dx_3}$ par x_1, x_2, x_3 (*voir* Brioschi, *Théorie des Déterminants*, traduction française, p. 47). On a omis de dire que la directrice est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

2. Soient données cette équation rendue homogène d'une surface du second degré

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 \\ \qquad + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 \\ \qquad + a_{44}x_4^2 = 0; \end{array} \right.$$

$\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la surface directrice.

L'équation de la polaire réciproque de la surface (2) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{d\varphi}{dx_4} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & \frac{d\varphi}{dx_4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \ldots$$

Observation. Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant $\frac{d\varphi}{dx_1}$, $\frac{d\varphi}{dx_2}$, $\frac{d\varphi}{dx_3}$, $\frac{d\varphi}{dx_4}$ par x_1, x_2, x_3, x_4.

Remarque. Les fonctions *quadratiques* homogènes à n variables sont représentées par ce symbole

$$\Sigma_r \Sigma_s a_{r,s} x_r x_s,$$

en donnant à r et s toutes les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n et posant

$$a_{sr} = a_{rs}.$$

Ainsi pour $n = 3$, on donne à r et s les valeurs successives 1, 2, 3 et l'on obtient l'équation (1).

Pour $n = 4$, on donne à r et s les valeurs successives 1, 2, 3, 4 et l'on obtient l'équation (2).

Une fonction quadratique homogène à n termes variables renferme donc $\frac{n(n+1)}{2}$ termes.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES ET DES LIGNES, PLANS POLAIRES ET DROITES POLAIRES

(voir t. XI, p. 195; t. XII, p. 272, et t. XIV. p. 111).

---

1. *Notations.* Représentons les trois coordonnées d'un point dans l'espace par $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$, ce qui permet de rendre *homogènes* les équations des surfaces. Quand on dit qu'un point a pour coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, il faut sous-entendre $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$. Dans le résultat final d'une opération, on fait $x_4 = 1$; on revient alors aux coordon-

nées ordinaires. Les avantages de cette notation consistent dans la forme symétrique des résultats, si favorable à la mémoire, et ensuite dans la facilité d'appliquer aux équations les propriétés des fonctions homogènes.

Soit

$$u = 0$$

l'équation rendue homogène d'une surface de degré n, de sorte que u est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4, coordonnées de la surface dont chaque terme est de degré n; U est la même fonction en X_1, X_2, X_3, X_4 coordonnées d'un point *quelconque* de l'espace.

$u_{x_1}^{(p)}$, $u_{x_2}^{(p)}$, $u_{x_3}^{(p)}$, $u_{x_4}^{(p)}$ sont les dérivées d'ordre p de la fonction u, prises respectivement par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4; de même $U_{X_1}^{(p)}$, $U_{X_2}^{(p)}$, $U_{X_3}^{(p)}$, $U_{X_4}^{(p)}$.

2. *Plans polaires.* $u = 0$ étant une équation homogène d'une surface de degré n, l'équation

$$x_1 U_{X_1}^{(p)} + x_2 U_{X_2}^{(p)} + x_3 U_{X_3}^{(p)} + x_4 U_{X_4}^{(p)} = 0$$

est l'équation du *plan polaire* d'ordre p du point X_1, X_2, X_3, X_4 désigné comme pôle; x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées courantes du plan.

3. Théorème. *Étant données trois surfaces de degré* n, n_1, n_2, *le lieu du pôle dont les trois plans polaires correspondants d'ordre* p *passent par la même droite est une surface de degré* $n + n_1 + n_2 - 3p$.

Démonstration. Soient

$u = 0$ l'équation de la surface de degré n,
$v = 0$ — n_1,
$w = 0$ — n_2,

on aura

$$x_1 U_{X_1}^{(p)} + x_2 U_{X_2}^{(p)} + x_3 U_{X_3}^{(p)} + x_4 U_{X_4}^{(p)} = 0,$$

équation du plan polaire relative à $u = 0$;

$$x_1 V^{(p)}_{X_1} + x_2 V^{(p)}_{X_2} + x_3 V^{(p)}_{X_3} + x_4 V^{(p)}_{X_4} = 0,$$

équation du plan polaire relative à $v = 0$;

$$x_1 W^{(p)}_{X_1} + x_2 W^{(p)}_{X_2} + x_3 W^{(p)}_{X_3} + x_4 W^{(p)}_{X_4} = 0,$$

équation du plan polaire relative à $w = 0$.

Si ces trois plans passent par la même droite, les plans menés parallèlement par l'origine passent aussi par une même droite, et *vice versâ*. Pour avoir les équations de ces plans parallèles, il suffit de supprimer les termes en X_4, et alors, parce que les plans passent par une même droite, le déterminant suivant doit être nul :

$$\begin{vmatrix} U^{(p)}_{X_1} & U^{(p)}_{X_2} & U^{(p)}_{X_3} \\ V^{(p)}_{X_1} & V^{(p)}_{X_2} & V^{(p)}_{X_3} \\ W^{(p)}_{X_1} & W^{(p)}_{X_2} & W^{(p)}_{X_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu cherché; or $U^{p}_{X_1}$ est de degré $n - p$, $V^{p}_{X_2}$ de degré $n_1 - p$, $W^{(p)}_{X_3}$ de degré $n_2 - p$; donc l'équation du lieu est de degré $n + n_1 + n_2 - 3p$.

C. Q. F. D.

Corollaire. 1°. Si $n = n_1 = n_2$, le degré du lieu est $3(n - p)$.

2°. Si $n = n_1 = n_2 = 2$ et $p = 1$, le lieu est du troisième degré.

Remarque. Le plan polaire d'ordre 1 est le lieu des *centres harmoniques* relatifs aux sécantes qui passent par le pôle (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 347).

4. Théorème. *Étant données quatre surfaces de degré* n, n₁, n₂, n₃, *le lieu du pôle dont les quatre plans po-*

laires d'ordre p par rapport à ces surfaces passent par un même point est une surface et du degré

$$n + n_1 + n_2 + n_3 - 4p.$$

Démonstration. Soient

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$

les équations des quatre surfaces de degrés respectifs n, n_1, n_2, n_3; pour que les quatre plans polaires d'ordre p passent par le même point, il faut établir la relation

$$\begin{vmatrix} U_{X_1}^{(p)} & U_{X_2}^{(p)} & U_{X_3}^{(p)} & U_{X_4}^{(p)} \\ V_{X_1}^{(p)} & V_{X_2}^{(p)} & V_{X_3}^{(p)} & V_{X_4}^{(p)} \\ W_{X_1}^{(p)} & W_{X_2}^{(p)} & W_{X_3}^{(p)} & W_{X_4}^{(p)} \\ \Phi_{X_1}^{(p)} & \Phi_{X_2}^{(p)} & \Phi_{X_3}^{(p)} & \Phi_{X_4}^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu qui est de degré

$$n + n_1 + n_2 + n_3 - 4p.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. 1°. Si $n = n_1 = n_2 = n_3$, le degré du lieu est $4(n - p)$.

2°. Si $n = n_1 = n_2 = n_3 = 2$ et $p = 1$, le degré est 4.

SUR L'HEXAGONE INSCRIPTIBLE DANS UNE CONIQUE
Et solution de la question 369

(voir page 281);

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Soit l'hexagone 123456.

$r = 0$	équation du côté	12
$s = 0$	—	34
$t = 0$	—	56

$\beta r + \alpha s + t = 0$ équation du côté 23
$r + \gamma s + \beta t = 0$ — 45
$\gamma r + s + \alpha t = 0$ — 61

Si ces relations subsistent, l'hexagone est inscriptible dans la conique ayant pour équation

$$r^2 + s^2 + t^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) st + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) tr + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) rs = 0;$$

les équations des diagonales sont

(13) $\alpha\beta r + s + \alpha t = 0$,
(24) $r + \alpha\beta s + \beta t = 0$,
(35) $\beta r + \beta\gamma s + t = 0$;

(14) $\alpha r + \beta s + \alpha\beta t = 0$,
(25) $\alpha r + \alpha\gamma s + \gamma t = 0$,
(36) $\beta\gamma r + \beta s + \gamma t = 0$;

(15) $r + \gamma s + \alpha\gamma t = 0$,
(26) $\alpha\gamma r + \alpha s + t = 0$,
(46) $\gamma r + s + \beta\gamma t = 0$.

Soient

A l'intersection des côtés (34) et (56),
B — (12) et (56),
C — (34) et (12);

le point A étant déterminé par les équations

$$s = 0, \quad t = 0,$$

l'équation de la droite A 1 est de la forme

$$s + kt = 0;$$

mais le point (1) est déterminé par les équations

(12) $r = 0$,
(16) $\gamma r + s + \alpha t = 0$;

par conséquent,

$$k = \alpha;$$

on aura aussi

(A 1) $s + \alpha t = 0,$

(A 2) $t + \alpha s = 0,$

(B 3) $t + \beta r = 0,$

(B 4) $r + \beta t = 0,$

(C 5) $r + \gamma s = 0,$

(C 6) $s + \gamma r = 0.$

Soient les trois droites

$$s - t = 0, \quad t - r = 0, \quad r - s = 0.$$

La première droite passe par le point A et rencontre BC en *a*.

La deuxième droite passe par le point B et rencontre AC en *b*.

La troisième droite passe par le point C et rencontre AB en C.

Et les trois droites se coupent en un même point.

On en déduit que les cinq droites :

AB, AC, A*a*, A 1, A 2 sont en involution, A*a* est la droite double.

BC, BA, B*b*, B3, B4 sont en involution, B*b* est la droite double.

CA, CB, C*c*, C5, C6 sont en involution, C*c* est la droite double.

Si l'on suppose $\alpha\beta\gamma = 1$,

Les trois équations ci-dessus (13), (35), (15) se réduisent à la première, savoir

(1) $$\alpha\beta r + s + \alpha t = 0,$$

c'est-à-dire les points 1, 3, 5 sont sur la même droite donnée par l'équation (1); de même les points 2, 4, 6

sont sur la même droite donnée par l'équation

$$(2) \qquad r + \alpha\beta s + \beta t = 0,$$

de sorte que l'hexagone est inscrit entre les deux droites (1) et (2), et l'équation de la conique se réduit au produit (1) (2) = 0; les équations (1) et (2) sont celles des deux droites R et S du problème Cayley.

REMARQUE SUR LA NOTE DE M. ALLEGRET

(voir page 136);

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Les équations

$$x_5 + a_1 x_1 = x_1 + a_2 x_2 = \ldots = x_4 + a_5 x_5$$

peuvent être résolues très-aisément comme il suit.

En représentant par s la valeur commune des quantités $x_5 + a_1 x_1$, $x_1 + a_2 x_2, \ldots$, on a

$$\begin{aligned} x_5 + a_1 x_1 &= s, \\ x_1 + a_2 x_2 &= s, \\ x_2 + a_3 x_3 &= s, \\ x_3 + a_4 x_4 &= s, \\ x_4 + a_5 x_5 &= s. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les équations, après les avoir multipliés respectivement par

$$1, \quad -a_1, \quad +a_1 a_2, \quad -a_1 a_2 a_3, \quad +a_1 a_2 a_3 a_4,$$

nous aurons

$$x_5(1 + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) = s(1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4).$$

Ainsi la valeur de x_5 est connue. Un simple changement de lettre donnera ensuite les valeurs des autres inconnues.

NOTE
Sur quelques formules propres à la détermination des trois indices principaux dans les cristaux biréfringents;

PAR M. DE SENARMONT.

§ 1. Lorsqu'il s'agit de déterminer les trois indices principaux d'un cristal biréfringent, on procède généralement de la manière suivante :

On taille trois prismes de façon que leurs arêtes soient parallèles aux trois axes principaux A, B, C d'élasticité optique. Avec chacun de ces prismes, on détermine facilement l'indice du rayon polarisé perpendiculairement à l'arête réfringente; ce rayon obéit en effet aux lois de Descartes, et si l'on observe le spectre correspondant, dans la position du minimum de déviation, on peut appliquer la formule qui conviendrait à un milieu monoréfringent.

L'indice ainsi déterminé est inversement proportionnel à la racine carrée de l'élasticité optique dans le sens de l'arête réfringente du prisme.

§ 2. Avec chacun de ces prismes, on peut encore observer un second spectre correspondant au rayon polarisé parallèlement à l'arête réfringente. Ce rayon n'obéit pas aux lois de Descartes, sa déviation est néanmoins susceptible d'un minimum. Or les lois connues de la double réfraction permettent d'établir une relation entre cette déviation minimum, l'angle du prisme, l'orientation de ses faces dans le cristal et les élasticités optiques suivant les deux axes principaux perpendiculaires à l'arête réfringente.

Soient a^2, b^2, c^2 les élasticités optiques parallèlement aux axes principaux A, B, C; soient α, β, γ les trois indices, de sorte que

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = \frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{c}.$$

Soient A, B, C les angles des trois prismes dont les arêtes réfringentes sont respectivement parallèles aux axes principaux A, B, C.

Soient Δ'_o, Δ''_o, Δ'''_o les déviations minima des rayons qui ont subi la réfraction ordinaire dans les trois prismes, Δ'_e, Δ''_e, Δ'''_e les déviations minima des rayons qui ont subi la réfraction extraordinaire; on posera, pour abréger,

$$D'_o = A + \Delta'_o, \quad D''_o = B + \Delta''_o, \quad D'''_o = C + \Delta'''_o,$$
$$D'_e = A + \Delta'_e, \quad D''_e = B + A''_e, \quad D'''_e = C + \Delta'''_e.$$

Soient θ', θ'', θ''' les angles compris entre la bissectrice de l'angle réfringent du prisme et l'un des deux axes d'élasticité optique perpendiculaires à l'arête réfringente. (On comptera ces angles de façon que $\theta = 0$ ou $\theta = 90°$, selon que la bissextrice coïncide avec l'axe correspondant au coefficient d'élasticité écrit le premier ou le second dans les formules.)

On a les relations suivantes entre les coefficients d'élasticité et les données expérimentales obtenues avec chacun des trois prismes.

Premièrement. Pour les rayons polarisés normalement aux arêtes réfringentes et qui obéissent aux lois de Descartes :

$$(\mathrm{M}) \qquad a = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{D'_o}{2}}, \quad b = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{D''_o}{2}}, \quad c = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{D'''_o}{2}}.$$

Secondement. Pour les rayons polarisés parallèlement

aux arêtes réfringentes et qui obéissent aux lois de la réfraction extraordinaire :

$$
(\mathrm{N})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\sin^2\frac{A}{2} - b^2\sin^2\frac{D'_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - c^2\cos^2\frac{D'_e}{2}\right)\cos^2\theta' \\
&+\left(\cos^2\frac{A}{2} - b^2\cos^2\frac{D'_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2} - c^2\sin^2\frac{D'_r}{2}\right)\sin^2\theta' = 0, \\
&\left(\sin^2\frac{B}{2} - c^2\sin^2\frac{D''_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{B}{2} - a^2\cos^2\frac{D''_e}{2}\right)\cos^2\theta'' \\
&+\left(\cos^2\frac{B}{2} - c^2\cos^2\frac{D''_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{B}{2} - a^2\sin^2\frac{D''_e}{2}\right)\sin^2\theta'' = 0, \\
&\left(\sin^2\frac{C}{2} - a^2\sin^2\frac{D'''_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{C}{2} - b^2\cos^2\frac{D'''_e}{2}\right)\cos^2\theta''' \\
&+\left(\cos^2\frac{C}{2} - a^2\cos^2\frac{D'''_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{C}{2} - b^2\sin^2\frac{D'''_r}{2}\right)\sin^2\theta''' = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Deux prismes différents suffisent donc généralement pour déterminer les trois coefficients d'élasticité (ou en d'autres termes les trois indices principaux); et même pour fournir, en plus, une relation de vérification entre ces coefficients.

Si le cristal était à un seul axe optique, deux des trois quantités a, b, c deviendraient égales entre elles.

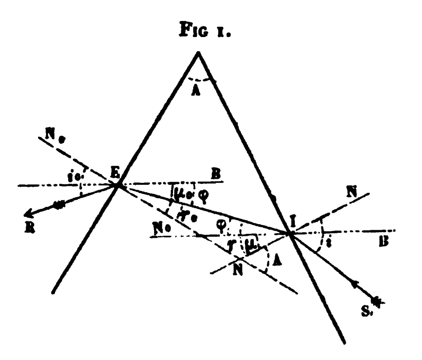
§ 3. Les formules (M) se déduisent par les procédés ordinaires des lois de Descartes. Quant aux formules (N), on peut les établir de la manière suivante :

Soit (*fig.* 1) le prisme, d'angle A, dont l'arête réfringente est parallèle à l'axe principal A. Les deux autres axes principaux B et C sont normaux à l'arête réfringente.

Soient BI, BE des droites parallèles à l'axe principal B; NI, N_0E les normales aux faces réfringentes; SI, ER les directions des normales aux ondes planes extérieures,

incidente et émergente; IE la direction de la normale à l'onde plane intérieure réfractée.

Fig 1.



Désignons par φ l'angle que cette dernière normale fait avec l'axe principal B, par i, i_0 les angles d'incidence SIN, N_0ER; par r, r_0, les angles EIN, IEN_0; par μ, μ_0 les angles BIN, BEN_0.

On a les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} i + i_0 = \Delta + A = D, \\ r + r_0 = A, \\ \left.\begin{array}{l}\varphi = r - \mu \\ \varphi = \mu_0 - r_0\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} r = \varphi + \mu, \\ r_0 = \mu_0 - \varphi, \end{array}\right. \\ \mu_0 + \mu = A. \end{array}\right.$$

On posera

$$\mu_0 - \mu = B,$$

de sorte qu'on a

$$r_0 - r = B - 2\varphi.$$

Lorsqu'on prend pour unité la vitesse de propagation normale des ondes lumineuses dans le milieu extérieur au prisme, et que l'on désigne par ν la même vitesse intérieure au milieu cristallisé, on a généralement

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{\nu}.$$

Mais quand la direction de cette dernière vitesse est perpendiculaire à l'axe principal A et fait un angle φ avec l'axe principal B, on a, par la théorie connue de la double réfraction,

$$v = \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi},$$

de sorte que pour l'onde transmise au travers du prisme, on a à l'incidence et à l'émergence

$$(2)\quad \sin i = \frac{\sin r}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}},\quad \sin i_{\prime} = \frac{\sin r_{\prime}}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}.$$

Si l'on retranche et qu'on ajoute successivement ces équations membre à membre,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{i_{\prime}-i}{2} &= \frac{1}{\cos\frac{D}{2}}\,\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2}-\varphi\right)}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}},\\ \cos\frac{i_{\prime}-i}{2} &= \frac{1}{\sin\frac{D}{2}}\,\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2}-\varphi\right)}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}. \end{aligned}\right.$$

Carrant et ajoutant membre à membre,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\left(\begin{aligned} &\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\ &-c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \end{aligned}\right)\\ &+\sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{aligned}\right\}\\ &+\sin\varphi\left\{\begin{aligned} &\sin\varphi\left(\begin{aligned} &\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\ &-b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \end{aligned}\right)\\ &+\cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Mais dans le cas du minimum de déviation

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = \frac{dD}{d\varphi} = 0.$$

La dérivée par rapport à φ du premier membre de l'équation précédente est nulle, donc

$$(5)\left\{\begin{aligned} &\sin\varphi\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\left(\begin{aligned} &\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2} \\ &- c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \end{aligned}\right) \\ &+ \sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{aligned}\right\} \\ &- \cos\varphi\left\{\begin{aligned} &\sin\varphi\left(\begin{aligned} &\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2} \\ &- b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \end{aligned}\right) \\ &+ \cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{aligned}\right\} = 0. \end{aligned}\right.$$

En vertu des équations (4) et (5), il faut qu'on ait simultanément

$$(6)\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \\ &= \sin\varphi\left[\begin{aligned} &b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \\ &- \left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}\right) \end{aligned}\right], \\ &\sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^3\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \\ &= \cos\varphi\left[\begin{aligned} &c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \\ &- \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{aligned}\right]. \end{aligned}\right.$$

En multipliant entre elles les équations (6) membre à membre,

$$b^2 c^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}$$

$$-b^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)$$

$$-c^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)$$

$$+\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=0.$$

Si l'on désigne par θ l'angle que la bissectrice du prisme fait avec l'axe principal B, on trouvera facilement sur la figure

$$\mu+90-\frac{A}{2}=\theta,\quad \mu_0+90^\circ-\frac{A}{2}=180^\circ-\theta,$$

donc

$$\mu_0-\mu=B=180^\circ-\theta,\quad \frac{B}{2}=90^\circ-\theta.$$

L'équation précédente devient alors

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&b^2 c^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\\&-b^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\sin^2\theta+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\theta\right)\\&-c^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\cos^2\theta+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\sin^2\theta\right)\\&+\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=0,\end{aligned}\right.$$

ou, sous une autre forme,

$$\left(\sin^2\frac{A}{2}-b^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2}-c^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\cos^2\theta$$

$$+\left(\cos^2\frac{A}{2}-b^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2}-c^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\sin^2\theta=0.$$

En divisant les équations (6) membre à membre, on trouve

$$\tang^2 \varphi = \frac{c^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\sin^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\theta\right)}{b^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\cos^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\sin^2\theta\right)},$$

$$= \frac{\sin^2\theta\cos^2\frac{D}{2}\left(c^2\sin^2\frac{D}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right) + \cos^2\theta\sin^2\frac{D}{2}\left(c^2\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\theta\sin^2\frac{D}{2}\left(b^2\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right) + \cos^2\theta\cos^2\frac{D}{2}\left(b^2\sin^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right)}.$$

Lorsque la bissectrice de l'angle du prisme coïncide avec un des axes principaux, la formule précédente se simplifie. Elle se réduit, selon que $\theta = 0$ ou que $\theta = 90^\circ$, à

$$\left(\sin^2\frac{A}{2} - b^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - c^2\cos^2\frac{D}{2}\right) = 0$$

ou à

$$\left(\sin^2\frac{A}{2} - c^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - b^2\cos^2\frac{D}{2}\right) = 0.$$

Les premiers facteurs égalés de zéro déterminent b ou c et donnent

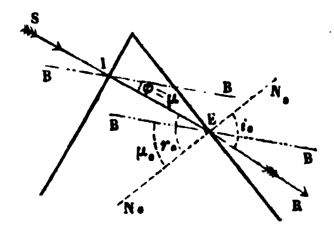
$$\tang\varphi = \infty \quad \text{ou} \quad \tang\varphi = 0.$$

Quant aux seconds facteurs; ici, comme dans la recherche du minimum de déviation, avec les conditions propres aux milieux monoréfringents, ils répondraient à une question différente de celle qu'il s'agit de résoudre.

§ 4. On trouve des relations encore plus simples lorsque l'on observe le spectre émergent, non plus en plaçant le prisme dans la position du minimum de déviation, mais dans une situation telle, que le rayon incident rencontre normalement la face d'entrée.

La ligne SI est normale en même temps à l'onde plane extérieure incidente et à la face du prisme.


Fig. 2.



ER est la normale à l'onde plane extérieure émergente; IE, prolongement de SI, est la normale à l'onde plane intérieure réfractée.

Si donc on conserve les mêmes notations qu'au § 3, on trouve

$$i = 0, \quad i_0 = D, \quad r = 0, \quad r_0 = A, \quad \varphi = \mu,$$

de sorte que les équations (2) deviennent

$$b^2 \sin^2\mu + c^2 \cos^2\mu = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D}.$$

Lorsque la face d'entrée est parallèle ou perpendiculaire à l'axe principal B,

$$b^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D} \quad \text{ou} \quad c^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D}.$$

§ 5. On peut étendre les mêmes procédés d'observation et des formules analogues aux cristaux à un seul axe optique, même lorsque l'arête réfringente du prisme est dirigée d'une manière quelconque.

Il arrive alors que le rayon incident et le rayon émergent extraordinaire ne sont pas dans un même plan, mais restent tous deux parallèles à la section droite du prisme. Les ondes planes incidentes réfractée et émergente se

coupent en effet toujours parallèlement à l'arête réfringente; de sorte que la normale IE (*fig.* 1) à l'onde plane réfractée est comprise dans le plan de la section droite.

Ce même plan contient de plus l'un des axes principaux B, en nombre infini, tous égaux entre eux et perpendiculaires à l'axe optique A. Soient BI, BE des parallèles à cet axe d'élasticité B. En conservant les notations précédentes, et en désignant en outre par π l'inclinaison de l'axe optique A sur l'arête réfringente, il est facile de voir que la vitesse de propagation normale de l'onde plane extraordinaire réfractée sera donnée par l'équation

$$v^2 = (b^2 \sin^2\pi + a^2\cos^2\pi^2)\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi = k^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi.$$

On a donc comme précédemment

$$\sin i = \frac{\sin r}{\sqrt{k^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}}, \quad \sin^2 i_0 = \frac{\sin r_0}{\sqrt{k^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}}.$$

Le calcul s'achèvera de la même manière, et l'on aura, pour le rayon extraordinaire, dans le cas du minimum de déviation,

$$\left(\sin^2\frac{A}{2} - k^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - a^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\cos^2\theta$$
$$+\left(\cos^2\frac{A}{2} - k^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2} - a^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\sin^2\theta = 0,$$

ou, sous une autre forme,

$$a^2k^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}$$
$$-k^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\sin^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\theta\right)$$
$$-a^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\cos^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\sin^2\theta\right)$$
$$+\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = 0.$$

§ 6. Si dans ce cas encore le rayon incident rencontrait normalement la face d'entrée (*fig.* 2), on aurait

$$k^2 \sin^2\mu + a^2 \cos^2\mu = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D}.$$

§ 7. Les angles μ, μ_0 sont respectivement égaux aux inclinaisons du plan, qui contient à la fois l'arête réfringente et l'axe optique unique, sur les faces d'entrée et de sortie; de sorte que si les données expérimentales sont les angles λ, λ_0, que l'axe optique fait avec les mêmes faces, on trouve sans difficulté

$$\sin\mu = \frac{\sin\lambda}{\sin\pi}, \qquad \sin\mu_0 = \frac{\sin\lambda_0}{\sin\pi},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\tang\frac{A}{2}}{\tang\frac{B}{2}} = \frac{\tang\frac{\lambda_0 - \lambda}{2}}{\tang\frac{\lambda_0 + \lambda}{2}}, \quad \sin\pi = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{\lambda_0+\lambda}{2}\cos\frac{\lambda_0-\lambda}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{\lambda_0-\lambda}{2}\cos\frac{\lambda_0+\lambda}{2}}.$$

§ 8. Les formules établies dans cette Note seront principalement utiles à l'étude optique des cristaux difficiles à tailler, mais dont quelques faces naturelles forment prisme, et offrent spontanément des arêtes réfringentes.

On se contentera de rapporter une application numérique de ces formules à des mesures prises sur un très-petit cristal de quartz, limité par une face de la pyramide et par une face du prisme hexagonal.

L'arête réfringente est normale à l'axe optique, de sorte que $\pi = 90^\circ$, $k^2 = b^2$.

La formule précédente devient alors

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\frac{1}{b^2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta\right) - \sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}}{\frac{1}{b^2}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta\right)} = \frac{P}{Q}.$$

L'angle réfringent du prisme......	$A = 38°.12'$
L'angle compris entre la bissectrice de l'angle du prisme et l'axe principal B........................	$\theta = 70.53.30$
Les déviations mesurées pour la région du jaune, entre les raies D et E, sont...........................	$\Delta_o = 22.35$
	$\Delta_e = 22.56$
On a donc....................	$D_o = 60.48$
	$D_e = 61.\ 9$

Donc

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin\frac{D_o}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 1,5458$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{b^2}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta = 0,020340 \\ \frac{1}{b^2}\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta = 0,492868\end{array}\right\} 0,513208$$

$$\sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\frac{D_e}{2} = \qquad 0,191794$$

$$P = 0,321414$$

$$\frac{1}{b^2}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \qquad 0,228628$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta = 0,070922 \\ \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta = 0,024755\end{array}\right\} 0,095677$$

$$Q = 0,132951$$

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{P}{Q}} = 1,5548.$$

Or on a, d'après Rudberg :

Pour la raie D..... $\frac{1}{b} = 1,54418$, $\frac{1}{a} = 1,55328$

Pour la raie E..... $\frac{1}{b} = 1,54711$, $\frac{1}{a} = 1,55631$

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

VII.

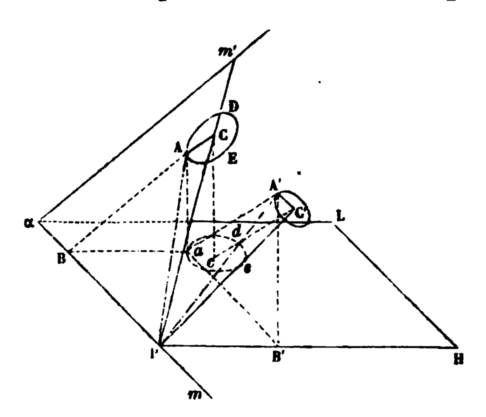
Démonstration, par la géométrie élémentaire, *de cette Proposition* : La projection d'un cercle sur un plan est une ellipse.

Dans l'une des parties du Programme officiel de *l'enseignement élémentaire* des lycées, il est question de l'*ellipse* que l'on définit : Une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes nommés *foyers* est une quantité constante. Dans une autre partie du même Programme, il s'agit de déterminer la projection d'un cercle sur un plan. Pour compléter la solution qu'on a donnée de cette dernière question, il peut être utile de faire voir que la projection du cercle est une ellipse. Tel est l'objet de cette Note.

On démontre très-simplement par la géométrie élémentaire que si l'on coupe un cylindre droit à base circulaire par un plan incliné sur celui de la base du cylindre, la section est une ellipse, en adoptant la définition de l'ellipse que nous venons de rappeler. C'est là une proposition que nous admettrons comme déjà établie. De cette proposition même il résulte que, pour démontrer qu'une certaine courbe plane donnée est une ellipse, il suffit de

prouver qu'il est possible d'obtenir un cercle en projetant cette courbe sur un plan incliné sur celui de la courbe.

Cela posé, représentons par ADE une circonférence ayant pour centre le point C, et située dans le plan *mam'*.



Soit *ade* la projection de cette circonférence sur un plan *m*α L qui coupe le plan *m*α*m'* suivant la droite α*m*, en faisant avec ce dernier plan un angle quelconque *m'*α L différant d'un angle droit. Il est clair que la projection *ade* sera une courbe ayant pour centre le point *c*, projection du centre C de la circonférence. Pour démontrer que la courbe *ade* est une ellipse, nous allons faire voir qu'en la projetant sur un plan convenablement choisi, on obtient pour projection une circonférence.

En un point quelconque P de la droite α*m* élevons à cette droite une perpendiculaire PH dans le plan de projection *m*α L, et, par la perpendiculaire PH, conduisons un nouveau plan PHC' qui fasse avec le plan de projection *m*α L un angle égal à l'angle *m'*α L, que ce dernier plan forme avec celui de la circonférence ADE. La projection de la courbe *ade* sur le plan PHC' sera une circonférence.

En effet, soit A′ la projection sur le plan dont il s'agit d'un point quelconque a de la courbe ade. Si l'on abaisse A′B′ perpendiculaire sur PH, la droite aB′ sera aussi perpendiculaire à PH, et l'angle rectiligne A′B′a, qui mesure le dièdre des plans PHA′C′, $m\alpha$L, sera égal à l'angle $m'\alpha$L. Si du point a on abaisse une perpendiculaire aB sur αm et qu'on joigne par la droite BA le point B au point A qui s'est projeté en a, l'angle rectiligne ABa sera aussi égal à l'angle $m'\alpha$L. Par conséquent, les deux triangles rectangles aA′B′, aAB seront semblables et on aura

$$\frac{aB'}{AB} = \frac{A'B'}{aB}.$$

Mais

$$aB' = BP \quad \text{et} \quad Ba = PB';$$

donc

$$\frac{BP}{AB} = \frac{A'B'}{PB'}.$$

Il en résulte que les deux triangles rectangles ABP, A′B′P sont semblables, comme ayant un angle droit compris entre côtés proportionnels. Par suite, l'angle A′PB′ est le complément de APB, et de plus on a

$$\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{BA} = \frac{Ba}{BA}.$$

Nous désignerons par n le dernier rapport $\frac{Ba}{BA}$ qui est le cosinus de l'angle $m'\alpha$L; de sorte qu'on aura

$$\frac{PA'}{PA} = n.$$

D'après cela, on voit que généralement, si a représente la projection d'un point quelconque A du plan $m'\alpha m$ sur $m\alpha$L, et A′ la projection de a sur le plan PHC′; les angles APα, A′PH seront complémentaires, et que, de plus,

le rapport des lignes PA'. PA sera égal à n. Ainsi, en désignant par C' la projection du centre c sur le plan PHC', les angles C'PH, CPα seront complémentaires et

$$\frac{PC'}{PC} = n.$$

Il s'ensuit que les triangles A'PC', APC ont les angles A'PC', APC égaux entre eux, et que les côtés qui forment ces angles sont proportionnels; donc les triangles A'PC', APC sont semblables et donnent

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{PC'}{PC} = n.$$

D'où

$$C'A' = CA \times n.$$

Ainsi la valeur de C'A' est invariable. Ce qui démontre que la projection de la courbe ade sur le plan PHC' est une circonférence qui a pour centre le point C'; donc cette courbe est une ellipse. Les diamètres des circonférences C, C' sont égaux aux axes de l'ellipse obtenue.

G.

SOLUTION DE LA QUESTION 386

(voir p. 183);

PAR Mlle ADOLPHINE D***.

Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être ni un carré, ni le double d'un carré.

I. J'appelle ces trois nombres A, A + 1, A — 1 et b^2 un carré. Je devrais avoir

$$A(A-1)(A+1) = b^2,$$

ou bien je puis écrire

$$(A^2 - 1)A = b^2.$$

Le nombres A et $A^2 - 1$ ne pouvant pas avoir de facteurs communs doivent être deux carrés, car ils doivent contenir tous leurs facteurs premiers à des puissances paires. Mais comme $A^2 - 1$ ne peut pas être un carré parfait, la relation précédente n'est donc pas possible.

On ne peut pas non plus satisfaire par des nombres entiers à la condition

$$(A - 1)(A)(A + 1) = 2b^2.$$

Pour le démontrer, je vais prouver que A ne pourrait être ni pair ni impair.

1°. Si l'on supposait A pair, la relation

$$A(A^2 - 1) = 2b^2$$

montrerait comme tout à l'heure que $A^2 - 1$ doit être un carré, ce qui est impossible.

2°. Si l'on supposait A impair, il aura la forme $2B + 1$. Il faudrait donc avoir, après les simplifications,

$$2B(B + 1)(2B + 1) = b^2;$$

B est premier avec $B + 1$ et avec $2B + 1$; $B + 1$ et $2B + 1$ sont premiers entre eux, car un facteur commun à ces deux nombres diviserait leur différence B, ce qui est impossible puisque B est premier avec $B + 1$.

Je vois donc par là que sur ces trois facteurs deux seraient des carrés, et le troisième multiplié par 2 serait aussi un carré. Il faut donc qu'une des combinaisons suivantes :

(1)	$2B$,	$B + 1$,	$2B + 1$,
(2)	$2(B + 1)$,	B,	$2B + 1$,
(3)	$2(2B + 1)$,	B,	$B + 1$,

renferme trois carrés parfaits. Or cela est impossible, puisque dans chacune d'elles on trouve deux nombres entiers consécutifs : ainsi $2B$ et $2B+1$ pour la première, $2B+1$ et $2B+2$ pour la deuxième et B et $B+1$ pour la troisième. La relation

$$(A+1)(A)(A-1)=2b^2$$

est donc impossible, et c'est ce que je voulais démontrer.

Note du Rédacteur. Cette bonne démonstration prouve également que le produit de trois nombres consécutifs ne peut être aucune puissance parfaite d'un nombre, et cela existe *probablement* pour le produit d'un nombre quelconque de nombres consécutifs.

Le théorème de M. Faure est démontré par Goldbach (*Corresp. math. et phys.*, t. II, p. 210). (PROUHET.)

SOLUTION DE LA QUESTION 375

(voir p. 179);

PAR Mlle ADOLPHINE D***.

Démontrer que deux cercles concentriques ayant pour rayons R et $R\sqrt{-1}$ se coupent à angle droit (*).

Je trace deux cercles de centres A et B, et soit C un point d'intersection. Je joins AC et BC. Pour que ces

---

(*) Deux coniques *homothètes* et *concentriques* ont à l'infini deux points de contact, réels pour l'hyperbole, imaginaires pour l'ellipse, vérité intuitive en considérant les asymptotes. Deux paraboles égales et de même axe focal ont à l'infini deux points d'osculation. On conclut de là que deux coniques homothètes et concentriques sont la perspective de deux coniques ayant un double contact. En général, deux courbes de degré *m*, *homothètes* et ayant *mêmes* asymptotes, ont à l'infini *m* points de contact réels ou imaginaires. Une propriété analogue existe pour les surfaces. TM.

deux cercles se coupent à angle droit, il faut que

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des rayons soit égale au carré de la distance des centres. En généralisant cette observation, on est conduit à dire que deux cercles réels ou imaginaires se coupent à angle droit quand leurs rayons R et R' et la distance de leurs centres satisfont à la condition

$$R^2 + R'^2 = D^2.$$

Or, dans le cas actuel, cette relation est satisfaite, car on a

$$R^2 + (R\sqrt{-1})^2 = 0.$$

Ce qu'il me fallait démontrer.

Note du Rédacteur. Cinq Françaises se sont livrées avec succès aux études mathématiques : 1° Marie Crous (1641), qui a introduit en France le calcul décimal; 2° Jeanne Dumée (1684); son ouvrage sur l'astronomie, jamais publié, existe manuscrit à la Bibliothèque impériale; 3° la célèbre marquise du Châtelet; 4° Hortense Lepaute, femme du célèbre horloger, et qui a calculé pendant plusieurs années la *Connaissance des Temps:* le botaniste Commerson a donné à une très-belle fleur le nom de cette femme distinguée *Peautia cœlestina,* et ensuite de Jussieu a changé ce nom en celui de *Hortensia,* généralement connu; 5° Sophie Germain, lauréat de l'Académie des Sciences, pour la question très-difficile des plaques vibrantes.

La marquise de l'Hôpital, femme du célèbre géomètre, a inséré dans le *Journal des Savants* un Mémoire sur un sujet mathématique. Lalande cite avec éloge une autre dame de sa connaissance qui s'occupait d'astronomie. Les âmes n'ont pas de sexe, dit J.-J. Rousseau, et l'intelligence réside dans l'âme.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. KRONECKER (QUESTION 373)

(voir p. 178);

PAR M. E. P***,
Professeur.

Soit

$$f_1(x) = 0, \quad (x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots, \ x_m)$$

une équation algébrique à coefficients entiers et le premier terme ayant pour coefficient l'unité; si les modules de toutes les racines sont égaux à l'unité, toutes les racines de cette équation sont des racines de l'unité.

Pour le démontrer, je représente par

$$f_2(x) = 0, \quad (x_1^2, \ x_2^2, \ldots, \ x_m^2),$$
$$f_3(x) = 0, \quad (x_1^3, \ x_2^3, \ldots, \ x_m^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'autres équations dont les racines sont respectivement celles de la proposée élevées à la deuxième, troisième, etc., puissance. Dans toutes ces équations, le premier coefficient est l'unité et tous les autres sont des nombres entiers limités, car chacun de ces coefficients est la somme d'un nombre fini de termes dont le module est l'unité, et l'on sait que le module d'une somme est inférieur à la somme des modules de ses parties.

Conséquemment, le nombre des combinaisons des valeurs de ces coefficients sera limité et l'on trouvera, parmi les équations ci-dessus, une au moins qui sera répétée un

nombre infini de fois. Supposons alors que les équations

$$f_n(x) = 0, \quad (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n),$$
$$f_p(x) = 0, \quad (x_1^p, x_2, \ldots, x_m^p),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

aient les mêmes coefficients et, par suite, les mêmes racines. Il peut arriver que ces racines, rangées comme nous l'avons fait, suivant l'ordre croissant des indices, ne soient pas respectivement égales à celles qui occupent le même rang dans la première; alors les racines de $f_n(x) = 0$, $f_p(x) = 0$, etc., seront de certaines permutations des racines de $f_1(x) = 0$. Mais comme le nombre de ces équations est infini, tandis que le nombre des permutations est fini, nous trouverons nécessairement deux équations

$$f_\alpha(x) = 0, \quad (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha),$$
$$f_\beta(x) = 0, \quad (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_m^\beta),$$

qui appartiendront à la même permutation : par conséquent, on aura

$$x_1^\beta = x_1^\alpha, \quad x_2^\beta = x_2^\alpha, \quad \ldots, \quad x_m = x_m^\alpha,$$

d'où l'on conclut que les racines de l'équation donnée sont aussi racines de l'équation binôme

$$x^{\beta-\alpha} = 1.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. M. Kronecker a énoncé et démontré ce théorème dans le tome LIII, cahier 2 du *Journal* de Crelle. M. Prouhet et aussi M. Moutard sont parvenus chacun spontanément à la même démonstration que M. Kronecker. C'est par erreur qu'on lit à la page 178 le nom de M. Hermite.

PRINCIPES DE DISCUSSION DES SURFACES ET DES LIGNES DU SECOND DEGRÉ.

Surfaces.

1. *Notation.* On prend les coordonnées *quadrilittères* $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ afin de rendre l'équation homogène.

On donne des indices à chaque coefficient, de sorte que l'indice fait connaître le terme que le coefficient affecte, par exemple $a_{pq}\,x_p\,x_q$, et l'on pose

$$a_{pq} = a_{qp}.$$

2. Théorème de Jerrard (*). *Une fonction homogène quadratique de* n *variables est la somme de carrés de* n *fonctions linéaires de ces variables.*

Théorème fondamental. (*Voir* Serret, *Algèbre supérieure,* note V, et *Nouvelles Annales,* t. XIV, p. 279.)

3. *Formes réduites.* On déduit immédiatement de ce théorème les cas suivants; la surface représente :

1°. Deux plans qui se coupent ou ne se coupent pas;

2°. Une droite;

3°. Un point;

4°. Un ellipsoïde imaginaire.

4. *Position d'un point relativement à la surface.* Le même théorème donne la solution de ce problème *fondamental :*

(*) Auteur de *Analytical Researches, etc.*, un des deux examinateurs pour les mathématiques à l'université de Londres. Feu son frère était membre du sénat de cette université.

Étant données les coordonnées d'un point, déterminer s'il est hors *de la surface ou dans l'intérieur de la surface.*

L'équation indique si le point est sur la surface.

5. *Centre.* On égale à zéro les quatre dérivées de l'équation prises respectivement par rapport aux quatre coordonnées. Les valeurs de quatre de ces équations sont les coordonnées du centre.

6. *Déterminant.* Le dénominateur commun de ces quatre valeurs est désigné sous le nom de *déterminant* de la surface, parce qu'il en détermine la forme.

7. *Surface réglée.* On peut établir les relations qui doivent exister entre les coefficients pour qu'on puisse tracer des droites sur la surface.

8. *Déterminant nul. Centre à l'infini.*

1°. Paraboloïde hyperbolique, lorsque la surface est réglée;

2°. Paraboloïde elliptique, lorsque la surface n'est pas réglée.

9. *Déterminant qui n'est pas nul.* Centre à distance finie de l'origine.

Appliquons aux coordonnées du centre la solution du problème 4.

A. *Centre au dehors.*

1°. Hyperboloïde à une nappe, la surface étant réglée;

2°. Hyperboloïde à deux nappes, la surface n'étant pas réglée.

B. *Centre sur la surface.*

Un cône; et comme cas particulier un cylindre; centre multiple.

C. *Centre à l'intérieur.*

Ellipsoïde.

Lignes.

10. On prend les coordonnées *trilittères* $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$; le reste comme pour les surfaces.

11. Dans l'état actuel de la science, telle est la méthode à suivre quand on a pour but la *science*. Si, au contraire, on a pour but les *examens*, la méthode peut encore convenir. Il suffit de remplacer la quatrième coordonnée par l'*unité* et les coefficients à *indices* par les coefficients vulgairement employés.

SOLUTION DE LA QUESTION 389

(voir page 184);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Soit

$$(a)\qquad (x + x^{-1})^r = x^r + A_1 x^{r-2} + A_2 x^{r-4} + \ldots + A_2 x^{-(r-4)} + A_1 x^{-(r-2)} + x^{-r},$$

les A désignent les coefficients binomiaux.

Si l'on élève le deuxième membre au carré, le terme indépendant de x sera évidemment

$$2(1 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots),$$

on aura donc

$$\Sigma A_i^2 = \text{le coefficient moyen de } (x + x^{-1})^{2r}$$
$$= \frac{2r.2r-1\ldots r+1}{1.2\ldots r} = \frac{2r!}{(r!)^2}.$$

On peut trouver d'autres relations en cherchant le coef-

ficient d'une puissance déterminée de x dans le carré du second membre de (a) et le comparant au coefficient de la même puissance de x dans $(x+x^{-1})^{2r}$. On fournirait encore d'autres relations en élevant les deux membres de (a) à une puissance indéterminée ou en multipliant cette même équation par d'autres équations analogues où l'on changerait r en d'autres indéterminées.

SOLUTION DE LA QUESTION 374

(voir p. 178);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Les déterminants

$$u = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

s'annulent pour

$$x = \alpha,$$
$$y = \beta,$$
$$z = \gamma,$$

et pour

$$x = \alpha',$$
$$y = \beta',$$
$$z = \gamma',$$

à cause de l'identité de deux lignes dans chacun d'eux pour chacune de ces substitutions.

La conique

$$uw - v^2 = 0$$

passe donc par les deux points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$. Comme

$$u = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} ax + by + cz & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & b & c \end{vmatrix}$$

au point commun à la conique et à la droite

$$ax + by + cz = 0\,(^*),$$

on a

$$u_1 = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a^2 + b^2 + c^2 & b & c \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & \beta' & \gamma' \\ a^2 + b^2 + c^2 & b & c \end{vmatrix}$$

$$v_1 = \frac{s}{a}\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ou

$$au_1 = Ay - Bz,$$
$$aw_1 = A'y - B'z,$$
$$av_1 = sCy - sDz,$$

en faisant

$$A = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta + c\gamma & \gamma \\ a^2 + b^2 + c^2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & \gamma \\ a^2 + b^2 & c \end{vmatrix}$$

$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

En exprimant que l'équation

$$u_1 w_1 - v_1^2 = 0$$

est décomposable en deux facteurs linéaires en y et z, on a

$$(AB' - BA')^2 = 4s^2(CB' - DA')(AD - BC),$$

(*) Sur la page 178 il faut remplacer λ, μ, ν par a, b, c.

ce qui, par la règle de multiplication des déterminants, se réduit en supprimant un facteur commun a^2 et extrayant la racine carrée

$$(a^2+b^2+c^2)\,\mathrm{I} = \pm 2s\sqrt{(a\alpha+b\beta+c\gamma)(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')\,\mathrm{I}},$$

où

$$\mathrm{I} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Pour que la droite soit tangente, il faut donc que

$$\mathrm{I} = 0$$

et s sera indéterminé, ou, si I n'est pas nul, que

$$2s = \frac{a^2+b^2+c^2}{\pm\sqrt{(a\alpha+b\beta+c\gamma)(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')}}.$$

Une proposition analogue doit avoir lieu pour la surface du troisième ordre $uwv - t^3 = 0$, où

$$u = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad t = s\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix}$$

et le plan $ax + by + cz + du = 0$.

GEOMÉTRIE ALGORITHMIQUE.

1. Selon Kant, selon ce philosophe par excellence, car il n'est pas rhéteur (*), un jugement est *synthétique* lorsqu'il réunit deux idées dont l'une n'est pas une conséquence *nécessaire* de l'autre. Par exemple, *un corps est pesant* est une proposition *synthétique*. On *ajoute* (συντιθημι) au corps une qualité qui n'est pas renfermée dans l'idée du corps : on peut concevoir une substance non pesante; tandis que cette autre proposition, *un corps est étendu*, est un jugement *analytique*. L'idée de l'étendue est déjà comprise dans celle du *corps*; on l'en *détache* seulement (αναλυω). Or le but de toute science est de *connaître*, de trouver ce qui est inconnu. Il y a pour cela deux moyens : ou l'on réunit des idées connues pour en former une idée complexe qui était inconnue : c'est procéder par *synthèse*; ou bien on décompose l'idée complexe inconnue en idées simples connues : c'est procéder par *analyse*. Supposons qu'un homme se trouvant en A demande le chemin pour aller à l'endroit B; on peut lui indiquer, partant de A, tous les endroits par lesquels il doit successivement passer pour arriver à B : c'est la route *synthétique*; on peut aussi lui indiquer les endroits qui mènent de B vers A : c'est la route *analytique*. La première route est la plus naturelle lorsqu'elle mène au but : aussi c'est celle qui est la plus anciennement suivie; mais on n'est pas toujours sûr qu'elle mènera au but, car on ne

(*) Nos philosophes actuels visent à l'éloquence, considérant la philosophie comme une branche de la littérature et non comme une science. Les remarquables ouvrages du P. Gratry ne sont pas exempts de ce défaut.

sait quelle direction prendre; tandis que la route analytique, dès qu'on aboutit à un endroit connu, n'importe lequel, atteint son but.

Les *treize livres des Éléments* sont un chef-d'œuvre de synthèse.

Euclide (— 385), platonicien, voulait probablement rendre accessibles les écrits de son maître et particulièrement le *Timée,* où il est souvent question des polyèdres réguliers (*). Car, chose qui parait singulière aujourd'hui, les anciens philosophes étaient géomètres. Euclide, partant des idées les plus simples, généralement admises sur l'espace, ajoutant, *synthétisant* vérités sur vérités, parvient au XIII[e] livre à l'idée complexe des polyèdres réguliers et démontre les propriétés mentionnées dans le *Timée.* On n'y rencontre aucune évaluation soit d'aires, soit de volumes; c'était étranger au sujet. Il suffit d'un examen superficiel sur le contenu et la forme du XIV[e] et du XV[e] livre pour se convaincre qu'ils ne peuvent être d'Euclide. On les attribue à Hypsicle (— 230).

La *Mécanique* de Lagrange est un chef-d'œuvre d'analyse. Il décompose l'idée des *vitesses virtuelles* et en déduit tout ce qu'il est possible de savoir sur le mouvement et ses diverses causes. Toutefois, c'est une grande erreur de croire que jamais Euclide ne fait usage d'analyse et jamais Lagrange de synthèse. C'est une impossibilité logique; mais comme la synthèse domine dans la géométrie et l'analyse dans l'algèbre, chacune de ces sciences a été désignée par sa partie dominante. On a donné le nom de *géométrie analytique* à l'emploi de l'instrument algébrique pour découvrir les propriétés de l'espace. Cette dénomination a le défaut d'être trop ab-

---

(*) C'est l'opinion très-plausible de Dounot, estimé de Descartes, le plus intelligent des premiers traducteurs en français d'Euclide (1613).

solue, trop exclusive. Aussi un mathématicien qui joignit à un vaste savoir un grand fonds de charlatanisme et qui a souillé à dessein ses œuvres les plus considérables d'une obscurité calculée, d'une profondeur factice, Wronski, substitue à cette dénomination celle de *géomémétrie algorithmique*. Dans un Rapport sur un Mémoire de Wronski, Lagrange et Lacroix ont loué et approuvé cette locution. Elle est en effet très-caractéristique et fait ressortir la différence fondamentale entre la géométrie d'Euclide et celle de Descartes. Dans la première, les figures sont *tracées*, l'œil extérieur suit toujours les mouvements de l'œil intérieur; tandis que dans la seconde, les figures sont présentées par des signes et ce n'est guère qu'à la fin du procédé logique que l'œil intervient pour opérer *les constructions :* un procédé est graphique et l'autre est purement signalétique, en d'autres termes, purement algorithmique. L'instrument se compose d'*équations* dont le maniement est souvent très-pénible, surtout quand il s'agit d'opérer des éliminations. Dans ces derniers temps, les équations elles-mêmes étant présentées par des *signes*, l'algorithmie géométrique a été considérablement perfectionnée. La combinaison de ces signes, qui se fait pour ainsi dire à vue, amène avec une facilité étonnante des théorèmes d'une extrême généralité et qu'il serait très-pénible d'aborder directement, même en s'aidant de la géométrie graphique. Cette nouvelle algorithmie est exposée avec une grande lucidité, d'une manière très-élémentaire, dans l'ouvrage suivant :

A Treatise of conic Sections, containing on account of some of the most important modern algebraic and geometric methods, by the rev. Georg. Salmon. Second edition, revised and enlarged. Dublin, MDCCCL (*) :

(*) Il existe une troisième édition que nous ne connaissons pas

Traité des Sections coniques, où l'on rend compte de quelques-unes des plus importantes méthodes modernes, algébriques et géométriques; par le rév. Georg. Salmon. Dublin, 1850; in-8 de 343 pages.

Nous allons donner un spécimen de ces méthodes.

2. Soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

l'équation d'une droite; axes rectangulaires; p est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite; α l'angle que fait cette perpendiculaire avec la partie positive de l'axe des x. Nous représentons cette équation par

$$\alpha = 0;$$

de même

$$\beta = 0$$

est l'équation

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0$$

d'une autre droite, etc.

x_1, y_1 étant les coordonnées d'un point, nous désignerons par α_1 l'expression

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p.$$

Il est facile de voir que cette expression est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point $x_1 y_1$ sur la droite $\alpha = 0$; le point $\alpha\beta$ est l'intersection des droites α, β.

3. Soit le triangle ABC :

$\alpha = 0$ équation du côté BC,
$\beta = 0$ — AC,
$\gamma = 0$ — AB;

$$\alpha + l\beta = 0,$$
$$\beta + m\gamma = 0,$$
$$\gamma + n\alpha = 0,$$

sont évidemment les équations de droites passant respectivement par les sommets C, A, B; lorsque l'on a la relation

$$(1) \qquad 1 + lmn = 0,$$

les trois droites passent par le même point; car une de ces équations est alors la conséquence des deux autres. Une au moins des trois quantités doit être négative. Prenons un point quelconque $x_1 y_1$ sur la droite

$$\alpha + l\beta = 0,$$

on a

$$l = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Au rapport $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ on peut substituer le rapport entre les sinus des angles que fait la droite $\alpha + \lambda\beta$ avec les côtés α et β; de même pour les deux autres droites. On voit d'après cela que les trois bissectrices, les trois médianes, les trois hauteurs satisfont à l'équation (1); donc dans chacun de ces systèmes les trois droites se coupent au même point.

On déduit aussi facilement les propriétés segmentaires.

4. *Bissectrices*. L'équation d'une bissectrice intérieure est

$$\alpha - \beta = 0$$

et celle d'une bissectrice extérieure

$$\alpha + \beta = 0;$$

les quatre droites α, $\alpha - \beta$, β, $\alpha + \beta$ forment un faisceau *harmonique*.

5. *Rapport anharmonique*. Soient

$$\alpha - l_1\beta = 0,$$
$$\alpha - l_2\beta = 0,$$
$$\alpha - l_3\beta = 0,$$
$$\alpha - l_4\beta = 0,$$

les équations des quatre rayons d'un faisceau;

$$\frac{(l_4 - l_2)(l_3 - l_1)}{(l_4 - l_3)(l_2 - l_1)}$$

est le rapport *anharmonique* du faisceau. Il suffit pour s'en convaincre de couper le faisceau par une droite parallèle à l'axe des x. Si ce rapport est égal à -1, il devient *harmonique*.

6. Menons dans le triangle ABC les transversales

CF coupant AB en F,
BE — AC en E,
AD — BC en D,

et supposons que les trois transversales se rencontrent au *même* point O.

Soient

L le point d'intersection de FE et de BC,
M — DF — AC,
N — DE — AB,

on aura

$$l\alpha - m\beta = 0 \quad \text{équation de CF},$$
$$m\beta - n\gamma = 0 \quad — \quad \text{AD},$$
$$n\gamma - l\alpha = 0 \quad — \quad \text{BE},$$
$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0 \quad — \quad \text{EF},$$
$$l\alpha - m\beta + n\gamma = 0 \quad — \quad \text{DF},$$
$$l\alpha + m\beta - n\gamma = 0 \quad — \quad \text{DE};$$

ajoutant les trois dernières équations, on obtient

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

équation d'une droite qui passe par les trois points L, M, N; donc ces trois points sont en ligne droite.

Les quatre droites EN, EA, EF, EB forment un faisceau harmonique, car elles ont pour équations

$$l\alpha + m\beta - n\gamma = 0, \quad \beta = 0,$$
$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0, \quad n\gamma - l\alpha = 0,$$

. . . .

7. Théorème. Soient les deux triangles ABC, A′B′C′. Soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations respectives des côtés BC, AC, AB;

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

les équations respectives des côtés B′C′, A′C′, A′B′.

Si l'on a les trois relations

$$a\alpha + a'\alpha' = b\beta + b'\beta' = c\gamma + c'\gamma' = 0,$$

les intersections AB, A′B′; BC, B′C′; AC, A′C′ sont en ligne droite. On en déduit que les droites AA′, BB′, CC′ passent par le même point, et réciproquement.

Si les trois perpendiculaires abaissées de A sur B′C′, de B sur A′C′, de C sur A′B′ se coupent en un même point, les trois perpendiculaires abaissées de A′ sur BC, de B′ sur AC; de C′ sur BC se coupent aussi en un même point.

Cercle.

8. Théorème. *Soient*

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations des trois côtés du triangle ABC, *le cercle circonscrit a pour équation*

$$\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = 0.$$

Démonstration.

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$$

est l'équation d'une conique passant par les trois sommets A, B, C, et remplaçant α, β, γ par les équations que ces lettres représentent, on trouve, pour que la conique représente un cercle,

$$l = \sin A, \quad m = \sin B, \quad n = \sin C.$$

Observation. $\alpha_1\beta_1 \sin C + \beta_1\gamma_1 \sin A + \gamma_1 \sin A'$ est le double de l'aire du triangle ayant pour sommets les pieds des trois perpendiculaires abaissées du point x_1, y_1 sur les trois côtés du triangle; l'équation exprime que cette aire s'annule lorsque le point x_1, y_1 est sur la circonférence, c'est-à-dire que les trois pieds sont en ligne droite.

9. L'équation du cercle étant

$$\gamma(\beta \sin A + \alpha \sin B) + \alpha\beta \sin C = 0,$$

montre que la droite

$$\beta \sin A + \alpha \sin B = 0$$

touche le cercle au point C; de même

$$\beta \sin C + \gamma \sin B = 0$$

touche le cercle au point A;

$$\gamma \sin A + \alpha \sin C = 0$$

touche le cercle au point B.

Ces équations montrent intuitivement que les points où les tangentes rencontrent les côtés respectivement opposés du triangle ABC sont en ligne droite.

10. *Lemme.* Soit un triangle formé par deux tangentes à un cercle et par la corde qui joint les points de contact; la distance de chaque point du cercle à la corde est une moyenne proportionnelle géométrique entre le

rectangle des distances du même point aux deux tangentes.

11. Théorème. *Le cercle inscrit au triangle* ABC *a pour équation*

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A + \beta^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}B + \gamma^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}C = 0.$$

Démonstration. Soient A′, B′, C′ les sommets des points de contact situés respectivement sur les côtés BC, AC, AB, et

$$\alpha' = 0,\quad \beta' = 0,\quad \gamma' = 0$$

les équations des côtés B′C′, A′C′, A′B′; l'équation du cercle inscrit à ABC, mais circonscrit à A′B′C′, est

$$\alpha'\beta'\sin C' + \beta'\gamma'\sin A' + \gamma'\alpha'\sin B' = 0.$$

Or, d'après le lemme,

$$\alpha'^2 = \beta\gamma,\quad \beta'^2 = \gamma\alpha,\quad \gamma'^2 = \alpha\beta$$

et

$$C' = 90^\circ - \frac{1}{2}C,\quad A' = 90^\circ - \frac{1}{2}A \quad\text{et}\quad B' = 90^\circ - \frac{1}{2}B;$$

donc l'équation du cercle inscrit est

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A + \beta^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}B + \gamma^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}C = 0.$$

Observation. L'équation d'une conique inscrite dans le triangle ABC est en général

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\alpha\gamma - 2ml\alpha\beta = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(l\alpha)^{\frac{1}{2}} + (m\beta)^{\frac{1}{2}} + (n\gamma)^{\frac{1}{2}} = 0;$$

pour le cercle inscrit, on a

$$l = \cos^2 \frac{1}{2} A, \quad m = \cos^2 \frac{1}{2} B, \quad n = \cos^2 \frac{1}{2} C.$$

Nous reviendrons souvent sur cet ouvrage *hors ligne* qui est devenu classique en Angleterre et qui mérite cette distinction partout. Un éditeur intelligent rendrait service au pays par l'importation d'un produit qui nous manque complétement, et, hâtons-nous de le dire, un produit qui n'est pas contraire aux Programmes.

SUR UN THÉORÈME DE M. TCHEBICHEF;

PAR M. ALLEGRET,
Professeur.

Le théorème énoncé par M. de Tchebichef (*) sous le n° **343**, t. XV, p. 353, est démontré, ainsi que plusieurs autres beaucoup plus généraux, au tome XI des *Nouvelles Annales*, p. 422 et 423, dans un intéressant article de M. Lebesgue.

On pourra démontrer, en suivant la même marche, ce théorème négatif :

Si un nombre premier p est de la forme

$$p = 2^{2^\lambda} . n + 1,$$

n désignant un nombre impair, ce nombre n n'est ni une racine primitive de p ni congru à la puissance $n^{ième}$ d'une racine primitive quelconque de p. (On suppose l'exposant entier $\lambda > 0$.)

Je ferai observer que la question résolue par Leonardo

(*) Prononcez Tchebichof.

Pisano (voir *Bulletin*, p. 42, 1856) a été traitée par Diophante, livre I, prop. XXVII et XXVIII. Le problème peut être facilement généralisé et étendu à un nombre quelconque d'inconnues.

SUR LE POLYGONE RÉGULIER DE DIX-SEPT COTÉS ;

PAR M. JULES HOÜEL,
Docteur ès Sciences.

Dans le tome II des *Nouvelles Annales*, p. 390, il est fait mention d'une construction donnée par M. de Staudt dans le *Journal* de Crelle, pour le polygone régulier de dix-sept côtés. Voici la traduction du texte très-défectueux comme j'ai cru pouvoir le rétablir.

Menez deux diamètres rectangulaires AB, CD, et par les points D, A, C les tangentes DS, AS, Cc ; portez sur Cc, dans le même sens à partir de C, les longueurs $Cc = 2\,AB$, $Ck = 8\,AB$, et tirez Sc, Sk qui coupent, la première le diamètre CD en d, la seconde la circonférence en E, E_1. Par les points e, e_1 où les cordes CE, CE_1 prolongées rencontrent la tangente menée par D, tirez les droites eF, dF_1, e_1F_1, dF_3 qui coupent la circonférence en F, F_1, F_2, F_3. Soient f, f_1, f_2, f_3 les points où les droites DF, DF_1, DF_2, DF_3 coupent la tangente menée par C, et g, g_1, g_2, g_3 les intersections du diamètre CD avec les cordes Sf, Sf_1, Sf_2, Sf_3. Les droites fg_1, f_1g_2, f_2g_3, f_3g couperont la circonférence en huit points tous situés sur le demi-cercle ADB. Enfin, joignons ces huit points au point C, et par les points h_1, h_2, h_3, etc., où ces cordes rencontrent le diamètre AB, élevons sur AB les perpendiculaires A_1A_{16}, A_2A_{15}, A_3A_{14}, etc. La fi-

gure $AA_1 A_2, \ldots, A_{14} A_{15} A_{16}$ sera un heptadécagone régulier.

Quant à la démonstration, je n'ai pas entrepris de la trouver.

Note du Rédacteur. La très-bonne figure jointe à cet écrit ayant besoin d'être *réduite*, nous la supprimons. La description est si claire, que chaque géomètre peut tracer ou faire tracer la figure. Toutefois, si l'on réclame, nous la donnerons plus tard.

QUESTIONS

(voir p. 184).

391. Construire le pentagone ABCDE, connaissant les côtés EA, AB, BC, les diagonales AD, BD, l'angle D et le rapport des côtés DC, DE. (Prouhet.)

392. Si l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

est de degré *pair* et si ses racines peuvent se partager en couples donnant la même somme $2s$, l'équation

$$(2) \qquad f'(x) = 0$$

admettra la racine s et ses autres racines se partageront en couples donnant la même somme $2s$.

Si l'équation (1) est de degré *impair*, ayant une racine égale à s et toutes ses autres racines pouvant se partager en couples dont la somme égale $2s$, les racines de l'équation (2) se partageront aussi par couples donnant la même somme $2s$.

Dans le premier cas, les équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\text{v}}(x) = 0, \ldots,$$

et dans le second les équations

$$f(x)=0,\quad f''(x)=0,\quad f^{\text{IV}}(x)=0,\ldots,$$

auront en commun la racine s. (PROUHET.)

393. *Théorème.* Etant donnée une parabole ABCDE du troisième ordre, représentée par

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3;$$

on fait passer, par les extrémités A, C, E de trois ordonnées équidistantes y_0, y_1, y_2, la parabole du second ordre dont l'équation aurait la forme

$$y = \text{A} + \text{B}x + \text{C}x^2.$$

Ces deux courbes déterminent deux segments curvilignes ABCA, CDEC équivalents entre eux.

Corollaire I. L'aire comprise entre la première courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes y_0, y_2, est donnée par la formule

$$\text{A} = \frac{1}{3}\delta(y_0 + y_2 + 4y_1)\ (*).$$

Corollaire II. La formule de quadrature de Simpson, appliquée à la parabole du troisième ordre, est toujours *exacte*, même quand le nombre des valeurs de l'ordonnée se réduit à *trois*. (E. CATALAN.)

394. Dans une conique, le rapport *anharmonique* du faisceau de quatre diamètres est égal au rapport anharmonique de quatre diamètres respectivement conjugués. (SALMON.)

395. La polaire réciproque d'un cercle, relativement à

(*) δ est l'intervalle de deux ordonnées consécutives.

un cercle de centre O, est une conique ayant pour foyer O et pour directrice la polaire de O relativement au cercle donné, et $\frac{d}{r}$ pour rapport focal; d égale la distance des centres et r le rayon du cercle donné.

PROBLÈME COMBINATOIRE SUR DES PLANS PASSANT PAR UN SYSTÈME DE POINTS;

PAR M. JULES BOURDIN,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Etant donnés dans l'espace m points dont quatre ne sont pas dans le même plan, trouver le nombre des points nouveaux qui résultent de l'intersection des plans qu'on peut mener par les points donnés.

Le nombre des plans différents qui peuvent passer par les m points pris trois à trois, est donné par la formule

$$C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Les intersections de ces plans trois à trois, s'ils étaient quelconques, seraient données, en représentant par M le nombre des plans, par la formule analogue

$$\frac{M(M-1)(M-2)}{1.2.3}. \tag{1}$$

Mais ces plans ont été menés par les m points donnés; la formule (1) énumère outre les points cherchés : 1° les points donnés, 2° des droites passant par les points donnés, 3° des points multiples.

De là trois corrections à faire subir à la formule (1), si

l'on ne veut obtenir que les points nouveaux et ne compter chacun qu'une seule fois.

Première correction.

Par un des points donnés il passe autant de plans qu'on peut mener de droites par les $(m-1)$ points restants, c'est-à-dire $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$. Je désigne ce nombre par N; si je prends maintenant toutes les combinaisons de ces N points trois à trois, j'aurai le nombre des intersections qui se confondent avec le point donné. Ce nombre est $\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$, la première correction sera donc

$$-m\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}.$$

Deuxième correction.

Il est à remarquer que dans le cas général pour qu'il passe plus de deux plans par une même droite, il faut que cette droite joigne deux des points donnés, a et b par exemple; la droite ab est alors l'intersection commune de $(m-2)$ plans dont les combinaisons trois à trois

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

sont comprises dans la formule, mais qui par la première correction ont été retranchées comme se confondant avec le point donné a; ces mêmes combinaisons ont également été retranchées comme se confondant avec le point b; il faudra donc comme deuxième correction ajouter le nombre

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}$$

autant de fois qu'on peut mener de droites par les m points

donnés, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1.2}$ fois. La deuxième correction est donc

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\times\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3},$$

ou, en multipliant et divisant par 10,

$$+10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}.$$

Troisième correction.

Nous avons vu plus haut que les droites qui joignent les points donnés deux à deux étaient les seules qui fussent formées par l'intersection de plus de deux plans. Les points multiples, c'est-à-dire ceux qui donnent les intersections de plus de trois plans, se trouveront donc par l'intersection de ces droites avec les plans menés par les $(m-2)$ points étrangers à la droite, pris trois à trois, et dont le nombre sera

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}.$$

On voit ainsi qu'il y aura sur chacune des $\frac{m(m-1)}{1.2}$ droites qui joignent les points deux à deux,

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}$$

points cherchés et qui chacun auront été comptés par la formule (1) autant de fois qu'il y a de combinaisons deux à deux des $(m-2)$ plans qui forment une droite, c'est-à-dire $\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}$ fois. La troisième et dernière correc-

tion sera donc

$$-\frac{m(m-1)}{1.2}$$

$$\times\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right],$$

ou, en multipliant et divisant par 10,

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right].$$

Le nombre des points cherchés sera donc compris dans la formule

$$\frac{M(M-1)(M-2)}{1.2.3}-m\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$$

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-2\right],$$

en posant

$$M=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

et

$$N=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}.$$

Note. Ce problème a déjà été traité dans le *Journal* de M. Liouville, t. V, p. 264, mais on n'a pas eu égard à la première et à la troisième correction.

NOTE SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON.

Si $F(x)$ représente une fonction algébrique entière dont le degré ne soit pas supérieur au nombre entier m, et qui prenne les $(m+1)$ valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}, u_{m-1}, u_m$ lorsqu'on y remplace la variable x par les $m+1$ valeurs différentes $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m$, on sait que

$$\begin{aligned}
F(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{m-1})(x_0-x_m)}u_0 \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x_1-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{m-1})(x_1-x_m)}u_1 + \ldots \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_m)}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\ldots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)}u_{m-1} \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-2})(x_m-x_{m-1})}u_m.
\end{aligned}$$

C'est la formule d'interpolation de Lagrange.

Nous allons établir, au moyen de cette formule, un principe qui nous sera utile; en voici l'énoncé :

Soit $f(x)$ le produit des $(m+1)$ facteurs consécutifs $x, (x+1), (x+2), \ldots, (x+m-1), (x+m)$; on aura, pour toute valeur de x,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
& 1.2.3\ldots(m-1)m = \frac{f(x)}{x} - m\cdot\frac{f(x)}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{f(x)}{x+2} \\
& - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{f(x)}{x+3} + \ldots \\
& \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{f(x)}{x+p} \mp \ldots \mp m\cdot\frac{f(x)}{x+m-1} \pm \frac{f(x)}{x+m}.
\end{aligned}\right.$$

Par exemple, on a, quelle que soit la valeur de x,

$$1.2.3 = (x+1)(x+2)(x+3) - 3x(x+2)(x+3) + 3x(x+1)(x+3) - x(x+1)(x+2),$$

comme on peut le reconnaître par un calcul très-simple.

Pour établir d'une manière générale l'égalité (1), proposons-nous de déterminer une fonction algébrique entière $\varphi(x)$ qui soit, au plus, du degré m et qui prenne les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m$, lorsqu'on y remplacera la variable x par $0, -1, -2, \ldots, -(m-1), -m$. La formule d'interpolation de Lagrange donne immédiatement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) = {} & \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)(x+m)}{1.2\ldots(m-1).m} u_0 \\ & - \frac{x(x+2)\ldots(x+m-1)(x+m)}{1.1\ldots(m-2)(m-1)} u_1 + \ldots \\ & \pm \frac{x(x+1)\ldots(x+p-1)(x+p+1)\ldots(x+m-1)(x+m)}{p(p-1)\ldots1.1\ldots(m-p-1)(m-p)} u_p \mp \ldots \\ & \mp \frac{x(x+1)\ldots(x+m-2)(x+m)}{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots1.1} u_{m-1} \\ & \pm \frac{x(x+1)\ldots(x+m-2)(x+m-1)}{m.(m-1)\ldots2.1} u_m. \end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs évident que, quelles que soient les valeurs supposées à $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m$, la fonction précédente prend ces valeurs lorsque l'on remplace x par $0, -1, -2, \ldots, (m-1), -m$. Or, si l'on suppose que chacun des nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m$ est égal au produit $1.2.3\ldots(m-1)m$, l'égalité (2) deviendra

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} - m \cdot \frac{f(x)}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{f(x)}{x+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{f(x)}{x+3} - \ldots$$
$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{f(x)}{x+p} \mp \ldots \mp m \cdot \frac{f(x)}{x+m-1} \pm \frac{f(x)}{x+m};$$

et il est facile de reconnaître que le premier membre $\varphi(x)$ est la quantité constante $1.2.3\ldots(m-1)m$. Car, s'il en était autrement, l'équation

$$\varphi(x) - 1.2.3.(m-1)m = 0,$$

qui ne peut être d'un degré supérieur à m, admettrait les $(m+1)$ racines $0, -1, -2, \ldots, (m-1), -m$, puisqu'en remplaçant x par chacune de ces dernières valeurs, $\varphi(x)$ devient égal au produit $1.2.3\ldots(m-1)m$. On voit donc que l'égalité (1) a lieu pour toute valeur de x: c'est ce qu'il fallait démontrer. G.

La fin au prochain numéro.

SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE;

PAR M. LEBESGUE.

Soient a, b, c les côtés, A, B, C les angles et S la surface d'un triangle sphérique. L'équation

$$S = A + B + C - \pi$$

donne d'abord

$$\cos\frac{S}{2} = \sin\left(\frac{A+B+C}{2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{c}{2} + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{c}{2};$$

simplifiant par les valeurs de sin et cos de $\frac{A+B}{2}$, formule de Delambre, il vient d'abord

$$(1) \qquad \cos\frac{S}{2} = \frac{1}{\cos\frac{c}{2}}\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C\right),$$

puis, en éliminant $\cos C$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{S}{2} &= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \\ &= \frac{\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Or on a

$$1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a \cos b \cos c$$

et

$$-1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

égaux respectivement à

$$4\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right),$$

$$4\cos c\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b-c}{2}\right).$$

Il résulte de là que

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}^2\frac{S}{4} &= \frac{1-\cos\frac{S}{2}}{1+\cos\frac{S}{2}} \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{a+b+c}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{-a+b+c}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{a-b+c}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{a+b-c}{4}\right); \end{aligned}\right.$$

c'est la formule de Lhuilier.

Si l'on représente par α, β, γ les arcs de grand cercle qui unissent les milieux des côtés a, b, c, on déduit de l'équation (1), à cause de

$$\cos\gamma = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C,$$

les suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos\gamma = \cos\frac{S}{2}\cos\frac{c}{2}, \\ \cos\beta = \cos\frac{S}{2}\cos\frac{b}{2}, \\ \cos\alpha = \cos\frac{S}{2}\cos\frac{a}{2}. \end{cases}$$

Si nous représentons par A′, B′, C′ les milieux des côtés a, b, c, on sait que le volume V′ du parallélipipède, dont les deux arêtes contiguës sont OA′, OB′, OC′ (O étant le centre de la sphère), est donné par l'équation

$$\begin{aligned} V'^2 &= 1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &= 1 - \cos^2\frac{S}{2}\left(\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2}\right) \\ &\quad + 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos^3\frac{S}{2}. \end{aligned}$$

Mais l'équation (2) donne

$$\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{S}{2} = 1;$$

de sorte qu'on a

$$(5)\qquad V'^2 = 1 - \cos^2\frac{S}{2} = \sin^2\frac{S}{2} \quad \text{ou} \quad V' = \sin\frac{S}{2}.$$

Ce théorème est de M. Cornélius Keogh, qui a fait d'ingénieuses recherches sur la trigonométrie.

Cette expression du volume V′ montre bien que le nom de sinus de l'angle solide OA′B′C′ donné à V′ est mal choisi. Il a été employé par M. Staudt, avec lequel M. Keogh s'est rencontré dans des recherches relatives aux polygones.

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE,

Du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques.

Applications à la détermination du centre de courbure des coniques;

Par M. MANNHEIM.

---

1. Soient o_1 et o_2 (*) deux circonférences se coupant aux points c, f. Par le point c, menons une droite arbitraire qui coupe la circonférence o_1 au point a et la circonférence o_2 au point b; sur ab, construisons un triangle abd semblable à un triangle donné : *le lieu décrit par le point* d *lorsque la droite* ab *tourne autour du point* c, *est une circonférence* o_3 *passant par le point* f (**).

2. Au point a menons la tangente T_1 à la circonférence o_1 et au point b la tangente T_2 à la circonférence o_2. T_1 et T_2 se coupent au point i; la circonférence aib passe par le point f. En menant au point d la tangente T_3 à la circonférence o_3, on obtiendra de même deux autres circonférences se coupant en f.

3. Dans le cas particulier où le point d est en d_1 sur ab, de telle façon que $\frac{ad_1}{d_1 b}$ = constante, *le lieu des points*

(*) On est prié de faire la figure. Il est commode de placer le point d de façon que le point f soit à l'intérieur du triangle abd.

(**) Je ne démontre pas ce théorème, que l'on énonce plus complétement de la manière suivante :

Sur les droites telles que ab *on construit des figures semblables à une figure donnée, les points homologues décrivent des circonférences passant par le point* f, *les côtés homologues tournent autour de points fixes.*

d_1 *est la circonférence* o_4 *passant en* c *et en* f (*).

Observation. Nous conserverons toujours d pour le cas général et d_1 pour le cas particulier.

4. T_4 étant la tangente en d_1 à la circonférence o_4, le point f est commun aux circonférences circonscrites aux quatre triangles déterminés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab.

Cette remarque permet de résoudre la question suivante :

5. *Pour un mouvement infiniment petit d'une droite* ab, *le point* a *parcourt un élément d'une droite* T_1, *le point* b *un élément d'une droite* T_2, *le point* d_1, *qui partage* ab *dans un rapport constant, un élément d'une droite* T_4 ; *on demande autour de quel point la droite* ab *a tourné.*

On détermine le point f en circonscrivant des circonférences aux quatre triangles formés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab ; on décrit une circonférence passant par le point f et tangente en d_1 à la droite T_4 : cette circonférence coupe la droite ab au point cherché.

6. Revenons au cas général (1). Au point a traçons une courbe quelconque L tangente à la circonférence o_1, au point b une courbe quelconque M tangente à o_2, au point c une courbe quelconque H tangente à ab. Lorsque la droite ab se meut en restant tangente à la courbe H, ses extrémités parcourant les courbes L, M, le sommet d du triangle abd construit sur ab et semblable à un triangle

(*) Si l'on transforme cette proposition par la méthode des rayons vecteurs réciproques en prenant le point c pour pôle de transformation, on retrouve une proposition connue. Cette dernière proposition est un cas particulier de celle qui résulte de la transformation de (1), le point c étant toujours pris pour pôle de transformation.

donné, décrit une courbe N dont on obtient la tangente au point d de la manière suivante : Par le point de contact c de ab et de H, on décrit une circonférence o_1 tangente à L au point a, et une circonférence o_2 tangente à M au point b; o_1 coupe ad en e, o_2 coupe bd en g. Les quatre points d, e, f, g sont sur une même circonférence o_3. On mène au point d la tangente T_3 à cette circonférence et l'on a la tangente cherchée.

7. Réciproquement, connaissant T_3, on peut déterminer c en s'appuyant sur ce qu'on a dit plus haut (2).

8. Dans le cas particulier où l'on considère le point d_1 (3), les points e, g se confondent en c, et l'on a la circonférence o_4 passant par les points cfd pour déterminer la tangente T_4 au lieu décrit par le point d_1 (*).

9. Les circonférences o_1, o_2 et o_4 passent par les mêmes deux points c, f.

Dans ces circonférences, les extrémités a', d_1', b' des diamètres qui passent par les points a, d_1, b sont sur une droite ca' perpendiculaire à la droite acb; on a d'après (3)

$$\frac{a'd'_1}{d'_1 b'} = \frac{ad_1}{d_1 b}.$$

Les diamètres aa', bb' sont connus, puisque ce sont les normales aux courbes L, M. On déterminera le point d'_1, et, par suite, $d'\ d_1$ qui est normale à la courbe décrite par d_1 (**).

10. Réciproquement, connaissant T_4, on peut déter-

(*) Pour déterminer T_4, on peut remplacer les courbes L, M par leurs tangentes T_1, T_2; le lieu décrit par le point d_1 est alors une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux droites T_1, T_2; on détermine ces asymptotes, et, par suite, T_4.

(**) Pour un mouvement infiniment petit de ab, les normales aux courbes décrites par tous les points tels que d_1 enveloppent une parabole tangente aux droites ca, ca'.

miner c comme on l'a dit (5) en remplaçant les courbes données par leurs tangentes.

On peut aussi tracer les normales aa', $d_1 d'_1$, bb', puis chercher une droite perpendiculaire à ab qui soit coupée par ces normales aux points a', d'_1, b', de façon que

$$\frac{a' d'_1}{d'_1 b'} = \frac{ad_1}{d_1 b}.$$

Cette droite, qu'il est facile de déterminer, coupe ab au point cherché.

Remarque. Soit j le point de rencontre de aa' et de bb', menons jd'_1 et abaissons du point j une perpendiculaire sur ab; cette perpendiculaire, les droites ja, jb et jd'_1 forment un faisceau dont le rapport anharmonique est $\frac{ad_1}{d_1 b}$.

11. On déduit de la proposition suivante plusieurs constructions pour obtenir le point c.

Problème. *Trois droites* T_1, T_2, T_4 *étant données, on mène une droite* ab *qui coupe* T_1 *au point* a, T_2 *au point* b *et* T_4 *au point* d_1; *on a*

$$\frac{ad_1}{d_1 b} = \text{constante}.$$

On demande l'enveloppe de ab *et le point* c *où elle touche son enveloppe* (Géom. sup., p. 552).

Solution. Soient t et t' les points où T_4 coupe T_1 et T_2. On a

$$\frac{ad_1}{d_1 b} = \frac{ta \sin(T_1, T_4)}{t' b \sin(T_2, T_4)},$$

d'où

$$\frac{ta}{t' b} = \text{constante}.$$

L'enveloppe de ab *est donc une parabole tangente aux trois droites données.*

Pour déterminer c, on a

$$\frac{ac}{cd_1}=\frac{ib}{bt'}, \quad \frac{cd_1}{d_1 b}=\frac{at}{ti}.$$

D'où les constructions suivantes :

1°. Du point d_1 on mène une parallèle à T_2, cette droite coupe tb en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_4 qui coupe ab au point cherché. On a une construction analogue en menant at', etc.

2°. Par le point t on mène une parallèle à ab, par le point a une parallèle à T_2, ces deux droites se coupent en un certain point, la droite qui le joint au point t' coupe ab au point c. De même en menant par le point t' une parallèle à ab, etc.

3°. Par le point b on mène une parallèle à T_4, cette droite coupe id_1 en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_1 qui coupe ab au point c. De même pour le point a, etc.

4°. Par le point b on mène une parallèle à T_1, cette droite coupe at' en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_4 qui coupe ab au point c. De même pour le point a, etc.

Ces constructions, à l'exception de la dernière, donnent T_4 en opérant inversement.

12. Lorsque la courbe L se confond avec H, le point a' est le centre de courbure de la courbe H et la circonférence o_1 est décrite sur le rayon de courbure comme diamètre.

Cette remarque permet de déterminer la tangente au lieu décrit par le sommet de triangles semblables construits sur la portion de tangente comprise entre son point de contact et un point où elle coupe une courbe

quelconque, et, par suite, à la courbe décrite par un point qui partage cette portion de tangente dans un rapport constant. Réciproquement, connaissant cette tangente, on peut déterminer le centre de courbure de la courbe H.

Applications à la recherche des centres de courbure des coniques (*).

13. Soient A et B le grand axe et le petit axe d'une ellipse, o le centre de l'ellipse, m un point quelconque de cette courbe, T et N la tangente et la normale passant en ce point.

T coupe A au point t et B au point t',
N coupe A au point n et B au point n'.

On sait que $\frac{mn}{mn'}$ est constant.

Pour un mouvement infiniment petit de N, n parcourt A, n' parcourt B et m parcourt T; on demande le point autour duquel la droite N a tourné, c'est-à-dire le centre de courbure (5).

Il faut pour cela chercher le point f en circonscrivant des circonférences aux triangles déterminés par les droites A, B, T, N, puis décrire par ce point une circonférence tangente à T au point m; cette circonférence coupe N au point cherché.

Il n'est pas même nécessaire de décrire aucune circonférence. En effet le point f est le point de rencontre de tn' et de $t'n$ comme il est facile de le voir en remarquant que les angles (T, N) et (A, B) sont droits. On joint le point f au point m, on élève fc perpendiculaire à fm, le point

(*) *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure*, in-8 de 84 p.; 1857. M. Ernest Lamarle détermine les centres de courbure par un mouvement de rotation analogue au mouvement de translation de Roberval pour les tangentes. Quel moyen cynématique employer pour les ausculations d'ordre supérieur? TM.

de rencontre c de cette ligne et de N est le centre de courbure cherché.

14. Le point f est le foyer de la parabole tangente aux droites A, B, T, N; l'angle (T, N) étant droit, le point m est un point de la directrice de cette parabole, et, par suite, c est le point où cette courbe touche N.

On peut déduire de là que :

La parabole tangente aux axes d'une ellipse à la tangente et à la normale passant par un point donné touche cette normale au centre de courbure de l'ellipse.

15. La circonférence cfm coupe tn' en f',

$$\widehat{cf'n'} = \widehat{cmf} = \widehat{otn'},$$

donc cf' est parallèle à A, et, par suite, mf' à B, ce qui donne une nouvelle construction du centre de courbure. On peut aussi considérer le point de rencontre f'' de la circonférence cfm et de $t'n$, la droite mf'' est parallèle à A et cf'' à B (*).

16. Par le point n on mène B' parallèle à B; par le point n', A' parallèle à A. Il faut, pour obtenir c (10) mener une droite parallèle à T et qui soit partagée par N, A', B' dans le rapport $\frac{mn}{mn'}$.

La construction se réduit à mener par le point l, intersection de B' et de tn', une parallèle à T. Cette droite coupe N au centre de courbure.

(*) J'étais arrivé depuis longtemps à ce résultat en construisant directement l'abscisse du centre de courbure $\xi = \frac{c^2 x^3}{a^4}$.

Soit q le point où mf'', parallèle à A, coupe B, on a

$$\frac{qf''}{on} = \frac{qm}{ot} \quad \text{ou} \quad \frac{\xi}{\frac{c^2 x}{a^2}} = \frac{x}{\frac{a^2}{x}},$$

d'où etc.

17. Ce que l'on vient de dire (14, 15, 16) peut se conclure du n° 11 ; on peut en outre déterminer c à l'aide des autres constructions indiquées dans ce numéro.

18. A partir du point m sur N je porte $ms = ms' =$ le demi-diamètre conjugué de om.

On sait que os est égal à la demi-somme des axes et que os' est égal à leur demi-différence. Pour un mouvement infiniment petit de N, les points s, s' décrivent des arcs de cercle et le point m, milieu de ss', un élément de T; les normales à ces trois courbes sont os, os' et N. En appliquant la remarque du n° 10, on conclut que oc, os, os' et la perpendiculaire abaissée du point O sur N forment un faisceau harmonique. On a donc

$$\rho = \frac{d^2}{h},$$

en appelant ρ le rayon de courbure mc, h la distance du point o à T et d le demi-diamètre conjugué de om. Cette expression de ρ est connue, nous la retrouverons plus loin comme cas particulier.

19. *Une droite* ab, *corde d'une certaine courbe* N, *détache de cette courbe un segment d'aire constante; on demande, pour une position de* ab, *le centre de courbure de la courbe enveloppée par cette corde.*

Au milieu de ab on élève une perpendiculaire, on prend le milieu de la portion de cette droite comprise entre les points où elle est coupée par les normales menées à la courbe N aux points a, b; ce point milieu est le centre de courbure cherché (12).

Comme cas particulier, on a l'hyperbole lorsque la courbe N se réduit à deux droites.

Voici un autre cas particulier :

Soient une ellipse dont le centre est o (*), m un point de la courbe et T la tangente en ce point. A partir du point m sur T, on porte deux longueurs égales ma, mb. On peut considérer ab comme la corde d'une ellipse semblable à o; la corde détachant un segment d'aire constante, le point m décrit l'ellipse donnée; on peut donc appliquer la construction précédente. Pour obtenir les normales aux points a et b, on opérera de la manière suivante.

Au point a on mène la tangente aa' à l'ellipse donnée, a' est le point de contact, la perpendiculaire abaissée du point a sur ma' est la normale cherchée; de même pour le point b. Les deux normales coupent la normale au point m, etc.

De cette construction, on déduira facilement ce qui suit:

Au point a on mène une parallèle à mb', au point b une parallèle à ma', ces deux droites se coupent en un certain point; H désigne la distance de ce point à T. D étant la longueur ma, on a

$$\rho = \frac{D^2}{H}.$$

Dans le cas particulier où D est égal au demi-paramètre conjugué de om, la construction précédente se simplifie et l'expression du rayon de courbure devient celle qui a été donnée (18).

20. On peut chercher le centre de courbure de la parabole en s'appuyant sur cette propriété que la tangente au sommet partage en deux parties égales la portion de tangente comprise entre la courbe et l'axe.

21. Soit bfc un triangle rectangle mobile et variable dont le sommet de l'angle droit est fixe en f et dont l'hy-

---

(*) On est prié de faire une figure particulière.

poténuse bc est tangente à une circonférence donnée o. Le point c est le point de contact mobile; on demande la normale au lieu décrit par le point b.

Le milieu a de bc décrit une droite, axe radical de f et de o.

A l'aide de cette remarque, on trouvera facilement la construction suivante :

Par le point a on mène une parallèle à fo; cette droite, perpendiculaire à l'axe radical, coupe le rayon oc au point a'. On prolonge oa' d'une longueur égale à elle-même jusqu'en b', bb' est la normale cherchée.

$b'a$ prolongée coupe of au point e et l'on a

$$b'a = ae.$$

Cette remarque nous sera utile.

22. Considérons une conique ayant pour cercle osculateur la circonférence o de la question précédente et pour foyer le point f.

Le point b parcourt la directrice, on connaît donc bb'. bb' coupe la normale co au point b', joignons ce point au point a, milieu de bc, prolongeons $b'a$ d'une longueur égale à elle-même jusqu'en e.

Les droites ef et $b'c$ se coupent au centre de courbure.

On peut facilement transformer cette construction de la manière suivante : Du point c on abaisse une perpendiculaire sur la directrice, au b on élève une perpendiculaire à bc, ces deux droites se coupent en un point d, df coupe la normale co au centre de courbure.

Cette construction est applicable aux trois coniques.

En considérant la seconde directrice, on obtient une nouvelle droite passant par le centre de courbure. On est ainsi conduit à la construction suivante :

On élève une perpendiculaire à la tangente au point où elle coupe l'axe parallèle aux directrices; cette droite

coupe la parallèle cg à l'autre axe au point g. La droite qui joint g au centre de la conique coupe la normale au centre de courbure cherché.

23. Pour terminer, énonçons quelques questions que l'on traitera facilement :

1°. *On donne trois courbes* A, B, C *et un point fixe* o *par lequel on mène une transversale arbitraire qui coupe les courbes aux points* a, b, c; *on prend sur cette transversale un point* d *tel, que* $\frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{ab}} =$ *constante. On demande la tangente au lieu décrit par le point* d (*).

Comme cas particulier, on a la conchoïde du cercle, la cissoïde de Dioclès, etc.

Si la courbe C se réduit au point o et si les lignes A et B sont droites, le rapport $\frac{od}{ab}$ étant 1, le lieu des points d est une hyperbole; on a alors la construction suivante qui nous a été donnée par M. Moutard.

Soit f le point de rencontre de A et B; on prolonge fb d'une longueur égale à elle-même jusqu'en g, dg est la tangente cherchée. On applique cette construction dans le cas où les lignes A et B sont quelconques en les remplaçant par leurs tangentes.

2°. *Étant données deux droites* A, B *et une courbe* C, *d'un point de la courbe on mène des parallèles aux droites fixes, on joint les points* a, b *où ces parallèles coupent* A, B; *on demande le point où* ab *touche son enveloppe.*

3°. *On partage le rayon de courbure d'une courbe donnée dans un rapport constant; ces différents points déterminent une courbe dont on demande de construire la normale.*

(*) Les points a doivent être *consécutifs* sur la courbe A; de même les points b, c. TM.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 361

(voir page 58);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le plan B on mène un plan quelconque déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T. On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

(FAURE.)

Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_6, y_6, z_6$ les coordonnées des points S, A, B, L, M, N; nous désignons par L, M, N les points où le plan mené par le point B rencontre les arêtes du trièdre. Les coordonnées des trois premiers points ainsi que les angles α, β, γ des arêtes avec les axes sont des quantités déterminées, et λ, μ, ν, qui représentent les longueurs SL, SM, SN, des quantités variables.

Les équations des arêtes seront

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_4 - x_1}{\alpha_1} = \dfrac{y_4 - y_1}{\beta_1} = \dfrac{z_4 - z_1}{\gamma_1} = \lambda, \\[2ex] \dfrac{x_5 - x_1}{\alpha_2} = \dfrac{y_5 - y_1}{\beta_2} = \dfrac{z_5 - z_1}{\gamma_2} = \mu, \\[2ex] \dfrac{x_6 - x_1}{\alpha_3} = \dfrac{y_6 - y_1}{\beta_3} = \dfrac{z_6 - z_1}{\gamma_3} = \nu \end{array} \right.$$

Désignons par V_1, V_2, V_3, V_4 les volumes des pyra-

mides SALM, SALN, SAMN, ALMN; nous aurons

$$6V_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}$$

Remplaçons dans ce déterminant x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5 par leurs valeurs tirées des équations (1) et retranchons des éléments des trois dernières lignes ceux de la première, il viendra

$$6V_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & \lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1 & \lambda\gamma_1 \\ 0 & \mu\alpha_2 & \mu\beta_2 & \mu\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu A;$$

on trouvera de même

$$6V_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\nu B$$

$$6V_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu C,$$

A, B, C représentant, comme on voit, des quantités connues.

On a enfin

$$6V_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}$$

Si nous remplaçons x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5, x_6, z_6, z_6 par leurs valeurs tirées des équations (1), les éléments des trois dernières lignes du déterminant résulteront de la somme de deux quantités, ce qui nous permettra de le décomposer. Nous trouvons ainsi

$$6V_4 = -\lambda\mu A + \lambda\nu B - \mu\nu C + \lambda\mu\nu D,$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Cette transformation devient plus facile, si l'on a soin de retrancher les éléments ligne par ligne quand l'occasion s'en présente. D'un autre côté, les quatre points B, L, M, N étant dans un même plan, on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} = 0,$$

et, à cause des trois points S, A, B en ligne droite,

$$(3) \qquad \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \rho.$$

Le déterminant (2), à cause des équations (1), nous donne

$$- \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda\mu\nu D = 0 \text{ (*)}.$$

(*) Il suffit pour obtenir cette relation de remplacer x_2, y_2, z_2 par x_3, y_3, z_3 dans le développement du déterminant qui représente $6V_4$.

On peut conclure de là, à cause des équations (3),

$$-\rho(-\lambda\mu A + \lambda\nu B - \lambda\mu\nu C) = \lambda\mu\nu D,$$

et, par conséquent,

$$6V_1 = \lambda\mu\nu\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) D.$$

Mais on a, comme on sait,

$$6V = \lambda\mu\nu D,$$

d'où, en combinant les relations obtenues,

$$\frac{P}{V^3} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) A.B.C.D}{6D^3},$$

quantité constante, puisqu'elle est indépendante des variables λ, μ, ν.

SOLUTION DE LA QUESTION 370

(voir page 127);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Soit un déterminant complet dans lequel les éléments conjugués sont des nombres imaginaires conjugués et les éléments principaux des nombres réels. Le déterminant est réel.

Un déterminant du second ordre ainsi composé est évidemment réel; nous allons montrer que le théorème étant vrai pour un déterminant de l'ordre $m-1$ l'est aussi pour celui de l'ordre n. Soit A un déterminant de l'ordre n satisfaisant aux conditions indiquées; développons-le suivant les éléments de la dernière colonne et

suivant ceux de la dernière ligne, nous aurons

$$2A = a_{1,n}\alpha_{1,n} - a_{2,n}\alpha_{2,n} + \ldots \pm a_{n,n}\alpha_{n,n}$$
$$+ a_{n,1}\alpha_{n,1} - a_{n,2}\alpha_{n,2} + \ldots \pm a_{n,n}\alpha_{n,n},$$

en représentant, pour abréger, par $\alpha_{r,s}$ ce que devient le déterminant A lorsqu'on y efface les éléments de la $r^{\text{ième}}$ ligne et ceux de la $s^{\text{ième}}$ colonne. On remarquera que d'après la composition du déterminant A, $\alpha_{s,r}$ s'obtient en changeant dans $\alpha_{r,s}$, $i = \sqrt{-1}$ en $-i$.

Par conséquent, pour

$$\alpha_{r,s} = P + Qi,$$

on aura

$$\alpha_{s,r} = P - Qi.$$

De même à une valeur de

$$a_{r,s} = p + qi$$

correspond une valeur de

$$a_{s,r} = p - qi.$$

On aura donc en général

$$a_{r,s}\alpha_{r,s} + a_{s,r}\alpha_{s,r} = 2pP + 2qQ.$$

Enfin $a_{n,n}\alpha_{n,n}$ est aussi réel, puisque par hypothèse l'élément $a_{n,n}$ est réel ainsi que le déterminant du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $\alpha_{n,n}$. Donc, etc.

SOLUTION DE LA QUESTION 384

(voir t. XVI, p. 182);

PAR M. J-CH. DUPAIN,
Ancien élève de l'Ecole Normale.

La droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre change à chaque instant de longueur et de

direction. Trouver l'équation de la ligne décrite par le milieu M de cette droite.

Soient $2a$, $2b$ les longueurs des aiguilles, et $a < b$. Je prends pour origine le centre du cadran et pour axe des y la ligne de midi. La pointe de la petite aiguille a pour coordonnées

$$2a \sin ht, \quad 2a \cos ht$$

en posant

$$h = \frac{\pi}{21600}.$$

La pointe de la grande aiguille a pour coordonnées

$$2b \sin kt, \quad 2b \cos kt$$

en posant

$$k = \frac{\pi}{1800}.$$

Les coordonnées du point M sont moyennes arithmétiques entre celles des pointes des aiguilles

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a \sin ht + b \sin kt, \\ y = a \cos ht + b \cos kt. \end{cases}$$

Si l'on voulait les coordonnées polaires du point M, on aurait

$$(2) \qquad \begin{cases} r^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(kt - ht), \\ \tang \theta = \dfrac{a \cos ht + b \cos kt}{a \sin ht + b \sin kt}. \end{cases}$$

L'inspection des équations (1) montre que le point M peut être censé décrire la circonférence d'un cercle dont le centre est mobile sur une autre circonférence; l'une d'elles indifféremment aurait pour rayon a et l'autre b: les deux mouvements sont uniformes et dans le sens de la marche des aiguilles.

Le lieu cherché est donc une épicycloïde que l'on peut

concevoir décrite par le mouvement d'un cercle de rayon $\left(\frac{k-h}{k}\right) b$ ou $\frac{11}{12} b$ roulant sur un cercle fixe de rayon $\frac{h}{k} b$ ou $\frac{b}{12}$ et entraînant avec lui le point M situé à une distance a de son centre.

Il est très-facile de trouver la v esse absolue du point M. En effet

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

$$v^2 = a^2 h^2 + b^2 k^2 + 2abkh \cos(kt - ht).$$

La vitesse est maximum lorsque les deux aiguilles font un angle nul, et elle est minimum lorsque cet angle est de 180 degrés. (Il en est de même du rayon vecteur.) La vitesse ne pourrait devenir nulle que si $ah = bk$, cas particulier que nous avons exclu en posant

$$a < b.$$

L'aire décrite par le rayon vecteur OM a pour différentielle

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

$$= \frac{1}{2}[-a^2 h - b^2 k - ab(k+h)\cos(kt - ht)]\, dt;$$

elle est d'ailleurs égale à $\frac{1}{2} r^2\, d\theta$: on aura donc, pour la vitesse angulaire,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-a^2 h - b^2 k - ab(k+h)\cos(kt-ht)}{a^2 + b^2 + 2ab\cos(kt - ht)}.$$

Examinons si elle peut être nulle. Il faut pour cela que

$$\cos(kt - ht) = -\frac{a^2 h + b^2 k}{ab(k+h)},$$

condition impossible si le second membre est numériquement supérieur à 1, c'est-à-dire si $\frac{k}{h} > \frac{a}{b}$ ou $12 > \frac{a}{b}$; dans ce cas, la vitesse angulaire conserve toujours son signe et l'épicycloïde est allongée. Elle serait raccourcie si 12 égalait $\frac{a}{b}$; et enfin elle serait ordinaire si $12 < \frac{a}{b}$.

L'angle du rayon vecteur et de la tangente a pour tangente trigonométrique

$$\frac{rd\theta}{dr} \quad \text{ou} \quad \frac{r^2\, d\theta}{rdr}.$$

Le numérateur de cette fraction est déjà calculé et son dénominateur est la moitié de la dérivée de r^2, c'est-à-dire

$$ab\,(k - h) \sin(kt - ht).$$

Pour terminer, je vais rapporter la trajectoire à des axes mobiles autour du centre du cadran avec une vitesse angulaire égale et opposée à celle de la petite aiguille. L'angle $x'ox$ sera $-ht$, et, en appliquant les formules ordinaires de transformation,

$$x' = b \sin(kt - ht),$$
$$y' = a + b \cos(kt - ht),$$

d'où

$$x'^2 + (y' - a)^2 = b^2.$$

Dans le mouvement relatif aux axes mobiles, la trajectoire est un cercle ayant pour rayon la moitié de la grande aiguille et pour ordonnée du centre la moitié de la petite aiguille. Le mouvement est d'ailleurs uniforme. La pointe de la petite aiguille est un centre de similitude des cercles décrits par le point M et par la pointe de la grande aiguille, résultats faciles à prévoir.

SOLUTION DE LA QUESTION

énoncée t. XVI, p. 109.

PAR UN ÉLÈVE DU LYCÉE DE CARCASSONNE.

Etant donnés un cercle et deux perpendiculaires à l'extrémité d'un diamètre AB, mener une tangente CD telle, que le volume engendré par le trapèze ainsi formé tournant autour du diamètre AB soit égal à une sphère de rayon donné a.

Je prends pour inconnues les segments interceptés sur les deux perpendiculaires par la tangente CD. Je joins le centre O aux points C, D et au point de contact T. Le triangle COD est rectangle et donne

$$\overline{OT}^2 = CT.\overline{TD};$$

or

$$AC = CT, \quad BD = DT,$$

donc

$$R^2 = xy;$$

le trapèze ABDC engendre un tronc de cône dont le volume est

$$\frac{1}{3}\pi(2R)(x^2 + y^2 + xy) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

La seconde équation se simplifie par la suppression des facteurs communs et l'élimination de xy. On peut alors isoler $x^2 + y^2$; puis par l'addition et la soustraction de $2xy$, on obtient

$$(x+y)^2 \quad \text{et} \quad (x-y)^2,$$

enfin

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R}+R^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R}-3R^2},$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R}+R^2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R}-3R^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que

$$\frac{2a^3}{R}\geqq 3R^2;$$

le minimum de a est donc $R\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

THÉORÈME SUR QUATRE CARRÉS;

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Théorème. Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques d'entre eux diminuée du quatrième fasse un carré. (EULER.)

Lemme. Il est impossible de satisfaire en nombres entiers à l'équation

$$2x^2+2y^2+2xy=z^2.$$

Si l'on pose

$$z=x+y+t,$$

on a

$$x^2-2tx+y^2-t^2-2ty=0,$$

d'où

$$x=t\pm\sqrt{3t^2-(y-t)^2};$$

il faudra donc poser

$$3t^2 - (y - t)^2 = k^2.$$

Or l'on ne peut satisfaire à cette équation, puisque la somme de deux carrés ne peut être divisible par 3 et que d'ailleurs k et $y - t$ ne peuvent être à le fois divisibles par 3.

Revenant au théorème d'Euler, je suppose que l'on puisse avoir à la fois les quatre équations

$$(1)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - z^2 + t^2 = b^2, \\ x^2 - y^2 + z^2 + t^2 = c^2, \\ -x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = d^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$(2)\quad \begin{cases} 4x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2, \\ 4y^2 = a^2 + b^2 - c^2 + d^2, \\ 4z^2 = a^2 - b^2 + c^2 + d^2, \\ 4t^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{cases}$$

D'où il résulte que des quatre nombres a, b, c, d deux sont nécessairement pairs s'ils ne sont pas tous impairs. On pourra donc poser

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2A, \\ a + b - c - d &= 2B, \\ a - b + c - d &= 2B, \\ -a + b + c - d &= 2B, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2a &= A + B + C - D, \\ 2b &= A + B - C + D, \\ 2c &= A - B + C + D, \\ 2d &= A - B - C - D. \end{aligned}$$

Le système (2) devient ainsi

$$16x^2 = (A+B)^2 + (C-D)^2 + (A-B)(C+D),$$
$$16y^2 = (A+B)^2 + (C-D)^2 - (A-B)(C+D),$$
$$16z^2 = (A-B)^2 + (C+D)^2 + (A+B)(C-D),$$
$$16t^2 = (A-B)^2 + (C+D)^2 - (A+B)(C-D).$$

L'une des équations (1), la première par exemple, devient

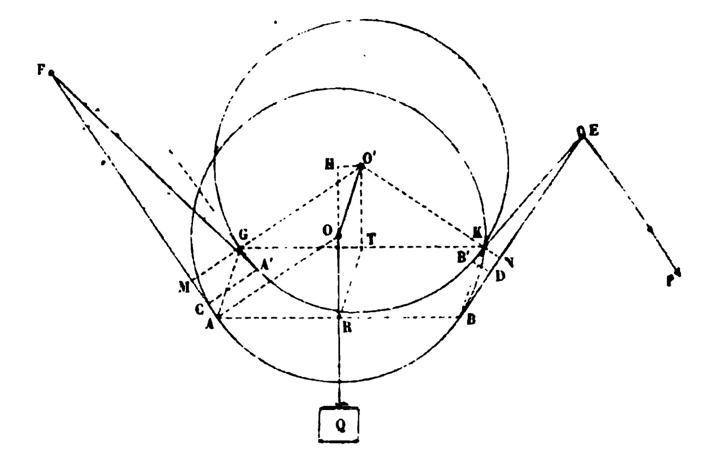
$$2(A+B)^2 + (C-D)^2 + 2(A+B)(C-D) - 16a^2,$$

équation impossible d'après le lemme.

TRAVAIL DANS LA POULIE MOBILE;

Par M. BUCH,
Professeur de mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg.

Soient O la poulie mobile, F le point d'attache du cor-



don; je suppose que ce cordon passe dans un anneau E. C'est suivant ce cordon qu'agit la puissance P. La force Q appliquée en O, et que je supposerai verticale, est la résistance à vaincre. α désignant l'angle des cordons avec la verticale, l'équation d'équilibre est

$$Q = 2 P \cos\alpha.$$

Imprimons au système un déplacement virtuel. En vertu de ce déplacement le centre O sera venu en O′, et il sera sorti une certaine longueur de cordon. Désignons OO′ ou le chemin élémentaire parcouru par le centre de la poulie par s et par ω l'angle que fait OO′ avec la verticale.

L'expression du travail élémentaire résistant sera

$$Q s \cos\omega.$$

Cela posé, tâchons d'évaluer la longueur du cordon qui est sortie.

AB est l'arc embrassé par le cordon dans la première position.

A′B′ est l'arc embrassé après le déplacement virtuel. Inscrivons la corde GK égale et parallèle à AB, et des points F et E décrivons des arcs de cercle qui rencontrent FA et EB aux points C et D. (Ces points C et D, en négligeant les infiniment petits du second ordre, ne sont autre chose que les projections des points A et A′.)

Il est évident maintenant que si l'on représente par l la longueur du cordon sorti de l'anneau, on aura

$$l = AC + GA' + BD + B'K.$$

Joignons le point T, milieu de GK, avec R, milieu de AB; joignons aussi AG, BK, GO′, AO: on aura

$$AG = BK = TR = OO',$$

et AO est égal et parallèle à GO′.

La tangente au point G est donc parallèle à FA. Mais cette tangente est dirigée suivant l'arc élémentaire GA′ qui, par conséquent, se projette en vraie grandeur suivant MC. De même l'arc élémentaire KB′ se projettera en vraie grandeur suivant ND.

Nous aurons dès lors

$$l = \mathrm{AM} + \mathrm{BN}.$$

Il est évident que nous ne négligeons que des infiniment petits du deuxième ordre.

Mais

$$\mathrm{AM} = s$$

est la projection de AG sur FA; donc

$$\mathrm{AM} = s\cos(\alpha + \omega).$$

De même

$$\mathrm{BN} = s\cos(\alpha - \omega);$$

donc

$$\mathrm{AM} + \mathrm{BN} = l = 2s\cos\alpha\cos\omega.$$

Le travail de la puissance est par conséquent

$$\mathrm{P}l = 2\mathrm{P}s.\cos\alpha\cos\omega,$$

et comme le travail de Q est

$$\mathrm{Q}s\cos\omega,$$

on peut écrire

$$\mathrm{TP} = \mathrm{TQ}$$

en vertu de la relation

$$\mathrm{Q} = 2\mathrm{P}\cos\alpha.$$

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 388 (FAURE)

(voir p. 183);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I. Cette question se rattache directement à la belle théorie des *courbes polaires*, que le lecteur trouvera exposée dans l'ouvrage de M. G. Salmon intitulé : *A Treatise on the higher plane curves*, p. 57 et suivantes. Mais pour montrer ici comment la solution se déduit de cette théorie, il est nécessaire d'en rappeler en peu de mots les propositions principales.

On sait, depuis Cotes (*), que si une transversale tourne autour d'un point fixe dans le plan d'une courbe géométrique, le *centre des moyennes harmoniques* des points de rencontre de la courbe par la transversale, pris relativement au point fixe, décrit une ligne droite.

Ce centre harmonique est donné, pour chaque position de la transversale, par l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)=0, \qquad (1)$$

dans laquelle ρ exprime sa distance au pôle fixe O ; ρ_1 la distance du pôle à l'un des points de rencontre de la transversale et de la courbe, et où le signe Σ indique qu'il faut faire la somme d'autant de termes semblables qu'il y a d'unités dans le degré de la courbe donnée.

La droite que décrit le centre harmonique a reçu le nom de *droite polaire* du *pôle* O par rapport à la courbe.

(*) *Voir* t. IX, p. 205, 285 et 344.

II. Par analogie, si, au lieu de l'équation (1), on prend la suivante

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)=0,$$

le point variable dont ρ exprime la distance au pôle fixe O, décrit évidemment une conique qui a reçu le nom de *conique polaire* du point O par rapport à la courbe.

Plus généralement, on appelle *courbe polaire de l'ordre k* d'un point fixe par rapport à une courbe géométrique, celle dont le rayon vecteur ρ, compté à partir de ce point pris pour origine, est donné par l'équation du $k^{\text{ième}}$ degré

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_k}\right)=0,$$

dans laquelle chaque terme se compose du produit de k facteurs tels que $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)$.

III. Un point fixe a donc $m-1$ courbes polaires par rapport à une courbe géométrique du degré m. On désigne par les noms de :

Première polaire celle dont le degré est $m-1$;

Deuxième polaire celle dont le degré est $m-2$;

Et ainsi de suite.

Les trois dernières courbes de cette série descendante sont la *cubique polaire*, la *conique polaire* et la *droite polaire* du point fixe par rapport à la courbe.

IV. Il existe un lien remarquable entre ces différentes courbes : c'est que l'une quelconque d'entre elles est aussi l'une des courbes polaires du point fixe par rapport à toutes celles qui la précèdent dans la hiérarchie. Par exemple, soient X, Y, Z la droite, la conique et la cubique polaire d'un point O par rapport à une courbe du

quatrième ordre U; la droite X est aussi la polaire du point O, soit par rapport à la cubique Z, soit par rapport à la conique Y, et celle-ci est également la conique polaire du point O par rapport à la cubique Z.

V. On démontre aisément (*voir* Salmon, p. 59) que les points de contact des tangentes, menées par le pôle O à la courbe donnée U, sont situés sur la première polaire de ce point, ce qui prouve incidemment que ces tangentes sont au nombre de $m(m-1)$, puisque la courbe est du degré m et sa première polaire du degré $m-1$.

VI. Si la courbe V a un point multiple de l'ordre p, ce point est multiple de l'ordre $p-1$ sur la première polaire; il est multiple de l'ordre $p-2$ sur la seconde polaire, et ainsi de suite, quel que soit d'ailleurs le pôle de ces diverses polaires.

Si la courbe U n'a que deux points doubles, la première polaire est seule à passer par chacun de ces points, et elle n'y passe qu'une fois.

VII. On démontre encore (Salmon, p. 61) cette autre propriété qui va être utile pour résoudre la question 388, savoir, que la tangente à la première polaire en l'un des points doubles de la courbe U est conjuguée harmonique de la droite qui joint ce point double au pôle, par rapport aux deux tangentes que la courbe U possède en ce point double.

VIII. $U=0$ étant l'équation de la courbe donnée exprimée en *coordonnées trilinéaires* (c'est-à-dire rendue homogène par la substitution des variables $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ aux coordonnées ordinaires x, y), et x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées du pôle O, l'équation de la première polaire Z de ce pôle est

$$Z = x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0. \text{ (Salmon, p. 58.)}$$

Celle de la seconde polaire est

$$Y = x_1 \frac{dZ}{dx} + y_1 \frac{dZ}{dy} + z_1 \frac{dZ}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Y = x_1^2 \frac{d^2U}{dx^2} + y_1^2 \frac{d^2U}{dy^2} + z_1^2 \frac{d^2U}{dz^2} + 2x_1y_1 \frac{d^2U}{dx\,dy}$$
$$+ 2y_1z_1 \frac{d^2U}{dy\,dz} + 2z_1x_1 \frac{d^2U}{dz\,dx} = 0,$$

et ainsi de suite.

IX. La solution de la question **388** découle aisément de ce qui précède. En effet, les m droites données a, b, c, etc., représentent une courbe du $m^{ième}$ degré douée de $\frac{1}{2}m(m-1)$ points doubles.

La première polaire Z du pôle A par rapport à cette courbe passera donc une fois par chacun des points doubles (VI), c'est-à-dire par les $\frac{1}{2}m(m-1)$ points d'intersections mutuelles de ces droites. En chacun de ces points, tels que (a, b), elle aura pour tangente (n° VII) la droite conjuguée harmonique de la droite A (a, b) par rapport aux deux tangentes que la courbe possède en ce point double et qui ne sont autre chose ici que les droites a et b elles-mêmes. Enfin si $U = 0$ est l'équation homogène en x, y, z qui représente le système des m droites (équation de degré m résoluble en m facteurs linéaires, dont chacun se rapporte à l'une des droites données), l'équation de cette première polaire sera (VIII)

$$Z = x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0.$$

On aura pareillement, pour un autre point A′ (x_2, y_2, z_2),

$$Z' = x_2 \frac{dU}{dx} + y_2 \frac{dU}{dy} + z_2 \frac{dU}{dz} = 0.$$

Or les $(m-1)(m-2)$ points de contact des tangentes à la courbe z', issues du point A, sont situés (V) sur la première polaire W du point A par rapport à Z′, et les $(m-1)(m-2)$ points de contact des tangentes à la courbe Z, issues du point A′, sont situés sur la première polaire W′ du point A′ par rapport à Z. Donc on a (VIII)

$$W = x_1 \frac{dZ'}{dx} + y_1 \frac{dZ'}{dy} + z_1 \frac{dZ'}{dz} = 0,$$

et

$$W' = x_2 \frac{dZ}{dx} + y_2 \frac{dZ}{dy} + z_2 \frac{dZ}{dz} = 0.$$

D'où l'on conclut immédiatement, en effectuant les différentiations, cette identité :

$$W = W' = x_1 x_2 \frac{d^2U}{dx^2} + y_1 y_2 \frac{d^2U}{dy^2} + z_1 z_2 \frac{d^2U}{dz^2}$$
$$+ (x_1 y_1 + x_2 y_1) \frac{d^2U}{dx\,dy} + (y_1 z_1 + y_2 z_1) \frac{d^2U}{dy\,dz}$$
$$+ (z_1 x_2 + y_2 z_1) \frac{d^2U}{dz\,dx} = 0.$$

Ce qui démontre le dernier théorème énoncé dans la question proposée, laquelle se trouve ainsi complétement résolue.

Quand on ne donne que trois ou quatre droites, on peut démontrer, sans le secours de l'analyse, plusieurs des propositions qui précèdent. Ainsi dans le cas des trois droites, il suffira de s'appuyer sur les nos 372 et 658 de la *Géométrie supérieure*, et, dans le cas de quatre droites, sur les nos 393 et 405 combinés avec une pro-

priété des courbes du troisième ordre qu'on trouvera énoncée page 245 de ma *Traduction* de Maclaurin.

Mais ces développements particuliers seraient ici superflus.

Nota. Voici la démonstration du théorème important qui est cité au § V.

On prouve d'abord que *la première polaire d'un point fixe* O, *par rapport à une courbe donnée, est aussi le lieu géométrique des points dont les droites polaires passent par le point* O.

En effet l'équation

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0$$

exprime une relation entre x, y, z, coordonnées d'un point quelconque de la droite polaire, et x_1, y_1, z_1 coordonnées du pôle. Donc si le premier de ces deux points est fixe (x_2, y_2, z_2) et le second variable, le lieu géométrique de ce dernier sera représenté par l'équation

$$x_2\left(\frac{dU}{dx}\right) + y_2\left(\frac{dU}{dy}\right) + z_2\left(\frac{dU}{dz}\right) = 0,$$

qui est précisément l'équation de la première polaire du point (x_2, y_2, z_2) par rapport à la courbe.

Ce théorème peut encore se démontrer comme il suit : Soient O le point fixe et O′ un point quelconque de la première polaire du point O; a, b, c,..., m étant les points de rencontre de la transversale OO′ et de la courbe, on a par hypothèse l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\cdots\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Om}\right)=0,$$

et il suffit de montrer qu'on a en même temps

$$\sum\left(\frac{1}{O'O}-\frac{1}{O'a}\right)=0.$$

Or cette seconde équation est toujours une conséquence de la première, comme il est facile de le voir, au moyen d'une simple vérification, en écrivant

$$O'a = OO' - Oa, \quad O'b = OO' - Ob,$$

et ainsi de suite.

On démontre, en second lieu, *que la droite polaire d'un point simple d'une courbe est la tangente à la courbe en ce point.*

Cette proposition, qui résulte très-simplement de quelques théorèmes qu'il serait trop long de rappeler ici et qu'on trouvera dans l'ouvrage de Salmon, peut se démontrer ainsi qu'il suit.

Soit O' un point quelconque de la droite polaire d'un pôle donné O. On a l'équation

$$\sum \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) = 0$$

ou

$$\sum \left(\frac{O'a}{OO'.Oa}\right) = 0.$$

En développant, il vient celle-ci

$$O'a.Ob.Oc.Od\ldots Om + O'b.Oa.Oc.Od\ldots Om$$
$$+ O'c.Oa.Ob.Od\ldots Om + \ldots = 0,$$

dans laquelle tous les termes, à l'exception du premier, contiennent le facteur Oa. Donc si le point O est pris en a sur la courbe, Oa est nul et l'équation se réduit à son premier terme

$$(1) \qquad O'O.Ob.Oc\ldots Om = 0.$$

Or le point a n'étant pas un point multiple de la courbe donnée, les lignes Ob, Oc,..., Om ne sont pas nulles en

général; donc on a simplement

$$OO' = 0,$$

ce qui signifie que, pour toutes les directions de la transversale OO', la droite polaire du point O de la courbe passe par ce point lui-même. Mais si l'on prend pour cette transversale la tangente même de la courbe, O*b* est nul et l'équation (1) est satisfaite d'elle-même, quelle que soit la valeur de OO', ce qui signifie que tous les points de la transversale, actuellement tangente à la courbe, appartiennent à la droite polaire du point de contact, ou, en d'autres termes, que cette tangente est la droite polaire elle-même. C. Q. F. D.

De ce théorème et du précédent on conclut immédiatement que *les points de contact des tangentes issues d'un point donné sont sur la première courbe polaire de ce plan.* C'est précisément ce qu'il fallait prouver.

COSMOGRAPHIE.

SOLUTION DE LA QUESTION 331

(voir t. XV, p. 243);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Question. Soient les jours relatifs au soleil vrai, au soleil fictif dans l'écliptique et au soleil fictif dans l'équateur. Quand ces jours considérés deux à deux sont-ils égaux? Quand les trois jours sont-ils égaux?

Soient E le nombre de secondes de temps qu'il faut ajouter à l'heure vraie pour avoir l'heure moyenne, c'est-à-dire l'*équation du temps,* ⊙ la longitude *vraie* du so-

leil et α la longitude de l'apogée ; on a

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} E = -462^s \sin(\odot - \alpha) - 593^s \sin 2\odot \\ \qquad - 3^s \sin 2(\odot - \alpha) + 13^s \sin 4\odot. \end{array}\right.$$

Cette formule a été donnée par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1772 et convient encore à l'époque actuelle, malgré les petites variations qu'ont éprouvées l'inclinaison et l'excentricité de l'orbite terrestre (*)

Pour plus de simplicité, je négligerai les deux derniers termes qui sont très-faibles : l'erreur est insensible. Par exemple, pour le 28 janvier 1857 où l'on a

$$\odot = 308^\circ\, 34'\, 57'',$$

la formule, réduite à ses deux premiers termes, donne

$$E = 13^m\, 15^s,8$$

au lieu de

$$13^m\, 17^s,9$$

que donne la *Connaissance des Temps*.

Quand le jour vrai est égal en durée au jour moyen, la variation de l'équation du temps est évidemment nulle, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{dE}{d\odot} = 0$$

ou

$$231 \cos(\odot - \alpha) + 593 \cos 2\odot = 0.$$

Développant cos $(\odot - \alpha)$ et cos $2\odot$, puis ayant égard à la valeur de α pour 1857, savoir

$$\alpha = 100^\circ\, 27'\, 51'',$$

(*) A démontrer prochainement.

on trouve, par des calculs faciles,

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = \cos^4 \odot - 0{,}070749.\cos^3 \odot - 0{,}962064 \cos^2 \odot \\ \qquad + 0{,}035374.\cos \odot + 0{,}213315. \end{cases}$$

Traitant cette équation complète du quatrième degré par la méthode ordinaire, on trouve pour équation transformée, c'est-à-dire privée du second terme,

$$y^4 = 0{,}963941\, y^2 + 0{,}001298\, y + 0{,}213639 = 0$$

dont les quatre racines sont réelles et donnent pour celles de l'équation (2) les quatre valeurs

$$\begin{aligned} &+ 0{,}804979, \\ &+ 0{,}604585, \\ &- 0{,}570884, \\ &- 0{,}767932 \end{aligned}$$

dont la somme est 0,070748, exacte à 0,000001 près, et dont le produit est 0,21336 à 4 cent-millièmes près.

Ces nombres sont les cosinus des longitudes ci-après, respectivement

323° 36′ 30″	qui correspondent en nombres ronds aux	11 février.
52.48. 3		13 mai.
124.48 43		27 juillet.
219.49.53		2 novembre.

Tels sont donc les quatre jours de l'année où il y a actuellement égalité entre les jours vrais et moyens. Il s'agit de faire la même chose pour le jour moyen et le jour fictif.

Le soleil fictif S′ et le soleil moyen S″ ayant un mouvement égal, le premier sur l'écliptique, le second sur l'équateur, et passant ensemble au point vernal, l'ascension droite de S″ égale toujours la distance de S′ à l'équinoxe que je désignerai par $\odot'$. On a donc, en désignant

par $\odot''$ l'ascension droite de S',

$$\tang \odot' = \frac{\tang \odot''}{\cos \omega};$$

ω obliquité de l'écliptique $= 23^\circ\ 27'\ 29'',6$. D'où l'on tire

$$\tang(\odot' - \odot'') = \frac{(1 - \cos \omega)}{\cos \omega} \cdot \frac{\tang \odot''}{1 + \frac{\tang^2 \odot''}{\cos \omega}}.$$

Quand le jour moyen est égal au jour fictif, on a évidemment

$$\frac{d(\odot' - \odot'')}{d \odot''} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\tang \odot'' = \pm \sqrt{\cos \omega} \quad \text{et} \quad \tang \odot' = \pm \frac{\sqrt{\cos \omega}}{\cos \omega}.$$

Donc il y a égalité des jours moyen et fictif quand la longitude *moyenne* du soleil a les quatre valeurs suivantes

$46^\circ\ 14'\ 7''$, $133^\circ\ 45'\ 53''$. $226^\circ\ 14'\ 7''$ $313^\circ\ 45'\ 53''$,

qui, en ayant égard à l'équation du centre, correspondent aux longitudes *vraies*

$47^\circ\ 46'\ 42$, $132^\circ\ 43'\ 34''$, $224^\circ\ 39'\ 11''$, $314^\circ\ 50'\ 20''$,

lesquelles ont lieu vers le

8 mai, 5 août, 6 novembre, 3 février.

Si l'on compare ces dates aux précédentes, on voit qu'il n'y a rigoureusement aucun jour dans l'année où les trois jours soient égaux entre eux, mais qu'ils approchent beaucoup de l'égalité le 10 mai et le 4 novembre, et qu'ils diffèrent peu les uns des autres vers le 7 février et le 1er août. C'est ce qu'il s'agissait de trouver.

La suite prochainement.

FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON
(Fin d'un premier article)

(voir page 317.)

On peut de la formule d'interpolation de Lagrange déduire celle de Newton, en supposant que les nombres x_0, $x_1,\ldots, x_{m-1}$, x_m soient les termes de la progression arithmétique x_0, $x_0+h,\ldots,$ $x_0(m-1)h$, x_0+mh.

Reprenons la première de ces formules qui est

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{m-1})(x-x_m)}u_0\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{m-1})(x_1-x_m)}u_1+\ldots\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\ldots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\ldots(x_p-x_{m-1})(x_p-x_m)}u_p+\ldots\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_m)}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\ldots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)}u_{m-1}\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-2})(x_m-x_{m-1})}u_m.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on remplace x_1, $x_2,\ldots, x_m$ par x_0+h, $x_0+2h,\ldots,$ x_0+mh, le dernier terme de cette formule devient

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(m-2)h][x-x_0-(m-1)h]}{mh.(m-1)h\ldots 2h.h}u_m$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{m.(m-1)\ldots 2.1}u_m.$$

L'avant-dernier terme prendra la forme

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(m-2h](x-x_0-mh)}{(m-1)h.(m-2)h\ldots h\times(-h)}u_{m-1},$$

et pourra s'écrire ainsi

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{(m-1)(m-2)\ldots1.1}u_{m-1},$$

et, afin que le dénominateur soit encore le produit $m(m-1)\ldots3.2.1$, on multipliera par m les deux termes de l'expression précédente, ce qui donnera

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}.mu_{m-1}.$$

On trouvera de même que les termes précédant l'avant-dernier de la formule (3) deviennent respectivement

$$+\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}$$

$$\times\frac{m(m-1)}{1.2}u_{m-2},$$

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}$$

$$\times\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}u_{m-3},$$

. . . .

Considérons généralement le terme

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\ldots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\ldots(x_p-x_{m-1})(x_p-x_m)}u_p;$$

dans lequel le nombre p est supposé moindre que m. En remplaçant dans ce terme x_1, x_2,..., x_{p-1}, x_p, x_{p+1},..., x_{m-1}, x_m par x_0+h, x_0+2h,..., $[x_0+(p-1)h]$, (x_0+ph), $[x_0+(p+1)h]$,..., $[x_0+(m-1)h]$, (x_0+mh), on a d'abord

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(p-1)h][x-x_0-(p+1)h]\ldots[x-x_0-(m-1)h](x-x_0-mh)}{ph.(p-1)h\ldots h.(-h)\times-[(m-1)-p]h\times-(m-p)h}u_p;$$

Puis

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p.(p-1)\ldots1.(-1)\ldots\times-[(m-1)-p]\times-(m-p)}u_p;$$

ou bien encore

$$\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p.(p-1)\ldots1\times1\ldots[(m-1)-p](m-p)}u_p;$$

et enfin

$$\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m.(m-1)\ldots3.2.1}$$

$$\times\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}u_p.$$

Il faut mettre le signe + ou le signe — suivant que $m-p$ est pair ou impair.

Ainsi, lorsque les valeurs substituées à la variable x sont x_0, x_0+h, x_0+2h,..., $x_0+(m-1)h$, x_0+mh, on peut donner à la formule d'interpolation de Lagrange

la forme suivante :

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{m(m-1)\ldots3.2.1}u_m\\
&-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}mu_{m-1}+\ldots\\
&\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}\\
&\times\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}u_p+\ldots\\
&\mp\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}mu_1\\
&\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}u_0.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour en déduire la formule d'interpolation de Newton, il faut remplacer u_m, u_{m-1}, u_{m-2},..., u_1 par les développements

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
&u_0+m\Delta u_0+\frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2u_0+\ldots+\Delta^m u_0,\\
&u_0+(m-1)\Delta u_0+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\Delta^2u_0+\ldots+\Delta^{m-1}u_0,\\
&u_0+(m-2)\Delta u_0+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\Delta^2u_0+\ldots+\Delta^{m-2}u_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_0+\Delta u_0.
\end{aligned}
\right.
$$

Afin d'abréger l'écriture, posons $z=\frac{x-x_0}{h}-m$. Il en

résultera

$$z+1=\frac{x-x_0}{h}-(m-1),$$

$$z+2=\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\ldots,$$

$$z+m=\frac{x-x_0}{h}.$$

Et en représentant par $f(z)$ le produit des $(m+1)$ facteurs consécutifs z, $(z+1)$, $(z+2)$,..., $(z+m)$, la formule (4) se transformera en celle-ci

$$(6)\quad \frac{1}{m(m-1)\ldots3.2.1}\left\{\begin{array}{l}\frac{f(z)}{z}u_m-\frac{f(z)}{z+1}\cdot mu_{m-1}+\frac{f(z)}{z+2}\cdot\frac{m(m-1)}{1.2}u_{m-2}-\ldots \\ \pm\frac{f(z)}{z+m-p}\,\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}u_p\mp\ldots \\ \mp\frac{f(z)}{z+m-1}\cdot mu_1\pm\frac{f(z)}{z+m}u_0.\end{array}\right\}$$

Si l'on remplace dans la formule (6) u_m, u_{m-1}, u_{m-2},..., u_1 par les développements (5), le résultat de la substitution sera évidemment une expression de la forme

$$a_0u_0+a_1\Delta u_0+a_2\Delta^2u_0+\ldots+a_p\Delta^pu_0+\ldots+a_m\Delta^mu_0,$$

et on aura d'abord

$$a_0=\frac{1}{m(m-1)\ldots2.1}\left[\begin{array}{l}\frac{f(z)}{z}-m\frac{f(z)}{z+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{f(z)}{z+1}+\ldots \\ \mp m\frac{f(z)}{z+m-1}\pm\frac{f(z)}{z+m}\end{array}\right].$$

Mais on a vu (page 317) que

$$1.2.3.m=\frac{f(z)}{z}-m\cdot\frac{f(z)}{z+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{f(z)}{z+2}-\ldots$$
$$\mp m\frac{f(z)}{z+m-1}\pm\frac{f(z)}{z+m};$$

donc

$$a_0 = 1.$$

Il viendra ensuite

$$a_1 = \frac{1}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times \left[m\frac{f(z)}{z} - m(m-1)\frac{f(z)}{z+1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{f(z)}{z+2} - \ldots \mp m\frac{f(z)}{z+m-1} \right],$$

d'où

$$a_1 = \frac{1}{(m-1)\ldots 2.3}$$

$$\times \left[\frac{f(z)}{z} - (m-1)\frac{f(z)}{z+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{f(z)}{z+2} - \ldots \mp \frac{f(z)}{z+m-1} \right],$$

ou bien, en représentant par $\varphi(z)$ le produit des m facteurs consécutifs z, $z+1, \ldots$, $z+m-1$, et en ayant égard à ce que

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m),$$

on aura

$$a_1 = \frac{z+m}{(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times \left[\frac{\varphi(z)}{z} - (m-1)\frac{\varphi(z)}{z+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{\varphi(z)}{z+2} - \ldots \mp \frac{\varphi(z)}{z+m-1} \right].$$

Or (page 317)

$$1.2\ldots(m-1) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-1)\frac{\varphi(z)}{z+1}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{\varphi(z)}{z+1} + \ldots \mp \frac{\varphi(z)}{z+m-1},$$

donc

$$a_1 = z + m = \frac{x - x_0}{h}.$$

Le coefficient a_p du terme général $a_p \Delta^p u_0$ sera déterminé par l'égalité

$$a_p = \frac{1}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \frac{f(z)}{z} \\ - m . \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-p)}{1.2.3\ldots p} \frac{f(z)}{z+1} \\ + \frac{m(m-1}{1.2} . \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots p} \frac{f(z)}{z+2} - \ldots \\ \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} \frac{f(z)}{z+m-p} \end{array} \right\},$$

d'où, en réduisant,

$$a_p = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-p)}$$

$$\times \left[\frac{\frac{f(z)}{z} - (m-p)\frac{f(z)}{z+1} + (m-p)(m-p-1)\frac{f(z)}{z+2} - \ldots \pm \frac{f(z)}{z+m-p}}{1.2.3\ldots(p-1)p} \right].$$

Cela posé, nommons $\varphi(z)$ le produit des $(m-p+1)$ facteurs consécutifs z, $z+1$, $z+2, \ldots, (z+m-p)$, il en résultera

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m-p+1)(z+m-p+2)\ldots(z+m),$$

et par suite

$$a_p = \frac{(z+m)\ldots(z+m-p+1)}{1.2.3\ldots(m-p)}$$

$$\times \left[\frac{\frac{\varphi(z)}{z} - (m-p)\frac{\varphi(z)}{z+1} + \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2}\frac{\varphi(z)}{z+2} - \ldots \pm \frac{\varphi(z)}{z+m-p}}{1.2.3\ldots(p-1)p} \right].$$

Mais

$$1.2.3\ldots(m-p) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-p)\frac{\varphi(z)}{z+1}$$

$$+ \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2} - \ldots + \frac{\varphi(z)}{z+m-p};$$

donc

$$a_p = \frac{(z+m)(z+m-1)\ldots[(z+m-(p-1)]}{1.2\ldots p},$$

et, parce que

$$z+m = \frac{x-x_0}{h},$$

on aura

$$a_p = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]}{1.2\ldots p}.$$

En remplaçant successivement p par les nombres 1, 2, 3,..., m, cette dernière égalité donne

$$a_1 = \frac{x-x_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2},$$

$$a_3 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)}{1.2.3},\ldots,$$

$$a_m = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{1.2.3\ldots m}.$$

D'ailleurs

$$a_0 = 1,$$

par conséquent l'expression

$$a_0 u_0 + a_1 \Delta u_0 + a_2 \Delta^2 u_0 + \ldots + a_m \Delta^m u_0$$

revient à

$$u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots$$

$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)\ldots$$

$$\times\left[\frac{x - x_0}{h} - (m - 1)\right]\frac{\Delta^m u_0}{1.2.3\ldots m}.$$

Ce qui est la formule d'interpolation de Newton.

G.

SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE RELATIVE A DEUX ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ

(voir t. XV, p. 76);

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Étant données deux équations biquadratiques, savoir

(I) $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$ (racines α, β, γ, δ),

(II) $a'x^4 + 4b'x^3 + 6c'x^2 + 4d'x + e' = 0$ (racines α', β', γ', δ'),

je vais présenter dans ce qui suit les éléments de la formation de l'équation ayant pour racines les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'.$$

Il est facile de voir que cette fonction a vingt-quatre valeurs, et l'équation dont il s'agit est assez compliquée : mais en faisant usage des solutions algébriques des équations données, j'ai réussi à la mettre sous une forme simple, qui se prête facilement aux divers résultats. Je dois mentionner surtout que j'ai été ainsi conduit par une

marche très-simple à l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I) : résultat que je ne me souviens d'avoir rencontré dans aucun traité d'algèbre.

Posons d'abord

$$a^2\varpi = b^2 - ac,$$

$$12a^2\mu = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$8a^3\lambda = ace + 2bcd - ad^2 - cb^2 - c^3,$$

$$l = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^3}, \quad m = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

et désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues pour l'équation (II).

Faisons maintenant

$$z = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'$$

et introduisons la quantité auxiliaire u donnée par l'équation

$$u = \frac{1}{4}\left(z - \frac{4bb'}{aa'}\right)$$

et posons

$$u^4 - 6\varpi\varpi' u^2 - 2u\,\frac{(a^2 d - 3abc + 2b^3)(a'^2 d' - 3a'b'c' + 2b'^3)}{a^3 a'^3}$$

$$- 3\,(3\varpi^2\varpi'^2 - 4\varpi^2\mu' - 4\varpi'^2\mu - 2\mu\mu') = \mathrm{P},$$

$$6u^2 - 3\left(2\varpi\varpi' - \frac{l'm}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi l'}{\mu'} + \frac{4\varpi' m}{\mu}\right) = \mathrm{Q},$$

$$6u^2 - 3\left(2\varpi\varpi' - \frac{lm'}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi m'}{\mu'} + \frac{4\varpi' l}{\mu}\right) = \mathrm{R},$$

et l'équation cherchée s'écrit de la manière suivante

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q}\,(lm')^{\frac{1}{3}} + \mathrm{R}\,(l'm)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{P}^3 = \mathrm{Q}^3\, lm' + \mathrm{R}^3\, l'm + 3\mu\mu'\,\mathrm{PQR}.$$

Or cette équation monte au douzième degré et ne contient que la seule expression irrationnelle

$$\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)},$$

d'où, en élevant au carré, nous passons à l'équation cherchée

Pour trouver l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I), il suffit de poser dans l'équation (II)

$$a'=6,\quad b'=0,\quad c'=-1,\quad d'=0,\quad e'=0\ (^*),$$

et, en substituant ces valeurs, nous trouvons

$$P=u^4+\varpi u^2+\frac{3}{8}\mu,\quad Q=6u^2+\frac{q}{4}\frac{m}{\mu},\quad R=6u^2+\frac{q}{4}\frac{l}{\mu},$$

et l'équation (III) donne (en posant $2u^2=\theta$)

$$\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)^3=\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l+\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^3 m$$
$$+3\mu\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)$$

ou bien

$$\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)^3=\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l+\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^3 m$$
$$+3\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)\left(\mu\theta^2-\frac{3}{2}\lambda\theta+\frac{9}{16}\mu^2\right),$$

et, en posant

$$t=-8\theta,$$

les quantités

$$(\alpha-\beta)^2,\quad (\alpha-\gamma)^2,\quad (\alpha-\delta)^2,$$
$$(\beta-\gamma)^2,\quad (\beta-\delta)^2,\quad (\gamma-\delta)^2$$

(*) s' devient alors $6(\alpha-\alpha')^2$. Tm.

seront les racines de l'équation suivante en t :

$$t^6 - 4\delta\varpi t^5 + 96 t^4 (\mu + \delta\varpi^2) - 256 t^3 (16\varpi^3 + 24\mu\varpi + 13\lambda) + (4\delta)^2 t^2 (32\varpi^2\mu + 16\varpi\lambda - 7\mu^2) - (24)^4 t(\mu^2\varpi + \mu\lambda) + 108.8^4 (\mu^3 - \lambda^2) = 0.$$

Si les équations données sont identiques, l'équation (III) appartient à deux équations distinctes.

On peut remarquer la relation suivante, qu'on peut démontrer directement :

$$4a^6(\varpi^3 - 2\lambda - 3\varpi\mu) = (a^2 d - 3abc + 2b^3)^2.$$

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 389 (LAGRANGE) ET PREMIÈRE DE LA QUESTION 290

(voir page 296);

PAR M. LE DOCTEUR SACCHI,
De l'université de Pavie.

Si l'on représente par $A_x^{(r)}$ le coefficient de k^x dans le développement de $(1+k)^r$, on aura

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+k)^r = {} & A_0^{(r)} + A_1^{(r)} k + \ldots \\ & + A_{x-1}^{(r)} k^{x-1} + A_x^{(r)} k^x + \ldots + A_r^{(r)} k^r; \end{aligned} \right.$$

si l'on multiplie chaque membre de cette équation par $1+k$, et si l'on observe que le coefficient ${}_x^{(r+1)}$ est égal à $A_{x-1}^{(r)} + A_x^{(r)}$, on voit facilement que

$$A_x^{(r+n)} = \sum_{y=0}^{y=n} A_{x-y}^{(r)} A_y^{(n)},$$

pourvu que l'on fasse toujours

$$A_0 = 1, \quad A_{-p}^{(m)} = 0, \quad A_{m+p}^{(m)} = 0.$$

Posons

$$x = n = r,$$

et en observant que

$$A_{x-y}^{(r)} = A_y^{(r)},$$

on obtient

$$(2) \qquad A_r^{(2r)} = \sum_{y=0}^{y=r} A_y^{2(r)},$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des coefficients de la puissance r du binôme est égale au coefficient moyen de la puissance $2r$ du même.

Il est à remarquer que la quantité $A_r^{(2r)}$ multipliée par $\frac{n}{4^r}$, ou bien par na^r, donne, dans le premier cas, la somme

$$\cos^{2r}\alpha + \cos^{2r}\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right) + \cos^{2r}\left(\alpha - 2\frac{\pi}{n}\right) + \ldots$$
$$+ \cos^{2r}\left[\alpha - (n-1)\frac{\pi}{n}\right],$$

quels que soient α et n, r entiers positifs; et dans le deuxième cas, la somme des puissances r des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence de rayon $2a$ sur les côtés du polygone régulier circonscrit.

En carrant l'équation connue

$$\sum A_y^{(r)} = 2^r,$$

et en désignant pas S la somme des produits deux à deux

des coefficients A_0, A_1,..., on a

$$\sum A_r^2 + 2S = 4^r;$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}(4^r - A_r^{(2r)}),$$

laquelle fournit la solution de la question 290, proposée dans ce journal, page 192, tome XIII.

On peut arriver plus simplement à l'équation (2) de la manière suivante : que l'on multiplie l'équation (1) avec celle que l'on obtient en plaçant dans la même équation $\frac{1}{k}$ au lieu de k, et l'on aura

$$\frac{(1+k)^{2r}}{k^r} = \sum A_y^{2(r)} + P,$$

où P est un polynôme contenant k dans tous les termes; par conséquent, la somme cherchée sera ce terme du premier membre où k n'entre pas, ou bien sera le coefficient de k^r dans le développement de $(1+k)^{2r}$, c'est-à-dire sera $A_r^{(2r)}$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

SOLUTION DE LA QUESTION 372

(voir p. 178);

PAR M. LOUIS BOYER,
Lieutenant d'artillerie.

Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gra-

vité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le degré de l'enveloppe de la droite qui joint ces trois points.

Soient O le centre de la conique pris pour origine des coordonnées et ayant deux foyers F et F', M le sommet d'un des triangles, α et β ses coordonnées.

Le premier lieu géométrique est l'axe des y, le centre du cercle circonscrit étant toujours sur cet axe.

Le second lieu est le lieu des points

$$y = \frac{\beta}{3}, \quad x = \frac{\alpha}{3},$$

donc l'équation de ce lieu est

$$9Ay^2 + 9Bx^2 = C,$$

$$Ay^2 + Bx^2 = C$$

étant l'équation de la conique : c'est donc une conique semblable à la première, ces deux coniques ayant pour centre de similitude l'origine des coordonnées.

Le point de rencontre des hauteurs est donné par les équations des droites MP perpendiculaire à FF' et F'K perpendiculaire à MF. Ces équations sont

$$x = \alpha, \quad y = -\frac{\alpha - c}{\beta}(x + c),$$

d'où

$$x = \alpha, \quad y = \frac{c^2 - \alpha^2}{\beta}.$$

L'équation du lieu sera donc

$$y^2 = \frac{A(c^2 - x^2)^2}{C - Bx^2}$$

1°. *Ellipse.*

$$y^2 = \frac{a^2(c^2 - x^2)^2}{b^2(a^2 - x^2)},$$

équation de deux courbes symétriques ayant leurs som-

mets sur l'axe des y aux points $y = \pm \frac{c^2}{b}$, passant toutes deux par les foyers et ayant toutes deux pour asymptotes les droites $x = \pm a$.

2°. *Hyperbole.*

$$y^2 = \frac{a^2 (c^2 - x^2)^2}{b^2 (x^2 - a^2)},$$

équation représentant un système de deux lignes hyperboliques ayant chacune une branche imaginaire et pour équations

$$y = \pm \frac{a (c^2 - x^2)}{b \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

La première ligne hyperbolique

$$y = + \frac{a (c^2 - x^2)}{b \sqrt{x^2 - a^2}}$$

a pour asymptotes les droites

$$x = a, \quad y = - \frac{a}{b} x$$

(perpendiculaire à l'une des asymptotes de l'hyperbole donnée), passe par le foyer F, et se trouve alors située au-dessous de l'axe des x, pour les valeurs de x comprises entre a et c, y est positif. L'autre branche est imaginaire.

La deuxième ligne hyperbolique a pour asymptotes les droites

$$x = - a, \quad y = \frac{a}{b} x,$$

passe par le foyer F″, se trouve au-dessous de l'axe des x pour les valeurs de x comprises entre $- a$ et $- c$, et au-dessus pour toutes les autres valeurs. L'autre branche est imaginaire.

Recherche de l'enveloppe. Elle est représentée par les trois équations suivantes, l'équation de la droite, la dérivée de cette équation et l'équation de relation entre α et β; ces équations simplifiées prennent la forme suivante :

$$(1) \qquad [2\alpha y + (x-\alpha)\beta] = (\alpha^2 - c^2)(\alpha - 3x),$$

$$(2) \qquad \begin{cases} 2y(A\beta^2 - B\alpha^2) + 2x\alpha\beta(3A - B) \\ = [A\beta^2 + (3A - 2B)\alpha^2 - Ac^2]\beta, \end{cases}$$

$$(3) \qquad C - B\alpha^2 = A\beta^2.$$

Multipliant (1) et (3) membre à membre, on obtient

$$(4) \qquad \beta = \frac{(C - B\alpha^2)\,2y\alpha}{A(\alpha^2 - c^2)(\alpha - 3x) - (C - B\alpha^2)(x - \alpha)}.$$

Remplaçant $A\beta^2$ par sa valeur dans l'équation (2), on a aussi

$$(5) \qquad \beta = \frac{2y(C - 2B\alpha^2)}{3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2}.$$

En égalant les valeurs (4) et (5) de β et remplaçant β par sa valeur (4) dans l'équation (3), on a les deux équations suivantes entre α, x, y :

$$(6) \begin{cases} B(A - B)\alpha^5 + [ABc^2 - (2A - B)C]\alpha^3 \\ - [6ABc^2 - C(3A + B)]x\alpha^2 + C(3Ac^2 - C)x = 0, \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 4Ay^2(C - 2B\alpha^2)^2 \\ = (C - B\alpha^2)[3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2]^2. \end{cases}$$

D'où l'on déduit les deux équations

$$(8) \quad x = \frac{P\alpha^5 + Q\alpha^3}{R\alpha^2 - S},$$

$$(9) \; y^2 = \frac{(C - B\alpha^2)[3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2]^2}{4A(C - 2B\alpha^2)^2}.$$

Chaque valeur de α donnera une valeur pour x et deux valeurs égales et de signe contraire pour y; la courbe est

donc de degré pair et symétrique relativement à l'axe des x. De plus, pour que x ait une valeur déterminée, α nous sera donné par une équation du cinquième degré, aura donc cinq valeurs : de sorte que pour une valeur de x, y pourra donc avoir dix valeurs différentes. Mais si l'on remplace x par sa valeur (8) dans l'équation (9), on verra qu'une valeur positive ou négative de y pourra être donnée par quatorze valeurs de α, car alors l'équation (9) sera du quatorzième degré en α. Donc pour quatorze valeurs de α, et de x par conséquent, y pourra avoir deux valeurs égales et de signe contraire, ce qui peut faire vingt-huit valeurs différentes : l'équation de l'enveloppe peut donc être considérée comme étant du vingt-huitième degré.

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 389

(voir p. 369);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

Soient m, n, p, q, r des nombres entiers positifs non nuls; si, $[m]$ représentant le produit des nombres entiers différents qui ne dépassent pas m, on convient de remplacer le symbole $[o]$ par 1 et $\frac{1}{[-m]}$ par zéro, on a

$$(1) \qquad \frac{d^n(x^m)}{dx^n} = \frac{[m]}{[m-n]} x^{m-n};$$

i et o étant fonctions de x, on a

$$(2) \qquad \frac{d^p(uv)}{dx^p} = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{[p]}{[i][p-i]} \frac{d^i v}{dx^i} \cdot \frac{d^{p-i} u}{dx^{p-i}}.$$

Posons

$$u = x^q, \quad v = x^r;$$

l'égalité (2), en divisant les membres par x^{q+r-p}, devient

$$\frac{[q+r]}{[q+r-p]} = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{[p]}{[i][p-i]} \cdot \frac{[r]}{[r-i]} \cdot \frac{[q]}{[q-p+r]},$$

ou bien

$$\frac{[q+r]}{[q+r-p][p]} = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{[r]}{[i][r-i]} \cdot \frac{[q]}{[p-i][q-p+i]},$$

en supposant égaux les nombres p, q, r

$$\frac{[2p]}{[p][p]} = \sum_{i=0}^{i=p} \left(\frac{[p]}{[i][p-i]}\right).$$

C. Q. F. D.

COMPOSITIONS POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1857.

Solution d'une équation transcendante;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur à Carcassonne.

$$x = A \sin x + B.$$

Cette équation a pour racines les abscisses des intersections de la ligne droite

(1) $$Ay = x - B$$

et de la sinusoïde

(2) $$y = \sin x.$$

On dessinera une fois pour toutes la ligne (2) qui est bien connue, et quand les coefficients A, B seront donnés,

on tracera la droite (1); les intersections sont en général nettement indiquées, et si elles ne l'étaient pas pour deux points voisins, on construirait sur une échelle plus grande l'arc de courbe qui contient ces points. Ayant ainsi obtenu une première valeur de chaque racine, on appliquera les méthodes connues d'approximation.

Discussion. Nous laissons de côté le cas tout exceptionnel où $A = \infty$, $B = \infty$, $\frac{A}{B} = -\alpha$; l'équation se réduit alors à

$$\sin x - \alpha = 0.$$

En appelant x' le plus petit arc positif dont le sinus est α, les solutions en nombre infini sont comprises dans les formules

$$2k\pi + x', \quad (2k+1)\pi - x'.$$

Nous laissons encore de coté l'hypothèse $A = 0$ que donnerait $x = B$.

Si A était négatif, nous poserions

$$A = -A', \quad B = B' + \pi, \quad x = x' + \pi;$$

l'équation proposée devient

$$x = A' \sin x' + B',$$

de sorte que nous n'avons à considérer que des valeurs finies et positives de A.

Premier cas. $A < 1$. Le coefficient angulaire de la droite (1) est plus grand que 1; il n'y a qu'une racine.

Je pose

$$B = k\pi + \alpha;$$

k étant un nombre entier positif ou négatif, α étant compris entre 0 et π, et

$$F(x) = x - A \sin x - B.$$

En substituant $k\pi$ et $(k+1)\pi$ dans $F(x)$, on trouve des résultats de signes contraires; l'unique racine est

donc comprise ainsi que B entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$. B sera une première valeur approchée. On appliquera ensuite la méthode de Newton ou celle des approximations successives qui réussit ici :

$$x_1 = A \sin B + B,$$
$$x_2 = A \sin x_1 + B,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on porte la valeur de x_1 dans x_2, on trouve

$$x_2 = A \sin (A \sin B + B) + B.$$

On développe le sinus et on introduit sin (A sinB) et cos (A sin B) que l'on remplace par les premiers termes de leur valeur en séries, réductions faites, en négligeant les puissances de A supérieures à la seconde on obtient

$$x = B + A \sin B + \frac{1}{2} A^2 \sin^2 B.$$

Voyez d'ailleurs l'*Algèbre* de M. Bertrand, 2ᵉ édition, page 404 et la *Mécanique* de M. Duhamel, 2ᵉ édition, tome II, page 66.

Deuxième cas. $A = 1$. Si de plus $B = k\pi$, il y a une racine triple $x = B$.

En général, il y a une racine unique comprise entre $B - 1$ et $B + 1$,

Troisième cas. $A > 1$. x est compris entre $A + B$ et $-A + B$; des considérations géométriques simples montrent que :

1°. Le nombre de racines est impair ;

2°. La courbe (2) est formée de parties qui se reproduisent et que j'appelle *arcs périodiques ;*

3°. Chaque arc périodique complet ne peut renfermer que deux intersections situées sur le même demi-axe, lorsque la droite (1) ne coupe pas l'axe des x entre les extrémités de l'arc périodique :

4°. L'arc périodique complet entre les extrémités duquel la droite (1) coupe l'axe des x renferme trois intersections;

5°. Si dans chaque demi-axe périodique contenant deux intersections on mène un tangente parallèle à la droite (1), le point de contact dont l'abscisse satisfait à l'équation

$$A \cos x = 1$$

sépare les deux intersections.

Les racines seront donc facilement séparées et comptées.

Dans le cas particulier où $B = k\pi$, l'une des racines est B; les autres, prises deux à deux, ont B pour moyenne arithmétique.

Application numérique.

$$x = 3,142 \sin x + 1,57.$$

On peut encore écrire

$$x = \pi \sin x + \frac{\pi}{2}.$$

Il y a une racine positive comprise $\frac{\pi}{2}$ et π, une racine négative égale à $-\frac{\pi}{2}$ et une autre racine négative comprise entre 0 et l'arc qui a pour cosinus 0,3183, c'est-à-dire 71° 27'.

La construction graphique montre que la racine positive est environ 2,7 ou en degrés 157°.

Les deux racines négatives ont sensiblement pour moyenne arithmétique l'abscisse du point de contact de la tangente qui les sépare ou 71° 27'. L'une des racines étant 90 degrés, l'autre sera sensiblement 52° 54'.

Il reste à traduire ces arcs en nombre, à appliquer la méthode de Newton et à vérifier le résultat, opérations faciles sur lesquelles nous n'insistons pas.

SOLUTION DE LA QUESTION 390

(voir p. 184);

PAR M. GUSTAVE MICHAUX,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouché).

Soit AEFD un rectangle; de F on abaisse une perpendiculaire FG sur la diagonale DE; par G on mène une parallèle au côté EF rencontrant le côté AE en C et une parallèle GB au côté DF rencontrant AD en B. Faisons

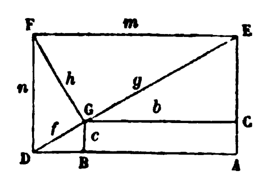
$$\mathrm{EF} = m, \quad \mathrm{DF} = n, \quad \mathrm{DE} = d, \quad \mathrm{EG} = h,$$
$$\mathrm{CG} = b, \quad \mathrm{BG} = c, \quad \mathrm{DG} = f, \quad \mathrm{EG} = g,$$

on a

$$h^3 = bcd, \quad d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}, \quad d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

(H. MONTUCCI, professeur au lycée Saint-Louis.)

Il est d'abord facile de voir que les divers triangles de la figure sont tous semblables. En effet les deux triangles



DFG, EFG sont déjà semblables au triangle DFE, puisque la ligne FG $= h$ est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse. D'un autre côté, le triangle GCE est aussi semblable au triangle DEA, et par suite à son égal DFE, car GC est parallèle à DA : de même le triangle DGB est semblable au triangle DFA, à cause du parallélisme des droites GB, EA. On voit en outre que tous ces triangles sont rectangles.

Cela posé, il est aisé de démontrer les trois relations en question.

1°. $h^3 = bcd.$

Le triangle DFE donne la relation connue

$$h^2 = fg.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par h,

$$h^3 = fgh.$$

Or les triangles semblables GEC, DEA donnent

$$\frac{g}{b} = \frac{d}{m},$$

d'où

$$g = \frac{bd}{m},$$

et, en remplaçant,

$$h^3 = bd\frac{fh}{m}.$$

Enfin, de la similitude des triangles DBG, FGE résulte l'égalité

$$\frac{c}{f} = \frac{h}{m},$$

d'où

$$c = \frac{fh}{m}.$$

La relation

$$h^3 = bd\frac{fh}{m}$$

se réduit ainsi à

$$h^3 = bcd.$$

C. Q. F. D

2°. $d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}.$

L'égalité

$$\frac{g}{b} = \frac{d}{m},$$

établie précédemment, donne

$$d = \frac{mg}{b},$$

d'où

$$d^2 = \frac{m^2 g^2}{b^2}.$$

De la similitude des triangles GEC, GEF résulte aussi l'égalité

$$\frac{b}{g} = \frac{g}{m},$$

d'où

$$g^2 = mb.$$

Remplaçant g^2 par cette valeur dans l'expression de x^2, il vient

$$d^2 = \frac{m^3 b}{b^2} = \frac{m^3}{b}.$$

On aurait de même, à cause de la similitude des triangles DBG, DEA,

$$\frac{d}{f} = \frac{n}{c},$$

d'où

$$d = \frac{nf}{c} \quad \text{et} \quad d^2 = \frac{n^2 f^2}{c^2};$$

ou bien, à cause de la relation

$$\frac{c}{f} = \frac{f}{n}$$

(qui résulte de la similitude des triangles DBG, DFG).

$$d^2 = \frac{n^3 c}{c^2} = \frac{n^3}{c}.$$

Donc

$$\frac{m^3}{b} = \frac{n^3}{c},$$

d'où, en extrayant la racine cubique des deux membres,

$$\frac{m}{\sqrt[3]{b}} = \frac{n}{\sqrt[3]{c}};$$

et enfin, en élevant au carré les deux membres,

$$\frac{m^2}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{n^2}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

On déduit de là

$$\sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{b^2} \cdot \frac{n^2}{m^2};$$

de sorte que le binôme

$$\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt[3]{b^2} + \frac{n^2}{m^2}\sqrt[3]{b^2}$$

ou

$$\sqrt[3]{b^2}\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right) = \sqrt[3]{b^2}\left(\frac{m^2 + n^2}{n^2}\right) = \sqrt[3]{b^2}\,\frac{d^2}{m^2},$$

car

$$d^2 = m^2 + n^2.$$

Mais

$$d^2 = \frac{m^3}{b};$$

donc

$$\sqrt[3]{b^2}\,\frac{d^2}{m^2} = \sqrt[3]{b^2}\,\frac{m^3}{bm^2} = \sqrt[3]{b^2}\,\frac{m}{b} = \sqrt[3]{\frac{bm^3}{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{m^3}{b}} = \sqrt[3]{d^2}.$$

Donc enfin

$$\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{d^2}$$

ou bien

$$d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}.$$

C. Q. F. D.

3°. $d^2 - b^2 - c^2 = 3fg$.

On a, d'après le théorème de Pythagore, les trois équations

$$d^2 = m^2 + n^2,$$
$$b^2 = g^2 - (n - c)^2 = g^2 - (n^2 + c^2 - 2mc),$$
$$c^2 = f^2 - (m - b)^2 = f^2 - (m^2 + b^2 - 2mb).$$

Retranchant membre à membre les deux dernières équations de la première, il vient

$$d^2 - b^2 - c^2 = m^2 + n^2 - g^2 + n^2 + c^2 - 2nc - f^2$$
$$+ m^2 + b^2 - 2mb;$$

d'ailleurs

$$d = f + g,$$

donc

$$f^2 + g^2 = d^2 - 2fg,$$

ou, en remplaçant,

$$d^2 - b^2 - c^2 = 2m^2 + 2n^2 - d^2 + 2fg + b^2 + c^2 - 2nc - 2nb,$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$d^2 - b^2 - c^2 = m^2 + n^2 - mb - nc + fg.$$

Mais nous avons vu plus haut que

$$mb = g^2, \quad nb = f^2;$$

donc

$$m^2 - mb = m^2 - g^2 = h^2, \quad n^2 - nc = n^2 - f^2 = h^2,$$

et comme $h^2 = fg$, il vient enfin

$$d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

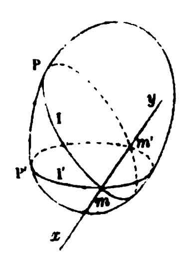
C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 319

(voir tome XV, page 52);

PAR M. P. CHALLIOT,
Élève au lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Deux plans P et P′ coupent une surface suivant deux courbes I et I′; la projection de la courbe I sur le plan P′



sera tangente à la courbe I′ au point où la trace de P sur P′ pourra couper I′, si les coordonnées de ces points satisfont à l'équation

$$D_z . F = 0$$

déduite de l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

de la surface par rapport à trois axes rectangulaires dont deux, ceux sur lesquels on compte les x et les y, doivent être dirigés dans le plan P′.

La condition

$$D_z . F = 0,$$

nécessaire et suffisante pour que le contact dont il s'agit ait lieu, est remplie pour les surfaces du deuxième ordre quand P′ est un plan principal. (DIEU.)

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface.

Je prends le plan P′ pour plan des x, y.

L'équation de la courbe I′ s'obtiendra en faisant $z = 0$ dans l'équation de la surface

$$F(x, y) = 0.$$

Soient $x', y', 0$ les coordonnées d'un des points m, où la trace xy du plan P sur le plan P′ coupe la courbe I′. Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe I′ au point m sera

$$\alpha = -\frac{F'_x(x', y')}{F'_y(x', y')}.$$

Soit

$$z = mx + ny + p$$

l'équation du plan P. L'équation de la projection de la courbe I sur le plan P′ s'obtiendra par l'élimination de z entre les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad z = mx + ny + p.$$

Pour avoir le coefficient angulaire de la tangente à cette projection au point m, appliquons le théorème des fonctions implicites, on aura

$$\alpha' = -\frac{F'_x(x', y') + mF'_z(x', y', 0)}{F'_y(x', y') + nF'_z(x', y', 0)}.$$

Comme par hypothèse

$$F'_z(x', y', 0) = 0,$$

il s'ensuit que $\alpha = \alpha'$. Les deux tangentes ayant un point commun et même coefficient angulaire, coïncident.

Je dis en second lieu que la condition

$$F'_z = 0$$

est remplie pour les surfaces du deuxième ordre quand P′ est un plan principal.

Je rapporte la surface à ce plan et à une droite qui lui soit perpendiculaire. L'équation ne devra pas contenir de termes en z, première puissance. Elle sera de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0.$$

Prenant la dérivée par rapport à z, j'aurai

$$F'_z = 2A''z,$$

et comme le point de contact en question est dans le plan des x, y, on a

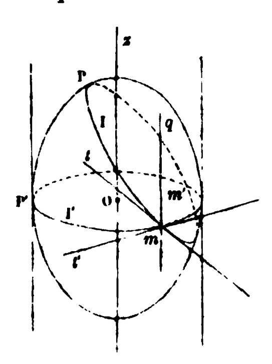
$$z' = 0,$$

donc

$$F'_z = 0.$$

Le théorème précédent peut se vérifier géométriquement pour les surfaces du second ordre.

Si par les différents points de la section principale P′mm', on mène des parallèles à l'axe des z, ces droites



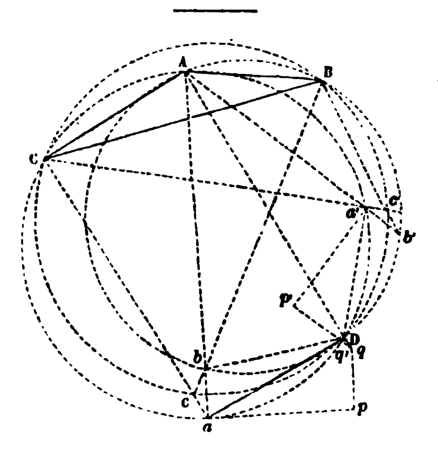
seront perpendiculaires au plan P′. Toutes ces parallèles

forment une surface cylindrique tangente à la surface du deuxième ordre. Si par la génératrice mq on fait passer un plan tangent à la surface cylindrique, il le sera en même temps à la surface proposée. Ce plan coupe le plan P' suivant une tangente mt' à la courbe I', et le plan P suivant mt tangente à I. Or la projection de cette dernière tangente est tangente à la projection de I, et comme mt est dans un plan qmt' perpendiculaire au plan P', elle se projette suivant la trace mt'.

TOPOGRAPHIE.

DÉTERMINATION D'UN POINT PAR TROIS AUTRES POINTS CONNUS;

Par M. POUDRA.



Ce problème dit de Pothenot se résout ordinairement par la construction de trois segments de cercle capables des angles observés. Cette solution n'est pas facile à employer sur le terrain, les circonférences à décrire sont trop grandes. Voici une construction qui me semble plus commode.

La planchette ayant été placée horizontalement, on l'oriente à peu près, et on vise avec l'alidade les trois points connus A, B, C : on obtient trois droites Aba, Bbc, Cca. Si l'orientation de la planchette était exacte, ces trois droites se couperaient en un seul et même point D qui serait le point cherché. Dans le cas contraire, on obtient un petit triangle d'erreur abc; on change alors un peu l'orientation de la planchette, et, par le même procédé, on obtient alors un autre petit triangle $a'b'c'$.

Si l'on décrivait sur AB comme corde un segment capable de l'angle $A\hat{b}B$, il passerait par b et b'. Le segment sur CB, capable de l'angle $B\hat{c}C$, passerait par c et c'. Enfin le segment décrit sur AC, capable de l'angle $A\hat{a}C$, passerait par a et a'. Ces trois segments se couperaient en un seul et même point D qui serait le point cherché; mais il résulte évidemment de cette construction que non-seulement les petits triangles abc, $a'b'c'$ sont semblables, mais que les triangles Dab, Dac, Dbc sont respectivement semblables aux triangles D$a'b'$, D$a'c'$, D$b'c'$. D'où résulte que le quadrilatère Dabc est semblable au quadrilatère D$a'b'c'$, et comme les trois points a, b, c du premier sont déterminés de position, ainsi que les points a', b', c' du second, il en résulte que le point D commun est déterminé.

Pour l'obtenir, on élève à Aa une perpendiculaire ap égale à un nombre quelconque de fois ab. De même en a' on élève à Aa' la perpendiculaire $a'p'$ égale au même nombre de fois $a'b'$, puis par p on mène une parallèle pq à Aa et par p' une parallèle $p'q'$ à A$'a$. Ces deux droites se coupent en un point q, et la droite Aq doit contenir le point D cherché. On trouverait de même des droites BD et CD passant par ce même point D. Donc il est déterminé.

QUESTIONS.

396. Par le sommet A d'un triangle plan ABC, mener une droite telle, que les perpendiculaires BB', CC' abaissées respectivement des sommets B et C sur cette droite, forment deux triangles rectangles ABB', ACC' *équivalents.*

397. Discuter la courbe du quatrième degré donnée par l'équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}.$$

(MONTUCCI.)

398. Soient donnés un tétraèdre quelconque *abcd* et dans son intérieur un point *o* tel, que les droites *oa*, *ob*, *oc* déterminent un angle trirectangle; je prolonge les droites *oa*, *ob*, *oc*, *od* jusqu'en *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, où elles coupent les faces opposées aux points *a*, *b*, *c*, *d*. On a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa} + \frac{1}{oa'}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{ob} + \frac{1}{ob'}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{oc} + \frac{1}{oc'}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{od} + \frac{1}{od'}\right)^2}.$$

(MANNHEIM.) (*)

(*) Voici la rectification d'un énoncé qui n'a pas été exactement inséré en février 1856.

En conservant les notations employées, on doit lire

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right)^2}.$$

Cette dernière partie et le théorème sur le tétraèdre que je viens d'énoncer sont complétement analogues.

399. Les données restant les mêmes, je mène par le point o des plans parallèles aux faces du tétraèdre, ces plans déterminent dans chaque angle trièdre des parallélipipèdes dont je désigne les volumes par P_a, P_b, P_c, P_d. On a

$$\left(\frac{oa}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{ob}{P_b}\right)^2 + \left(\frac{oc}{P_c}\right)^2 = \left(\frac{od}{P_d}\right)^2.$$

(Mannheim.)

400. Soit u une fonction *rationnelle* et *entière* du degré n d'un nombre *quelconque* de variables x, y, z, etc., et soient du, $d^2 u, \ldots, d^n u$ les différentielles successives qu'on obtient, mais en supposant que dx, dy, dz, etc., sont *constantes* (*). Formons l'équation

$$\begin{aligned} t^n d^n u + u t^{n-1} d^{n-1} u + n(n-1) t^{n-2} d^{n-2} u \\ + n.\overline{n-1}.\overline{n-2}\, t^{n-3} d^{n-3} u + \ldots \\ + n.\overline{n-1}\,\overline{n-2} \ldots 2\, t\, du \\ + n.\overline{n-1}.\overline{n-2} \ldots 2.1\, u = 0. \end{aligned}$$

Formons une fonction symétrique *quelconque* rationnelle et entière des *différences* des racines de cette équation ; sa valeur est une fonction entière des coefficients $d^n u$, $d^{n-1} u$, $d^{n-2} u, \ldots, du$, u, et par conséquent une fonction de x, y, $z, \ldots$, dx, dy, dz ; si l'on différentie cette dernière fonction en traitant dx, dy, $dz, \ldots$, comme des constantes, on trouve un résultat *identiquement* nul.

(Michael Roberts.)

Note du Rédacteur.

Exemple. Soit

$$n = 2$$

et

$$\begin{aligned} u &= ax^2 + by^2 + cz^2, \\ du &= 2(axdx + bydy + czdz), \\ d^2 u &= 2(adx^2 + bdy^2 + cdz^2), \end{aligned}$$

(*) Alors du renferme dx, dy, dz, $d^2 u$ renferme dx^2, $dydx$, dy^2, etc., et $d^{n+1} = 0$.

l'équation en t est

$$t^2 d^2u + 2tdu + 2u = 0.$$

Choisissons pour fonction symétrique la somme des carrés des différences des racines ; cette somme est

$$4(du^2 - 2ud^2u)$$
$$= -16\left[\begin{array}{l} ab(xdy - ydx^2) + ac(xdz - zdx)^2 \\ + bc(ydz - zdy)^2 \end{array}\right];$$

différentiant cette valeur en regardant dx, dy, dz comme constants, le résultat est identiquement nul.

NOTE SUR DEUX QUESTIONS

énoncées p. 109 ;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Trouver le rayon de la base supérieure d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base inférieure égale le rayon R d'une sphère donnée et que le volume du tronc de cône et celui de la sphère sont dans un rapport donné m.

Enoncé *incomplet*. Au lieu de *sphère donnée*, il faut peut-être lire : *cône donné de même hauteur*.

L'équation du problème rectifié serait

$$x^2 + Rx + R^2(1 - m) = 0.$$

Discussion. $m < \frac{3}{4}$, racines imaginaires. Problème impossible.

$m = \frac{3}{4}$, racines égales ; $x = -\frac{R}{2}$. Pas de solution directe. Solution indirecte en imaginant un cône droit à base circulaire coupé par un plan parallèle à sa base,

comme dans le cas du tronc de cône ordinaire, mais de l'autre côté du sommet de manière à figurer deux cônes opposés par le sommet. Le plus petit de ces cônes aurait pour rayon $\frac{R}{2}$ et la somme des deux aurait le volume demandé.

$1 > m > \frac{3}{4}$, racines négatives. Deux solutions indirectes.

$m = 1$, une racine négative et une racine nulle. Une solution indirecte et une solution directe donnant un cône proprement dit.

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Le produit de quatre nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

Soit $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ le produit considéré.

On a

$$(n+1)(n+4) = n^2 + 5n + 4$$

et

$$(n+2)(n+3) = n^2 + 5n + 6;$$

donc

$$(n+2)(n+3) = (n+1)(n+4) + 2.$$

D'ailleurs $(n+1)(n+4)$ est en nombre pair.

En posant

$$(n+1)(n+4) = 2p,$$

il viendra

$$(n+2)(n+3) = 2p + 2 = 2(p+1),$$

et, par suite,

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 2p \times 2(p+1) = 4p(p+1).$$

Or le produit $p(p+1)$ de deux nombres entiers consécutifs ne peut être un carré; donc il en est de même de $4p(p+1)$ ou du produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ de quatre nombres entiers consécutifs. G.

Remarque. En admettant ce principe que : *si* p *est un nombre premier, il y a au moins un autre nombre premier compris entre* p *et* 2p, il est clair que le produit $1.2.3...n$ ne peut être un carré; car en désignant par p le plus grand nombre premier de la suite $1, 2, 3,..., n$, on aura $n < 2p$, et, par conséquent, le nombre premier p n'entrera qu'à la première puissance dans le produit $1.2.3...n$; donc ce produit ne sera pas un carré. G.

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$a^x - b^y = 1,$$

a et *b* étant des nombres premiers.

Je distingue ces deux cas : $a = 2$, $a > 2$.

1°. $a = 2$. L'équation à résoudre est

$$2^x - b^y = 1.$$

On en tire successivement :

$$2(2^{x-1} - 1) = b^y - 1 = (b-1)(b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1);$$

$$2^{x-1} - 1 = \frac{b-1}{2}(b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1).$$

Cette dernière équation montre que

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1$$

doit être un nombre impair. Et comme le nombre des

termes de

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1$$

est y et qu'en outre le nombre premier b est impair, il faut que y soit aussi un nombre impair. Il en résulte que $b^y + 1$ est exactement divisible par $b + 1$: mais

$$b^y + 1 = 2^x;$$

donc 2^x est divisible par $b + 1$, ce qui exige que $b + 1$ soit une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier b ait la forme $2^n - 1$.

En divisant par $b + 1$ les deux membres de l'équation proposée

$$b^y + 1 = 2^x,$$

elle se transforme en celle-ci :

$$b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} - \ldots + b^2 - b + 1$$
$$= \frac{2^x}{b+1} = \frac{2^x}{2^n} = 2^{x-n}.$$

Or $b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} + \ldots + b^2 - b + 1$ est nécessairement un nombre impair, puisque b et y sont impairs; donc il faut qu'on ait

$$2^{x-n} = 1,$$

d'où

$$x = n,$$

et, par suite,

$$y = 1.$$

De ce qui précède, nous concluons que l'équation proposée

$$2^x - b^y = 1$$

n'a aucune solution entière si le nombre premier b n'a pas la forme $2^n - 1$, et que si b a cette forme, l'équation admet une solution entière et une seule qui est

$$x = n, \quad y = 1.$$

2°. $a > 2$. L'équation

$$a^x - b^y = 1$$

donne

$$a^x - 1 = b^y:$$

mais $a^x - 1$ est un nombre pair; donc

$$b = 2.$$

D'ailleurs b^y est exactement divisible par $a - 1$; par conséquent $(a - 1)$ est une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier a doit avoir la forme $2^n + 1$. Ces deux conditions étant supposées remplies, l'équation proposée devient

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1;$$

elle est vérifiée par

$$x = 1, \quad y = n;$$

il reste à examiner si elle peut avoir d'autres solutions entières.

Supposons que l'équation

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1$$

ou

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y$$

puisse admettre une solution entière dans laquelle on ait $x > 1$, la valeur correspondante de y sera évidemment plus grande que n, et en divisant par $(2^n + 1) - 1$ les deux membres de

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y,$$

il en résultera cette nouvelle équation

$$(2^n + 1)^{x-1} + (2^n + 1)^{x-2} + \ldots + (2^n + 1) + 1 = \frac{2^y}{2^n} = 2^{y-n},$$

dont le second membre sera un nombre pair. Il en sera

de même du premier, et il faudra que x soit aussi un nombre pair. Dans ce cas, $(2n+1)^x - 1$ est exactement divisible par $(2^n+1)+1$ ou $2(2^{n-1}+1)$. Donc $2^{n-1}+1$ devra diviser 2^y, ce qui entraîne la condition $n=1$. En supposant qu'elle soit remplie, l'équation proposée devient

$$3^x - 1 = 2^y \quad \text{ou} \quad 2^y + 1 = 3^x.$$

On voit que y doit être impair, puisque 2^y+1 admet le diviseur 3 ou $2+1$. En effectuant la division des deux membres par $2+1$, on a

$$2^{y-1} - 2^{y-2} + 2^{y-3} - 2^{y-4} + \ldots + 2^2 - 2 + 1 = 3^{x-1},$$

d'où

$$(2^{y-1}-1) - (2^{y-2}+1) + (2^{y-3}-1) - \ldots + (2^2-1)$$
$$-(2+1) + y = 3^{x-1}.$$

Mais les différences

$$(2^{y-1}-1),\ (2^{y-2}+1),\ (2^{y-3}-1),\ldots$$

sont des multiples de 3, donc y est multiple de 3; et comme x est pair, on pourra poser

$$y = 3y',\quad x = 2x'\ (*):$$

il s'ensuivra

$$3^{2x'} - 1 = 2^{3y'} \quad \text{ou} \quad 9^{x'} - 1 = 8^{y'}.$$

Cette dernière équation n'admet que la solution entière

$$x' = 1,\quad y' = 1.$$

En effet, x' ne peut être un nombre pair, puisque $8^{y'}$

(*) En général, dans l'équation

$$(a+1)^x - a^y = 1,$$

l'inconnue x ne peut admettre pour valeur entière, différente de l'unité, qu'un multiple de a, et toute valeur entière de y plus grande que l'unité est nécessairement multiple de $a+1$.

n'est pas divisible par $9+1$ ou 10. Il est de même impossible que x' soit un nombre impair plus grand que l'unité. Car, si cela était, y' sera aussi plus grand que l'unité, et en divisant par 8 les deux membres de $9^{x'}-1=8^{y'}$, on aurait

$$9^{x'-1}+9^{x'-2}+\ldots+9+1=8^{y'-1},$$

égalité qui exprime qu'un nombre impair

$$9^{x'-1}+9^{x'-2}+\ldots+9+1$$

est un multiple de 8. Donc la seule valeur entière que x' puisse avoir est

$$x'=1,$$

d'où

$$y'=1,\quad x=2,\quad y=3.$$

Au résumé, lorsque le nombre premier a est plus grand que 2, il faut pour que l'équation

$$a^x-b^y=1$$

ait une solution entière, que $b=2$, et qu'en outre a soit de la forme 2^n+1. Quand ces deux conditions sont remplies, l'équation admettra la solution entière

$$x=1,\quad y=n;$$

et elle n'en aura pas d'autre si n est différent de l'unité. Mais si $n=1$, l'équation admettra les deux solutions

$$x=1,\quad y=1\quad \text{et}\quad x=2,\quad y=3.$$

FORMULE D'ABEL (Fin d'un premier article)

(voir page 287).

En supposant

$$a=-x,$$

la formule (1) (p. 237) donne

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = x^{m-1} - m\,(x+\beta)^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.2}\,(x+2\beta)^{m-1} \\ - \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}\,(x+3\beta)^{m-1} + \ldots \\ \mp m\,[x+(m-1)\,\beta]^{m-1} \pm (x+m\beta)^{m-1}. \end{aligned} \right.$$

Si dans cette dernière on remplace x par $x+\beta$ et qu'on change les signes des termes de l'équation résultante, il viendra

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = -(x+\beta)^{m-1} + m(x+2\beta)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}\,(x+3\beta)^{m-1} \\ + \frac{m\,(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,(x+4\beta)^{m-1} - \ldots \\ \pm m\,(x+m\beta)^{m-1} \mp [x+(m+1)\,\beta]^{m-1}. \end{aligned} \right.$$

En additionnant les égalités (2) et (3), on trouve

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = x^{m-1} - (m+1)(x+\beta)^{m-1} + \frac{(m+1)\,m}{1.2}\,(x+2\beta)^{m-1} \\ - \frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1.2.3}\,(x+3\beta)^{m-1} + \ldots \\ \pm (m+1)\,(x+m\beta)^{m-1} \mp [x+(m+1)\beta]^{m-1}. \end{aligned} \right.$$

En faisant le même calcul sur l'équation (4), on trouvera évidemment

$$\begin{aligned} 0 = x^{m-1} - (m+2)\,(x+b)^{m-1} + \frac{(m+2)\,(m+1)}{1.2}\,(x+2\beta)^{m-1} \\ - \frac{(m+2)(m+1)\,m}{1.2.3}\,(x+3\beta)^{m-1} + \ldots \\ \mp (m+2)\,[x+(m+1)\beta]^{m-1} \pm [x+(m+2)\beta]^{m-1}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On a donc généralement, en désignant

par n un nombre entier quelconque plus grand que m,

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = x^m - n(x+6)^m + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(x+26)^m \\ \qquad - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+36)^m + \ldots \\ \qquad \mp n[x+(n-1)6]^m \pm (x+n6)^m; \end{cases}$$

ce qui établit une relation entre les puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, en admettant toutefois que le nombre de ces termes surpasse de deux unités, au moins, le degré de la puissance qui leur est commune (*).

Si l'on pose

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 6 = 1,$$

l'équation (5) devient

$$0 = n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m + \ldots,$$

formule connue, que nous n'avons rappelée ici qu'afin de montrer qu'elle est implicitement comprise dans la formule d'Abel.

(*) Le second membre de l'équation (5) est, au signe près, la différence $n^{ième}$ de la fonction x^m dans laquelle on donne à la variable des accroissements successifs égaux à 6. Or on suppose $n > m$, donc cette différence doit être nulle quelles que soient les valeurs de x et de 6.

G.

QUESTIONS.

401. On projette un point d'une ellipse sur ses deux axes; démontrer que l'enveloppe de la droite qui joint les deux projections est la développée d'une ellipse.

Même question pour l'hyperbole.

402. On projette orthogonalement un point d'un ellipsoïde sur ses trois plans principaux; trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois points.

Même question pour les deux hyperboloïdes.

403. Écrire l'équation d'un faisceau de surfaces qui passent par le point (x', y', z') et par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

404. Deux points matériels parcourent d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données en grandeur et en direction, deux droites situées dans l'espace; trouver l'équation de la surface décrite par la droite variable qui passe par deux positions simultanées des points matériels.

405. Étant donnée l'équation

$$(x^3 + y^3 - z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z') \\ = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

comment trouver les valeurs de X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z'. (MICHAEL ROBERTS.)

406. Soient

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

les équations rendues homogènes de trois cercles, l'équa-

tion du cercle qui coupe ces trois cercles à angle droit est donnée par cette relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

(Rév. GEORGE SALMON.)

Observation. On rend une équation homogène en remplaçant x, y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, et on fait finalement $z = 1$. $\frac{dU_1}{dx}$ est la dérivée de U_1 par rapport à x; de même $\frac{dU_1}{dy}$, etc. Les barres désignent un déterminant.

407. Etant données deux coniques dans un même plan, le lieu d'un point tel, que les quatre tangentes menées de ce point aux quatre coniques forment un faisceau harmonique est une conique. (Rév. GEORGE SALMON.)

408. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 \end{vmatrix} = a_1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \ldots & & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \ldots & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_3 \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

409. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 + a_2 + a_1 a_2,$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_2 \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 \ldots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

410. Si l'on désigne par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos n\alpha_0 & \cos(n-1)\alpha_0 & \cos(n-2)\alpha_0 \ldots & \cos 0\alpha_0 \\ \cos n\alpha_1 & \cos(n-1)\alpha_1 & \cos(n-2)\alpha_1 \ldots & \cos 0\alpha_1 \\ \cos n\alpha_2 & \cos(n-1)\alpha_2 & \cos(n-2)\alpha_2 \ldots & \cos 0\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos n\alpha_n & \cos(n-1)\alpha_n & \cos(n-2)\alpha_n \ldots & \cos 0\alpha_n \end{vmatrix}$$

et par D_1 e déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos^n\alpha_0 & \cos^{n-1}\alpha_0 & \cos^{n-2}\alpha_0 \ldots & \cos^0\alpha_0 \\ \cos^n\alpha_1 & \cos^{n-1}\alpha_1 & \cos^{n-2}\alpha_1 \ldots & \cos^0\alpha_1 \\ \cos^n\alpha_2 & \cos^{n-1}\alpha_2 & \cos^{n-2}\alpha_2 \ldots & \cos^0\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos^n\alpha_n & \cos^{n-1}\alpha_n & \cos^{n-2}\alpha_n \ldots & \cos_0\alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1.$$

(PROUHET.)

411. Si l'on désigne par D_2 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 \ldots & \sin\alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 \ldots & \sin\alpha_1 \\ \sin(n+1)\alpha_2 & \sin n\alpha_2 \ldots & \sin\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n \ldots & \sin\alpha_n \end{vmatrix},$$

on aura

$$D_2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n D_1.$$

(PROUHET.)

412. En adoptant la notation bien commode de M. Cayley, posons l'équation

$$(a, b, c, d, e, f, g, \ldots)(x, 1)^n = 0$$

dont les racines sont $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Démontrer les formules suivantes

$$2a^4 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 = n^2 (n-1)(n-2)$$
$$\times \left\{ n^2 (b^2 - ac)^2 + \frac{n-3}{6} a^2 (ae - 4bd + 3c^2) \right\},$$

$$6a^6 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 = n^2 (n-1)(n-2)$$
$$\times \left\{ \begin{array}{l} n^4 (n-3)(b^2 - ac)^3 + \dfrac{n^2}{2}(n^2 - 5n + 8) a^2 (b^2 - ac) \\ \times (ae - 4bd + 3c^2) \\ -\dfrac{n}{2}(7n - 15) a^3 (ad^2 + eb^2 + c^3 - 2bcd - ace) \\ -\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5) a^4}{60} \\ \times (ag + 15ec - 10d^2 - 6bf). \end{array} \right\}.$$

Il est très-digne de remarque que la quantité

$$ag + 15ec - 10d^2 - 6bf$$

est un invariant pour les fonctions homogènes à deux variables du sixième degré.

(MICHAEL ROBERTS.)

Note du Rédacteur. La fonction homogène à deux variables de degré n peut évidemment s'écrire sous la forme

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n.n-1}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a_3 x^3 y^3 + \ldots + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = \mathrm{F}.$$

C'est cette forme que M. Cayley représente d'une manière si expressive et si mnémonique par

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

Si l'on fait

$$y = 1,$$

on a une expression à une variable; le révérend M. Roberts a remplacé a_0, a_1, a_2, etc., par a, b, c, d.

Covariants et invariants.

Si dans la fonction F on remplace x par $\lambda x + \mu y$ et y par $\lambda' x + \mu' y$, il est clair que la fonction garde encore la forme

$$(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)(x, y)^n,$$

où les a' sont des fonctions des a et des quatre constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$.

Soient

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x, y)$$

une fonction quelconque des a et de x, y, et

$$\varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots a'_n, x, y)$$

la fonction analogue en a' et x, y; mais les a' étant des

fonctions des a, il s'ensuit que cette dernière fonction est aussi une fonction des a. Si la fonction φ est prise de telle manière que l'on ait l'identité

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x, y)$$
$$= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, x, y),$$

où p est un nombre entier positif, alors la fonction φ est dite *covariant* de F. Si l'on avait simplement la fonction

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

sans x et sans y et qu'on ait l'identité

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n),$$

alors φ est un *invariant* de la fonction F.

Exemple. Soit

$$n = 3,$$
$$F = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3.$$
$$\lambda = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1;$$

on trouve

$$a'_0 = a_0,$$
$$a'_1 = a_1 + a_0\mu,$$
$$a'_2 = a_2 + 2a_1\mu + a_0\mu^2,$$
$$a'_3 = a_3 + 3a_2\mu + 3a_1\mu^2 + a_0\mu^3.$$

Prenons

$$\varphi = (a_1^2 - a_0 a_2)x^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3)xy + (a_2^2 - a_1 a_3)y^2;$$

désignons par Φ la fonction analogue en a'; si l'on y remplace ensuite les a' par leurs valeurs en a, on trouve

$$p = 0, \quad \text{et} \quad \varphi = \Phi.$$

Cette fonction φ jouit donc de la propriété qui la rend un *covariant* de F.

Soit

$$n = 2,$$

alors

$$F = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2;$$

alors

$$a'_0 = a_0 \lambda^2 + 2 a_1 \lambda\lambda' + a_2 \lambda'^2,$$
$$a'_1 = a_0 \lambda\mu + a_1 (\lambda\mu' + \lambda'\mu) + a_2 \lambda'\mu',$$
$$a'_2 = a_0 \mu^2 + 2 a_1 \mu\mu' + a_2 \mu'^2.$$

Prenons

$$\varphi = a_1^2 - a_0 a_2,$$

sans x, y; alors

$$\Phi = a_1'^2 - a'_0 a'_2,$$

et remplaçant les a' par leurs valeurs en a, on trouve

$$\Phi = (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2 \varphi,$$

et φ est un *invariant* de F; si

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1;$$

alors

$$\Phi = \varphi$$

(*voir* la Note de M. Combescure, p. 193 de la *Théorie des déterminants*).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 377 (HARRISON)

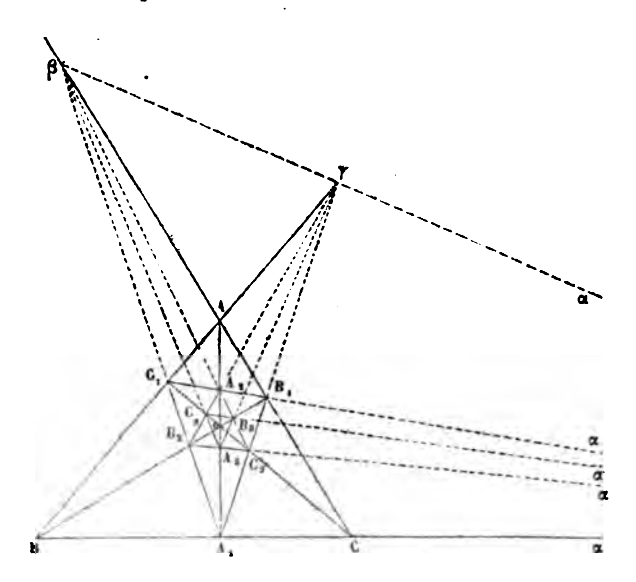
(voir p. 179);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Pour abréger, je ne répète pas l'énoncé qui est assez long.

1°. Je vais prouver que les droites AB, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, etc., concourent en un même point γ; que les droites AC,

A_1C_1, A_2C_2, etc., concourent en un même point β, et enfin que les droites BC, B_1C_1, B_2C_2, etc., concourent en un même point α.



Les deux triangles BA_1B_2 et AB_1A_2 sont homologiques, parce que leurs côtés se coupent deux à deux en trois points C, O, C_1 situés en ligne droite, savoir :

BA_1 et AB_1 en C; BB_2 et AA_2 en O, point de concours des trois hauteurs du triangle ABC; et B_2A_1 et B_1A_2 en C_1.

Donc (*Géom. sup.*, n° 366) leurs sommets se trouvent deux à deux sur trois droites AB, A_1B_1, A_2B_2 qui passent par un même point γ.

On prouverait de même que A_3, B_3 passe par le point γ, en considérant les triangles homologiques $B_1A_2B_2$ et $A_1B_2A_3$, et ainsi de suite.

Même démonstration à l'égard des deux autres systèmes

de droites AC, $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, etc., et BC, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, etc.

2°. Les triangles ABC, $A_1 B_1 C_1$ sont homologiques. Donc les trois points de concours de leurs côtés homologues sont en ligne droite. ces points sont α, β, et γ. (*Géom. sup.*, n° 365).

3°. Considérons le quadrilatère ABOC. Les points A_1, B_1, C_1 sont respectivement les points de concours de ses deux diagonales et de ses côtés opposés. Donc les deux diagonales $A_1 A$ et $A_1 C$ sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ (*Géom. sup.*, n° 346). Or les deux diagonales sont rectangulaires; donc $A_1 A$ bissecte l'angle $B_1 A_1 C_1$ (*Géom. sup.*, n° 80).

Mais cette propriété ne s'étend pas aux autres angles tels que $B_2 A_2 C_2$, etc.

Car si l'on considère le quadrilatère $A_1 B_1 OC_1$, on aura pareillement $A_2 A_1$ et $A_2 B_1$ conjuguées harmoniques par rapport à $A_2 B_2$ et $A_2 C_2$. Donc si $A_2 A_1$ bissectait l'angle $B_2 AC_2$, $A_2 B_1$ serait perpendiculaire sur $A_2 A_1$ (*Géom. sup.*, n° 80), autrement dit les droites $A_2 \alpha$ et $A_1 \alpha$ seraient parallèles, ce qui n'a pas lieu en général.

Note du Rédacteur. On peut considérer OA, OB, OC comme les projections des arêtes d'un angle trièdre et ABC, $A_1 B_1 C_1$ comme les projections des deux sections triangulaires faites dans le trièdre; dès lors les propriétés géométriques des points α, β, γ deviennent intuitives: moyen de démonstration indiqué par M. Brianchon depuis nombre d'années. L'erreur signalée ici existe dans le texte anglais que j'ai copié de confiance; il reste à démontrer la partie analytique, la partie essentielle du théorème.

Prochainement une solution complète par M. Richard d'Oxamendi.

ASTRONOMIE.

Sur la théorie du double mouvement des planètes de Jean Bernoulli ;

D'APRÈS M. W. HARTWIG.

Astr. Nach., t. XLI, n° 968; 1855.

Jean Bernoulli est le premier qui ait déduit le double mouvement de révolution et de rotation des planètes d'un choc dont la direction ne passe pas par le centre de gravité (*Opera omn.*, t. IV, p. 282 ; 1742). Il est aussi le premier qui ait donné une idée nette de l'orbite cycloïdale des molécules d'un mobile solide, et il fait observer que dans le plan qui passe par le centre de gravité et la direction de la force impulsive, le centre spontané de rotation décrit une cycloïde ordinaire ; c'est un cercle de rayon égal à la distance de ce centre au centre de gravité et qui roule sur une droite parallèle à la direction d'impulsion. Les autres points décrivent des cycloïdes *raccourcies* ou *rallongées*. Voici ses paroles :

Hoc sane futurum prævideo, ut more projectilium (a quorum gravitate abstrahitur) centrum gravitatis C *protinus incipiat moveri secundum directionem rectilineam, in qua tunc reperitur, et quidem celeritate uniformi, sicuti jam dudum demonstratum est ; atque ita, perseverante rotatione, singula relicta puncta describent curvas cycloïdales, inter quas illa quæ ab ipso puncto* B *describitur, est cycloïs ordinaria* Hugeniana, *habens pro tangente initiali ipsam* BA; *cæteræ vero omnes sunt cycloïdes vel contractæ, vel protractæ prout à puncto* C *vel plus vel minus distant quam punctum* B (p. 279).

B est le centre spontané de rotation et A est le pied de

la perpendiculaire abaissée de B sur la direction de la force impulsive.

Ce sont ces mouvements que M. Poinsot a figurés par deux cônes roulant l'un sur l'autre.

Bernoulli n'a considéré parmi les planètes que la Terre, Mars, Jupiter et la Lune; Schubert, dans son *Traité d'Astronomie théorique* (t. III, 1822) a fait le même calcul en ajoutant Vénus et Saturne.

La Table suivante contient les valeurs selon M. Hartwig, Bernoulli et Schubert.

C = centre de gravité qu'on prend pour centre de la planète supposée sphérique;

B = centre d'oscillation;

A = pied de la perpendiculaire abaissée de B sur la direction de la force impulsive.

Les distances sont exprimées en parties du demi-diamètre de chaque planète.

	HARTWIG.		BERNOULLI.		SCHUBERT.	
	CA	CB	CA	CB	CA	CB
Vénus..	$0{,}005243 = \frac{1}{191}$	76,3815	....	..	$0{,}005108 = \frac{1}{196}$	78,30329
Terre...	$0{,}006095 = \frac{1}{164}$	65,7053	$\frac{1}{105}$	60	$0{,}006108 = \frac{1}{164}$	65,48498
Mars...	$0{,}003796 = \frac{1}{263}$	105,509	$\frac{1}{418}$	84	$0{,}003806 = \frac{1}{263}$	105,09380
Jupiter.	$0{,}37674 = \frac{55}{146}$	1,06173	$\frac{7}{19}$	$\frac{11}{10}$	$0{,}364736 = \frac{9}{25}$	1,096684
Saturne	$0{,}38754 = \frac{112}{268}$	1,01011	..	..	$0{,}438487 = \frac{11}{25}$	1,912227

On ne découvre dans cette Table aucune marche régulière. Il n'en est pas de même en prenant une unité

commune pour toutes ces planètes, par exemple le rayon de la Terre; alors on a le tableau suivant :

(A)

	CB
Vénus.....	75,3885
La Terre...	65,7053
Mars......	54,7589
Jupiter....	11,9498
Saturne ...	9,3236

On voit que CB diminue lorsque la distance au Soleil augmente. On ne connaît qu'imparfaitement la durée de la rotation de Mercure; en admettant $24^h\ 5^m$, on trouve

$$CB = 106,260,$$

ce qui s'accorde avec la règle des distances.

M. Hartwig n'a pu parvenir à une équation simple entre ces valeurs et la distance, il n'est parvenu qu'à cette relation transcendante

$$y = a + bc^{-x},$$

où x est la distance au Soleil et $y = CB$.

$$(B) \quad \begin{cases} a = 10,3406, \\ b = 109,9662, \\ c = 1,96393. \end{cases}$$

D'après cette formule, prenant toujours le rayon terrestre pour unité, on a

(C)

	CB
Vénus.....	77,3397
La Terre...	66,8336
Mars......	49,6619
Jupiter....	13,6230
Saturne....	10,5165

En calculant les valeurs extrêmes que peut avoir CB.

on trouve

		Maximum.	Minimum.
(D)	Vénus.....	95,9075	74,8730
	La Terre ..	66,8181	69,6110
	Mars......	60,1253	49,8716
	Jupiter....	12,5398	11,3874
	Saturne....	9,86270	8,81338

Mars présente le plus grand intervalle, c'est aussi la planète qui présente la plus grande erreur dans la Table (C) ; mais cette valeur dans (C) s'accorde presque avec le minimum dans (D) ; on voit que chaque maximum est plus petit que le minimum de la valeur précédente : si l'on voulait en tirer une conclusion pour Uranus, CB pour cette planète devrait être au-dessus de 8,81338, et, par conséquent, la durée de sa rotation moindre que $13^h\ 15^m$: on aurait donc une limite supérieure, troisième exemple de la rotation rapide des planètes situées au delà de Mars.

Bernoulli fait déjà la remarque que le centre d'oscillation B de la Terre tombe dans le voisinage de l'orbite de la Lune.

Videmus hinc, punctum B *tam procul a Terra existere ut* BC *sit* = *circiter* 60 *diametris* (*) *Terræ ; atque adeo pertingat usque ad regionem Lunæ. Quod an sit inter raro contingentia numerandum, an vero ex necessitate aliqua physica, effectui Lunæ attribuendæ, consequatur de eo dispiciant physici. Fortassis reperient aliquam rationem a motu et distantia Lunæ repetendam, cur motus annuus et diurnus Terræ eam inter se habeant relationem quam habent ; ita ut aliam habere non possint* (p. 283).

(*) Lisez *semi-diametris*.

Ainsi Bernoulli soupçonne qu'il existe une cause physique de cette coïncidence du centre d'oscillation de la Terre avec l'orbite lunaire. Schubert va plus loin.

Il dit : « Le phénomène le plus surprenant est celui » que présentent les centres d'oscillation de la Terre et » de la Lune. Relativement à la Lune, la distance *x* (CB) » est 220,9 demi-diamètres de la Lune, ce qui fait » $0,27293 \times 220,9$ ou à peu près soixante demi-diamè- » tres de la Terre. Le centre d'oscillation de la Lune » coïncide donc exactement avec le centre de la Terre; » celui de la Terre tombe un peu au delà de la Lune, » *x* (CB) étant soixante-cinq demi-diamètres de la Terre. » Cette harmonie frappante paraît indiquer un nouveau » lien qui réunit ces deux corps, et il est possible qu'elle » répande un nouveau jour sur cette partie de l'astrono- » mie physique. »

M. Hartwig fait observer que relativement à la Lune la coïncidence est une conséquence de ce que la durée de son mouvement de rotation est égale à celle de son mouvement de révolution autour de la Terre. En effet, soit a la distance de la Lune à la Terre, exprimée en demi-diamètres de la Lune; r le demi-diamètre de la Lune, exprimée en demi-diamètres de la Terre; π la parallaxe solaire; τ la durée du mouvement de rotation; T la durée du mouvement de révolution. On trouve

$$CB = \frac{1}{\sin \pi} \frac{a}{r} \frac{\tau}{T},$$

exprimée en demi-diamètres de la Lune; ou en rapportant tout au demi-diamètre de l'orbite

$$CB = \frac{\tau}{T};$$

mais

$$\tau = T,$$

donc

$$CB = 1;$$

le centre d'oscillation de la Lune doit donc coïncider avec le centre de l'orbite qui est celui de la Terre. Si, comme il paraît vraisemblable, les durées des deux mouvements des satellites de Jupiter coïncident, il faut que le centre d'oscillation de chacun coïncide avec le centre de Jupiter. M. Poinsot fait deux objections à la théorie de Bernoulli. D'abord il est trop spécial de n'admettre qu'une seule force; ensuite cette force a dû être parallèle à l'équateur de la planète et aussi à la tangente menée à l'orbite par le lieu de la planète, et les seuls points où la tangente est parallèle au plan de l'équateur sont l'aphélie et le périhélie. Il faut donc que la planète se soit trouvée primitivement à l'un de ces points et que le choc fût perpendiculaire à la ligne des absides. On peut répondre que cela suppose que l'intersection de l'équateur avec le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne des absides; rien n'oblige à admettre cette supposition, et alors le parallélisme de la tangente à l'orbite avec le plan de l'équateur peut avoir lieu hors de l'aphélie et du périhélie; quant à la force unique, rien n'empêche que l'on ne recherche quelle devait être la force unique pour produire le double mouvement observé.

Laplace semble admettre l'hypothèse de Bernoulli (*Mécanique céleste*, t. Ier, chap. VII, § 29, et *Exposition du système du monde*, livre III, chap. V).

NOTE SUR LA QUESTION 350 (WRONSKI)

(voir p. 248);

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

L'énoncé de cette question, tel qu'on le lit à la page 248, n'est peut-être ni très-clair ni très-exact. On pourrait, je pense, le modifier ainsi :

Étant donnée une équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

dont les racines sont $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, *calculer la fonction homogène de degré* p:

$$B_p = \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad (*).$$

Cela posé, la solution de M. Brioschi peut être simplifiée et abrégée de la manière suivante :

La fonction homogène B_p est évidemment le coefficient de z^p dans le produit des n séries

$$1 + x_1 z + x_1^2 z^2 + x_1^3 z^3 + \ldots,$$
$$1 + x_2 z + x_2^2 z^2 + x_2^3 z^3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 + x_n z + x_n^2 z^2 + x_n^3 z^3 + \ldots$$

D'ailleurs, pourvu que le module de la variable z soit suffisamment petit, ces séries ont pour sommes respectivement

$$\frac{1}{1 - x_1 z}, \quad \frac{1}{1 - x_2 z}, \ldots, \quad \frac{1}{1 - x_n z};$$

(*) Cette fonction B_p est celle que Wronski a désignée par la lettre hébraïque *aleph*.

donc

$$(1)\quad \frac{1}{(1-x_1z)(1-x_2z)\ldots(1-x_nz)} = 1 + B_1z + \ldots + B_pz^p + \ldots .$$

Mais évidemment

$$(2)\quad (1-x_1z)(1-x_2z)\ldots(1-x_nz) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n;$$

donc

$$(3)\quad 1 = (1 + B_1z + \ldots + B_pz^p + \ldots)(1 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n).$$

Cette dernière relation donne d'abord

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = B_1 + a_1, \\ 0 = B_2 + B_1a_1 + a_2, \\ 0 = B_3 + B_2a_1 + B_1a_2 + a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = B_n + B_{n-1}a_1 + B_{n-2}a_2 + \ldots + B_1a_{n-1} + a_n, \end{array}\right.$$

et, pour toutes les valeurs de p qui surpassent n,

$$(5)\quad 0 = B_p + B_{p-1}a_1 + B_{p-2}a_2 + \ldots + B_{p-n+1}a_{n-1} + B_{p-n}a_n.$$

Ces dernières formules ont été données par Wronski.

RECUEIL DE FORMULES RELATIVES AU CERCLE

(voir page 185);

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur au lycée de Carcassonne.

Multiples de $\sqrt{\pi}$.

$\sqrt{\pi} = 1,77\ 245\ 385\ 090\ 551\ 6 + \ldots$

$2\sqrt{\pi} = 3,54\ 490\ 770\ 181 +$

$3\sqrt{\pi} = 5,31\ 736\ 155\ 272 -$

$4\sqrt{\pi} = 7,08\ 981\ 540\ 362 +$
$5\sqrt{\pi} = 8,86\ 226\ 925\ 453 -$
$6\sqrt{\pi} = 10,63\ 472\ 310\ 543 +$
$7\sqrt{\pi} = 12,40\ 717\ 695\ 634 -$
$8\sqrt{\pi} = 14,17\ 963\ 080\ 724 +$
$9\sqrt{\pi} = 15,95\ 208\ 465\ 815 -$

L'approximation est d'une demi-unité du onzième ordre décimal. Les nombres trop faibles sont suivis du signe +.

Erreur à corriger dans les multiples de $\frac{1}{\pi}$ (p. 155).

Dans $\frac{7}{\pi}$, au lieu du quine 92029, il faut lire 92032.

ÉQUATION D'UNE CONIQUE PASSANT PAR CINQ POINTS DONNÉS.

1. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; x_5, y_5 les coordonnées des cinq points; l'équation de la conique est

$$\begin{aligned}
&[(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - y_1 x_2] \\
&\times [(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + y_4 x_3 - x_4 y_3] \\
&\times [(y_2 - y_3)x_5 - (x_2 - x_3)y_5 + x_2 y_3 - y_2 x_3] \\
&\times [(y_4 - y_1)x_5 - (x_4 - x_1)y_5 + x_4 y_1 - y_4 x_1] \\
&= [(y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2 y_3 - y_2 x_3] \\
&\times [(y_4 - y_1)x - (x_4 - x_1)y + y_1 x_4 - x_1 y_4] \\
&\times [(y_3 - y_4)x_5 - (x_3 - x_4)y_5 + x_3 y_4 - y_3 x_4] \\
&\times [(y_1 - y_2)x_5 - (x_1 - x_2)y_5 + x_1 y_2 - y_1 x_2],
\end{aligned}$$

Il est évident qu'on satisfait à cette équation en remplaçant successivement x et y par les coordonnées des

points; elle ne change pas en permutant mutuellement les indices 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5, 4 et 5.

2. Désignons par α et γ les deux facteurs en x, y du membre à gauche; par β et δ les deux facteurs en x, y du membre à droite;

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

sont les équations du côté opposé du quadrilatère inscrit ayant pour sommets les quatre premiers points. Si d'un point quelconque de la conique on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère inscrit, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ exprime le quotient du rectangle des perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés α, γ divisé par le rectangle $\beta\delta$ des perpendiculaires abaissées sur les deux autres côtés, et l'équation montre que ce quotient est constant; c'est le théorème de Newton. Ainsi ce théorème établi, on peut s'en servir pour écrire tout de suite l'équation d'une conique passant par cinq points. On voit donc pourquoi Newton a pris ce théorème pour point de départ et en a déduit toutes les propriétés des coniques en y joignant le procédé métamorphique employé sous le nom d'*homographie* dans ce temps-ci.

3. Si d'un point quelconque de la conique, on mène des droites aux quatre sommets de quadrilatère inscrit, on obtient un faisceau de quatre droites et quatre triangles ayant pour bases les quatre côtés du quadrilatère; dans chaque triangle, la hauteur est égale au rectangle des côtés qui comprennent l'angle opposé à la base, divisé par la base, et le tout multiplié par le sinus de cet angle. Faisant usage de ces valeurs dans le théorème de Newton, on trouve une relation entre les sinus des angles du faisceau et qui constitue la constance du rapport anharmonique du faisceau; propriété qui est

le point de départ des admirables travaux de M. Chasles sur les coniques.

Ainsi les deux théorèmes sont des corollaires l'un de l'autre.

4. Posons

$$A_1 = (y_1 - y_2)(y_3 - y_4), \qquad C_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$
$$A_2 = (y_2 - y_3)(y_4 - y_1), \qquad C_2 = x_2 y_3 - y_2 x_3,$$
$$\alpha_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), \qquad C_3 = x_3 y_4 - y_3 x_4,$$
$$\alpha_2 = (x_2 - x_3)(x_4 - x_1), \qquad C_4 = x_4 y_1 - y_4 x_1,$$
$$B_1 = (y_1 - y_2)(x_3 - x_4),$$
$$B_2 = (y_2 - y_3)(x_4 - x_1),$$
$$\beta_1 = (x_1 - x_2)(y_3 - y_4),$$
$$\beta_2 = (x_2 - x_3)(y_4 - y_1);$$

on aura

$$\begin{aligned} \alpha\gamma = {} & A_1 x^2 - xy(B_1 + \beta_1) + \alpha_1 y^2 \\ & + x[(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 - y_2)C_3] \\ & + y[(x_1 - x_2)C_3 - (x_3 - x_4)C_1] - C_1 C_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta\delta = {} & A_2 x^2 - xy(B_2 + \beta_2) + \alpha_2 y^2 \\ & + x[(y_4 - y_1)C_2 - (y_2 - y_3)C_4] \\ & + y[(x_2 - x_3)C_4 - (x_4 - x_1)C_2] - C_2 C_4. \end{aligned}$$

Désignant par $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5, \delta_5$ ce que deviennent $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en y remplaçant x, y par x_5, y_5, on a

$$\begin{aligned} \alpha_5\gamma_5 = {} & A_1 x_5^2 - x_5 y_5(B_1 + \beta_1) + \alpha_1 y_5^2 \\ & + x_5[(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 - y_2)C_3] \\ & + y_5[(x_1 - x_2)C_3 - (x_3 - x_4)C_4] - C_1 C_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_5\delta_5 = {} & A_2 x_5^2 - x_5 y_5(B_2 + \beta_2) + \alpha_2 y_5^2 \\ & + x_4[(y_4 - y_1)C_2 - (y_2 - y_3)C_4] \\ & + y_5[(x_2 - x_3)C_4 - (x_4 - x_1)C_2] - C_2 C_4, \end{aligned}$$

et l'équation de la conique est

$$\alpha\gamma\beta_5\delta_5 = \beta\delta\alpha_5\gamma_5,$$

$$\begin{aligned}(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 + y_2)C_3 \\ = y_2 y_3 (x_1 - x_4) + y_3 y_1 (x_4 - x_2) \\ + y_1 y_4 (x_2 - x_3) + y_4 y_2 (x_3 - x_1);\end{aligned}$$

de même pour les valeurs analogues.

5. Si l'on prend le point x_5, y_5 pour origine, l'équation devient

$$C_2 C_4 \alpha\gamma = C_1 C_3 \beta\delta$$

et prend la forme

$$Mx^2 + Nxy + Py^2 + \ldots = 0,$$

et l'on a, en faisant le calcul,

$$\begin{aligned} N^2 - 4PM = (C_2^2 C_4^2 + C_1^2 C_3^2) \\ \times [(y_1 - y_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)]^2 \\ - 2C_1 C_2 C_3 C_4 \\ \times [(y_1 - y_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)] \\ \times [(x_2 - x_3)(y_4 - y_1) + (y_2 - y_3)(x_4 - x_1)], \end{aligned}$$

expression qui donne l'espèce de la courbe.

GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE.

Sur les polygones inscrits et circonscrits à des coniques;

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Ann. de Tortolini, 1857.

---

1. *Lemme*. Soient u, v, w trois fonctions linéaires à

deux variables :

$$U = \alpha vw + \beta wu + \gamma uv,$$
$$V = l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 - avw - bwu - cuv,$$
$$tU - V = vw(t\alpha + a) + wu(t\beta + b) + uv(t\gamma + c)$$
$$- l^2u^2 - m^2v^2 - n^2w^2,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a, b, c, \ldots$ sont des constantes données et t une constante arbitraire égalant à zéro les trois dérivées de $tU - V$ prises par rapport à u, v, w ; on obtient

$$w(t\beta + b) + v(t\gamma + c) - 2l^2u = 0,$$
$$w(t\alpha + a) - 2vm^2 + (t\gamma + c)u = 0,$$
$$-2n^2w + v(t\alpha + a) + (t\beta + b)u = 0.$$

Pour que ces trois équations subsistent simultanément, il faut que le déterminant soit nul ; ce déterminant, qu'on nomme le *discriminant* de la fonction $tU - V$ est

$$a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 = 0,$$

où

$$a_0 = \alpha\beta\gamma,$$
$$a_1 = l^2a^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 + a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta,$$
$$a_2 = 2a\alpha l^2 + 2b\beta m^2 + 2c\gamma n^2 + \alpha bc + \beta ca + \gamma ab,$$
$$a_3 = l^2a^2 + m^2b^2 + n^2c^2 + abc - 4l^2m^2n^2.$$

2. L'intersection de la droite $u = 0$, avec la conique $tU - V = 0$, donne

$$m^2v^2 + n^2w^2 - vw(t\alpha + a) = 0.$$

Lorsque cette équation est un carré parfait, la droite $u = 0$ est tangente à la conique, ce qui donne

$$t = \frac{2mn - a}{\alpha}.$$

Désignons cette valeur particulière de t par t_1, nous avons

donc

$$a = 2mn - \alpha t_1.$$

Désignons de même par t_2, t_3 les valeurs particulières de t qui rendent les droites $v = 0$, $w = 0$ tangentes même aux deux coniques $t_2 U - V = 0$, $t_3 U - V = 0$, nous avons les trois équations

$$a = 2mn - \alpha t_1,$$
$$b = 2nl - \beta t_2,$$
$$c = 2lm - \gamma t_3.$$

En posant

$$U = 0,$$

le triangle u, v, w est inscrit dans cette conique et circonscrit aux trois coniques :

$$t_1 U - V = 0,$$
$$t_2 U - V = 0,$$
$$t_3 U - V = 0.$$

3. Substituons ces valeurs de a, b, c dans les coefficients du discriminant, on obtient

$$a_0 = \alpha\beta\gamma,$$
$$a_1 = p^2 - \alpha\beta\gamma(t_1 + t_2 + t_3),$$
$$a_2 = 2pq + \alpha\beta\gamma(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1),$$
$$a_3 = q^2 - \alpha\beta\gamma\, t_1 t_2 t_3,$$

où

$$p = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$
$$q = 4r - l\alpha t_1 - m\beta t_2 - n\gamma t_3,$$
$$r = lmn.$$

Soit

(1) $(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 + At^2 + Bt + C = 0$;

d'après les propriétés d'Albert Girard, on a les rela-

tions

$$(2)\quad p^2 = a_1 - a_0 A, \qquad 2pq = a_2 - a_0 B, \qquad q^2 = a_3 - a_0 C;$$

d'où l'on déduit

$$4(a_1 - a_0 A)(a_3 - a_0 C) = (a_2 - a_0 B)^2,$$

relation qui a été donnée aussi par MM. Cayley et Salmon, mais par d'autres raisonnements.

4. On a, d'après les équations (2),

$$\begin{aligned} p^2 t^2 + 2pqt + q^2 = (pt + q)^2 &= a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \\ &= a_0 (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) \ (^*); \end{aligned}$$

car cette équation est satisfaite par les trois racines t_1, t_2, t_3, et en développant, on a

$$\begin{aligned} pt + q &= \sqrt{a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3} \\ &= A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots = F(t), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$A_0^2 = a_3,$$

$$2A_0 A_1 = a_2,$$

$$A_1^2 + 2A_1 A_2 = a_1,$$

$$A_1^3 + 2A_1 A_2 + 2A_0 A_3 = a_0 \ldots,$$

$$pt_1 + q = A_0 + A_1 t_1 + A_2 t_1^2 + A_3 t_1^3 \ldots,$$

$$pt_2 + q = A_0 + A_1 t_2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_2^3 \ldots,$$

$$p = A_1 + A_2 (t_2 - t_1) + A_3 (t_2^2 - t_1 t_2 + t_1^2) \ldots,$$

$$q = A_0 - t_1 t_2 P,$$

ou

$$P = A_2 + A_3 (t_1 + t_2) + A_4 (t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2) + \ldots.$$

La troisième des équations (2) donne

$$q^2 = a_3 - a_0 t_1 t_2 t_3 = A_0^2 - 2A_0 t_1 t_2 P + t_1^2 t_2^2 P^2;$$

$$a_0 b_1 t_3 = a_0 (A_0 - q),$$

(*) Il suffit de remplacer dans l'équation $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$, A, B, C par les valeurs en p, q, a_0, etc. TM.

donc

$$t_3 = \frac{a_3 - q^2}{a_0 t_1 t_2},$$

d'où

$$t_3 = \frac{1}{a_0}(t_1 t_2 P^2 - 2 A_0 P).$$

Si l'on pose $t_1 = t_2 = 0$, ou si $a = 2mn$, $b = 2nl$; alors les droites $u = 0$, $v = 0$ inscrites dans $U = 0$ sont tangentes à $V = 0$ et à la conique $t_3 U - V = 0$; or alors

$$(3) \qquad t_3 = -\frac{2 A_0 A_2}{a_0} = \frac{a_2^2 - 4 a_1 a_3}{4 a_0 a_3}.$$

Le troisième côté $w = 0$ est donc tangent à la conique $(a_2^2 - 4 a_1 a_3) U - 4 a_0 a_3 V = 0$, et si $a_2^2 = 4 a_1 a_3$, le triangle u, v, w sera à la fois inscrit à la conique $U = 0$ et circonscrit à la conique $V = 0$, et lorsque les trois conditions $a = 2mn$, $b = 2nl$, $a_2^2 = 4 a_1 a_3$ subsistent, un triangle circonscrit à V ayant deux côtés inscrits dans U et circonscrit à V aura de même le troisième côté.

5. Soit seulement

$$t_1 = 0;$$

alors

$$P = A_2 + A_3 t_2 + A_4 t_2^2 + \ldots,$$

$u = 0$ est tangent à la conique $V = 0$, et

$$a_0 t_3 = -2 A_0 (A_2 + A_3 t_2 + A_4 t_2^2 + \ldots),$$

$$a_0 t_2^2 t_3 = -2 A_0 (A_2 t_2^2 + A_3 {}_2^{\,:} + A_4 t_2^4 + \ldots)$$

$$= -2 A_0 [A_0 + A_1 t_2 - (A_0 + A_1 t^2 + A_2 t_2^2 + \ldots)\}$$

$$= -2 A_0 [A_0 + A_1 t_2 - F(t_2)] \text{ (voir p. 424)},$$

$$a_0 t_2^2 t_3 - 2 A_0 (A_0 + A_1 t_2) = -2 A_0 F(t_2);$$

élevant au carré

$$a_0^2 t_2^4 t_3^2 - 4 a_0 A_0 t_2^2 t_3 (A_0 + A_1 t_2)$$
$$= 4 A_0^2 \{[F(t_2)]^2 - (A_0 + A_1 t_2)^2\},$$

mais

$$2A_0A_1 = a_2, \qquad A_1^2 = \frac{a_2^2}{4a_3},$$

d'où

$$F(t_2)^2 - (A_0 + A_1 t_2)^2 = \frac{t_2^2}{4a_3}(4a_0a_3t_2 + 4a_1a_3 - a_2^2).$$

Substituant et réduisant, on obtient

$$(4)\quad a_0^2t_2^2t_3^2 - 4a_0a_3t_3 - 2a_0a_2t_2t_3 = 4a_0a_3t_2 + 4a_1a_3 - a_2^2,$$

si l'on avait aussi

$$t_2 = 0,$$

on retombe sur la valeur de t_3 trouvée ci-desus (3).

6. Soit le quadrilatère *abcd* inscrit dans la conique $U = 0$, et dont trois côtés *ab*, *bc*, *cd* sont circonscrits à la conique $V = 0$.

Dans le triangle *abc*, les côtés *ab*, *bc* sont tangents à la conique $V = 0$ et inscrits dans la conique $U = 0$. Donc, d'après ce qui précède, le troisième côté *ac* sera tangent à la conique $\alpha U - V = 0$, ou

$$(3)\qquad \alpha = \frac{a_2^2 - 4a_1a_3}{4a_0a_3}.$$

Dans le triangle *acd*, le côté *cd* est tangent à la conique $U = 0$, le côté *ac* tangent à la conique $\alpha U - V = 0$, le troisième côté *ad* sera tangent à la conique $t_3 U - V = 0$, si l'on a la relation (4), dans laquelle il faut remplacer t_2 par la valeur de α, et l'on obtient

$$t_3 = \frac{16a_3(8a_0a_3^2 + a_2^3 - 4a_1a_2a_3)}{(a_2^2 - 4a_1a_3)^2}.$$

Ainsi le quatrième coté sera tangent à la conique

$$16a_3(8a_0a_3^2 + a_2^3 + 4a_1a_2a_3)U - (a_2^2 - 4a_1a_3)^2V = 0,$$

et si l'on a

$$8a_0a_3^2 + a_3^2 - 4a_1a_2a_3 = 0,$$

le quadrilatère sera à la fois inscrit dans $U = 0$ et circonscrit à $V = 0$. Même observation que ci-dessus.

7. Soit le pentagone $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ inscrit dans la conique $U = 0$, et supposons que les côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\alpha_5$ soient tangents à la conique $V = 0$, le côté $\alpha_5\alpha_1$ sera tangent à la conique $t_5U - V = 0$. Il s'agit de trouver t_5.

Dans le triangle $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$, le côté $\alpha_3\alpha_4$ est tangent à V, on a donc entre t_3 et t_4 la relation (4)

$$a_0^2t_3^2t_4^2 - 4a_0a_3t_4 - 2a_0a_2t_3t_4 = 4a_0a_3t_3 + 4a_1a_3 - a_2^2.$$

Dans le triangle $\alpha_1\alpha_4\alpha_5$, le côté $\alpha_4\alpha_5$ est tangent à la conique $V = 0$, on a donc encore

$$a_0^2t_4^2t_5^2 - 4a_0a_3t_5 - 2a_0a_2t_4t_5 = 4a_0a_3t_4 + 4a_1a_3 - a_2^2.$$

Soustrayant on a

$$a_0^2t_4^2(t_5 + t_3) = 4a_0a_3 + 2a_0a_2t_4.$$

La première des équations donne

$$a_0^2t_5t_4^2t_3 = a_2^2 - 4a_1a_3 - 4a_0a_3t_4,$$

d'où

$$t_5 = \frac{4a_0a_2(\alpha - t_4)}{a_0^2t_3t_4^2}.$$

On connaît t_3 et t_4, par conséquent t_5, et de même pour les polygones de tout nombre de côtés.

Observation. Ce magnifique travail est, à ce que je sache, la démonstration analytique la plus simple qu'on ait donnée du célèbre théorème de M. Poncelet; généralisation du théorème pour deux cercles, auquel le théorème général peut être ramené, puisque, d'après un autre

théorème de M. Poncelet, deux coniques sont les perspectives de deux cercles. La précédente analyse résout cette question : un polygone de n côtés étant inscrit dans une conique; $n-1$ des côtés étant respectivement des tangentes à un faisceau de $n-1$ coniques passant par les mêmes quatre points, trouver la $n^{ième}$ conique du faisceau qui soit touchée par le $n^{ième}$ côté du polygone; or l'on peut trouver les conditions pour que le faisceau de n coniques se condense en une seule conique, l'on a donc le problème Poncelet. Jacobi a rattaché cette recherche aux fonctions elliptiques (*Nouvelles Annales*, t. IV, p. 377).

SOLUTION DE LA QUESTION 396

(voir p. 390);

PAR M. L. DE COINCY,
Élève du lycée Bonaparte (classe de M. Bouquet),
ET M. E. CARÉNON,
Elève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

Je désigne par α l'angle donné BAC et par φ l'angle cherché BAC'.

La condition à remplir est

$$AB'.BB' = AC'.CC'$$

ou

$$c^2 \sin\varphi \cos\varphi = b^2 \sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi),$$

$$c^2 \sin 2\varphi = b^2 \sin 2(\alpha-\varphi),$$

et posant $2\psi = \varphi$, $2\alpha = \beta$,

$$\frac{\sin\psi}{\sin(\beta-\psi)} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Développant et divisant par $\cos\psi$,

$$\tang\psi = \frac{b^2 \sin\beta}{c^2 + b^2 \cos\beta} \ (^*).$$

On a ainsi pour la valeur de l'angle ψ deux valeurs ψ, $180 + \psi$, et, par suite, pour φ deux directions rectangulaires.

1°. Si $\alpha = 90$ degrés, ce sont les côtés eux-mêmes qui satisfont à la question en général.

2°. Lorsque $b = c$, on a

$$\tang\psi = \frac{c^2 \sin\beta}{c^2(1 + \cos\beta)} = \tang\frac{\beta}{2},$$

d'où

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

3°. Si les côtés étaient $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ avec $\alpha\sqrt{-1}$ pour angle compris, on aurait

$$\tang\psi = \frac{b^2 \sin(\beta\sqrt{-1})}{c^2 + b^2\cos(\beta\sqrt{-1})} = \frac{b^2 \sin\beta i}{c^2 + b^2 \cos\beta i},$$

c'est-à-dire que la relation entre y et α ne changerait pas.

Remarque. Sin βi est réel, ainsi que $\cos^2 \beta i$.

Note du Rédacteur. Incessamment une solution de M. Chaillot (de Versailles) avec une belle construction, et une solution d'une admirable simplicité par M. Landais (lycée Louis-le-Grand).

(*) Ce qui suit est de M. de Coincy.

SECONDE SOLUTION D'UNE QUESTION
Proposée aux examens d'admission à l'École Polytechnique

(voir page 376) ;

PAR M. MARCEL JOZON,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A \sin x + B$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de toutes ces racines.

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

La valeur maximum de $\sin x$ étant 1, la valeur maximum de $A \sin x + B$ est $A + B$; de même la valeur minimum de ce binôme correspond à $\sin x = -1$ et est $-A + B$. (A est supposé positif. S'il ne l'était pas, on changerait les signes.) Il résulte de là : 1° que toutes les valeurs de x satisfaisant à l'équation sont comprises entre $-A + B$ et $+A + B$; 2° que le nombre des racines est impair, car pour toute valeur de x inférieure à $-A + B$, le premier membre de l'équation

$$x - A \sin x - B = 0$$

devient négatif, et, pour toute valeur de x supérieure à $A + B$, le premier membre de cette même équation devient positif.

On voit de plus que si deux valeurs x_1 et $x_1 + \pi$ comprises entre $-A + B$ et $+A + B$ sont telles que

$$\sin x_1 = \pm 1,$$

elles donnent des résultats de signes contraires (*) lorsqu'on les substitue à x dans le premier membre de l'équation

$$x - \mathrm{A}\sin x - \mathrm{B} = 0,$$

et que par conséquent elles comprennent une racine. De plus, dans cet intervalle de x_1 à $x_1 + \pi$, la dérivée $1 - \mathrm{A}\cos x$ s'annule au plus une fois ; il n'y a donc qu'une seule racine comprise entre x_1 et $x_1 + \pi$ (**).

Donc si l'on a la fois

$$\sin(-\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \pm 1$$

et

$$\sin(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \pm 1 \text{ (***)}$$

il y aura autant de racines comprises entre $-\mathrm{A} + \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} + \mathrm{B}$, qu'il y a de demi-circonférences dans la différence $2\mathrm{A}$ de ces arcs.

Si $-\mathrm{A} + \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ ne vérifient l'équation ni l'un ni l'autre, le nombre des racines sera exactement $\frac{2\mathrm{A}}{\pi}$.

Si $-\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est racine, $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ ne l'étant pas, le nombre des solutions est $\frac{2\mathrm{A}}{\pi} + 1$. Enfin ce nombre est $\frac{2\mathrm{A}}{2} + 2$, quand $-\mathrm{A} + \mathrm{B}$ et $+\mathrm{A} + \mathrm{B}$ sont racines.

Pour ramener le cas général à celui-là, on pose

$$-\mathrm{A} + \mathrm{B} = \frac{2n+1}{2}\pi - \alpha = \mathrm{C} - \alpha,$$

la nombre α étant plus petit que π, et de même

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \frac{2n'+1}{2}\pi + \beta = \mathrm{D} + \beta.$$

(*) Car $\sin(x_1 + \pi) = -\sin x_1$. Tm.

(**) Car cette quantité ne peut dans cet intervalle passer du positif au négatif qu'une seule fois. Tm.

(***) Cela revient à $\sin x_1 = \pm 1$. Tm.

Le nombre des racines comprises entre C et D est $\left(\frac{D-C}{\pi}\right)$.

Maintenant si $\sin C = +1$, il y a une racine comprise entre $C-\alpha$ et C, car pour $x = C-\alpha$, $x - A\sin x - D$ devient négatif, et pour $x = C$ il est positif.

Si au contraire $\sin C = -1$, il n'y a pas de solutions comprises entre $C-\alpha$ et C.

On verrait de même que si $\sin D = -1$, il y a une racine comprise entre D et $D+\beta$, et que si $\sin D = +1$, il n'y en a pas. Le nombre des racines peut donc être

$$\frac{D-C}{\pi},\quad \frac{D-C}{\pi}+1 \quad \text{ou} \quad \frac{D-C}{\pi}+2.$$

On a donc ainsi le nombre des racines. Quant à leur séparation, elle se trouve naturellement effectuée, puisque l'on sait qu'entre deux arcs $\frac{2n-1}{2}\pi$ et $\frac{2n+1}{2}\pi$ compris entre les limites extrêmes $-A+B$ et $A+B$, il y a une racine de l'équation et une seule.

Application à l'équation $x = 3142\sin x + 157$.

Ici

$$A = 3142 = 1000\pi,\quad B = 157 = 50\pi;$$

donc

$$-A+B = -950\pi = \left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{2}$$

et

$$A+B = 1050\pi = \left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Il y aura donc déjà $1050-\frac{1}{2}+950-\frac{1}{2}$ ou 1999 racines comprises entre $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$ et $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$.

De plus, le sinus de $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$ étant positif, il y a une racine entre -950π et $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$, et de même, le sinus de $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ étant négatif, il y a une racine comprise entre $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ et 1050π.

Il y aura donc en tout $1999+2$ ou 2001 racines, connues à une demi-circonférence près, à l'exception de la première et de la dernière qui sont connues à un quart de circonférence près.

Note du Rédacteur. La première solution (p. 376) est usitée dans les services publics, lorsqu'on n'a besoin de connaître approximativement que quelques racines; le procédé graphique est alors plus expéditif que le calcul.

QUESTION D'EXAMEN

(voir, p. 110);

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur à Carcassonne.

On demande les deux intersections de deux paraboles dont on connaît les directrices et les foyers.

Question incomplète : il faut ajouter que les deux paraboles ont le même axe.

Les paramètres et les sommets se construiront facilement. Je les désigne par $2p$, $2p'$, A, A'. Soit M l'une des intersections cherchées, MP l'ordonnée de M,

$$\overline{MP}^2 = 2p\,\overline{AP},\quad \overline{MP}^2 = 2p'\,\overline{A'P}.$$

La question se ramène à deux constructions connues :

1°. Trouver sur la droite AA′ un point P tel, que $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{A'P}} = \frac{p'}{p}$.

2°. Construire une moyenne géométrique entre $2p$ et $\overline{\mathrm{AP}}$.

La première construction donne deux points P dont l'un est à rejeter. Il peut n'y avoir aucune solution ; il y a plusieurs vérifications simples.

SOLUTION DE LA QUESTION 382

(voir p. 181) ;

PAR M. BLERZY MERRY,
Inspecteur des lignes télégraphiques à Blidah.

Un nombre m décomposé en facteurs premiers est de la forme

$$m = \mathrm{A}^a\,\mathrm{B}^b \ldots \mathrm{F}^f\,\mathrm{G}^g\,\mathrm{H}^h \ldots \mathrm{L}^l,$$

et la forme générale d'un de ses diviseurs est

$$d = \mathrm{A}^{a'}\,\mathrm{B}^{b'} \ldots \mathrm{F}^{f'}\,\mathrm{G}^{g'}\,\mathrm{H}^{h'} \ldots \mathrm{L}^{l'}.$$

Soit q le nombre des facteurs premiers de m qui n'entrent pas dans d à la même puissance que dans m. Il est évident que

d divise m, $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{G}}, \frac{m}{\mathrm{H}}, \ldots, \frac{m}{\mathrm{L}}$	et ne divise pas $\frac{m}{\mathrm{A}}, \frac{m}{\mathrm{B}}, \ldots, \frac{m}{\mathrm{F}}$,
$\frac{m}{\mathrm{GH}}, \ldots, \frac{m}{\mathrm{GL}}$	$\frac{m}{\mathrm{AB}}, \frac{m}{\mathrm{AL}}, \ldots, \frac{m}{\mathrm{BL}}$,
. . . .	. . . .

et que, par conséquent, si

$$\sum f(d) = \mathrm{F}(m),$$

$f(d)$ est contenu

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{fois dans} & F(m), \\ q & \text{»} & \sum F\left(\frac{m}{A}\right), \\ \frac{q(q-1)}{1.2} & \text{»} & \sum F\left(\frac{m}{AB}\right), \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Dans la somme

$$F(m) - \sum F\left(\frac{m}{A}\right) + \sum F\left(\frac{m}{AB}\right)\ldots$$

le coefficient $f(d)$ est

$$1 - q + \frac{q(q-1)}{1.2}\ldots.$$

Si q est différent de zéro, ce coefficient est nul; si $q = 0$, alors $d = m$, et ce coefficient devient égal à l'unité; donc la somme ci-dessus se réduit à $f(m)$.

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 370

(voir p. 127);

Par M. BLERZY MERRY,
Inspecteur des lignes télégraphiques à Blidah.

Soit

$$P + Q\sqrt{-1}$$

la valeur du déterminant, P et Q étant des quantités réelles.

En remplaçant $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, cette valeur devient

$$P - Q\sqrt{-1};$$

mais le déterminant ne change pas, car cette substitution revient à prendre les lignes pour colonnes et réciproquement; donc

$$P + Q\sqrt{-1} = P - Q\sqrt{-1}$$

d'où

$$Q = 0.$$

DÉMONSTRATION

D'une Proposition relative au calcul numérique des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quand a est très-petit. (Programme officiel.)

Dans une première Note sur cette question du Programme officiel, j'ai énoncé (page 158) la proposition suivante :

Lorsque l'équation considérée

$$ax^2 + bx - c = 0$$

a des racines de signes contraires, pour que la méthode des approximations successives donne des valeurs de plus en plus approchées de la racine positive de cette équation, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}.$$

Je vais démontrer cette proposition.

Dans l'équation *numérique*

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

les lettres a, b, c représentent des nombres *positifs*; la racine positive a pour expression

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a};$$

je nommerai x' la valeur exacte de cette racine.

L'application de la méthode des approximations successives à l'équation numérique considérée consiste en un calcul que je rappelle ici.

L'équation

$$ax^2 + bx - c = 0$$

donne

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2.$$

En négligeant d'abord le terme $\frac{a}{b} x'^2$, on a, pour première valeur approchée de x', le nombre $\frac{c}{b}$, que je désignerai par x_1.

En remplaçant x' par le nombre x_1 dans la formule $\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2$, on a, pour seconde valeur approchée de x', le nombre $\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2$; je le désignerai par x_2.

De même, si l'on substitue la seconde valeur approchée x_2 à x' dans la formule $\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2$, il en résultera une troisième valeur approchée x_3, et ainsi de suite.

On a donc les égalités numériques

$$x_1 = \frac{c}{b},$$

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2,$$

$$x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_2^2,$$

$$x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_3^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{2n+1} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_{2n}^2.$$

Cela posé, cherchons quelle condition doit être remplie par les coefficients a, b, c pour que x_2 approche plus de x' que x_1.

Les relations

$$x_1 = \frac{c}{b}, \qquad x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2$$

montrent que x_1 surpasse x', et comme x_1 et x' sont des nombres positifs, l'inégalité

$$x_1 > x'$$

donne

$$x_1^2 > x'^2,$$

et, par suite,

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\;{}_1^2 < \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2 \quad \text{ou} \quad x_2 < x'.$$

Ainsi, les erreurs commises en prenant pour x', les valeurs approchées x_1, x_2 sont exprimées par les différences

$$x_1 - x', \qquad x' - x_2,$$

et, par conséquent, il faut que l'inégalité

$$x' - x_2 < x_1 - x'$$

ait lieu pour que la seconde valeur x_2 soit plus approchée de x' que la première x_1.

Mais les relations

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2, \qquad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2$$

donnant

$$x' - x_2 = \frac{a}{b}(x_1^2 - x'^2) = \frac{a}{b}(x_1 + x')(x_1 - x'),$$

l'inégalité

$$x' - x_2 < x_1 - x'$$

se transforme en celle-ci :

$$\frac{a}{b}(x_1 + x')(x_1 - x') < x_1 - x',$$

et se réduit à

(1) $$\frac{a}{b}(x_1 + x') < 1,$$

parce que $x_1 - x'$ est un nombre positif.

D'ailleurs

$$x_1 + x' = \frac{c}{b} + \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}\right)$$
$$= \frac{2ac - b^2 + b\sqrt{b^2 + 4ac}}{2ab}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{a}{b}(x_1 + x') = \frac{2ac - b^2 + b\sqrt{b^2 + 4ac}}{2b^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2ac}{b^2} - 1 + \sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}}\right),$$

ou, en nommant n le rapport $\frac{ac}{b^2}$,

$$\frac{a}{b}(x_1 + x') = \frac{2n - 1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

Donc l'inégalité (1)

$$\frac{a}{b}(x_1 + x') < 1$$

revient à

$$\frac{2n - 1 + \sqrt{1 + 4n}}{2} < 1;$$

d'où

$$\sqrt{1 + 4n} < 3 - 2n.$$

Ce qui exige que $3 - 2n$ soit positif, c'est-à-dire qu'on ait

$$n < \frac{3}{2}.$$

En admettant que cette première condition soit remplie, on pourra élever au carré les deux membres de l'inégalité

$$\sqrt{1 + 4n} < 3 - 2n,$$

et il en résultera successivement

$$1 + 4n < 9 - 12n + 4n^2,$$
$$4n^2 - 16n + 8 > 0,$$
$$n^2 - 4n + 2 > 0,$$
$$(n - 2 - \sqrt{2})(n - 2 + \sqrt{2}) > 0.$$

Or, $n < \frac{3}{2}$ donne

$$n - 2 - \sqrt{2} < 0,$$

il faut donc qu'on ait

$$n - 2 + \sqrt{2} < 0;$$

d'où

$$n < 2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}.$$

De ce qui précède on peut conclure que l'inégalité

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que x_2 soit une valeur plus approchée de x' que x_1.

Car, en supposant que les nombres a, b, c satisfassent à la condition

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad n < 2 - \sqrt{2},$$

on aura

$$n < 2 + \sqrt{2};$$

d'où

$$(n - 2 - \sqrt{2})(n - 2 + \sqrt{2}) > 0.$$

Et il s'ensuivra

$$(1) \qquad \frac{a}{b}(x_1 + x') < 1; \qquad x' - x_2 < x_1 - x'.$$

Il reste à faire voir que si l'inégalité

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

existe, tous les nombres x_1, x_2, x_3, x_4, etc., convergeront vers x'.

Remarquons d'abord que les termes de rangs impairs x_1, x_3, x_5,... auront des valeurs plus grandes que x' et décroissantes, et que les termes de rangs pairs x_2, x_4, x_6,... auront des valeurs croissantes moindres que x'.

En effet, quels que soient a, b, c, on a

$$x_1 > x' \quad \text{et} \quad x_2 < x'.$$

En outre, si $\frac{ac}{b^2}$ est moindre que $2 - \sqrt{2}$, le nombre x_2

sera nécessairement positif. Car, en substituant $\frac{c}{b}$ à x_1 dans l'égalité

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2,$$

il vient

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c}{b}\left(1 - \frac{ac}{b^2}\right).$$

Le facteur $1 - \frac{ac}{b^2}$ est positif, puisqu'on suppose

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2};$$

on a donc

$$x_2 > 0.$$

Alors de l'inégalité

$$x_2 < x'$$

on peut conclure

$$x_2^2 < x'^2,$$

et il en résulte

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_2^2 > \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2 \quad \text{ou} \quad x_3 > x'.$$

On a d'ailleurs évidemment

$$x_3 < x_1.$$

L'inégalité

$$x_3 < x_1$$

donne

$$x_3^2 < x_1^2,$$

parce que x_3 et x_1 sont positifs; d'où

$$x_4 > x_2 > 0;$$

et de

$$x_3 > x'$$

on conclura

$$x_4 < x',$$

et ainsi de suite.

On voit donc que les valeurs de x_1, x_3, x_5, etc., sont plus grandes que x' et décroissent, et que les valeurs de $x_2, x_4, x_6, \ldots$ croissent en restant moindres que x'. Ainsi, de tous les termes de la suite x_1, x_2, $x_3, \ldots$, le plus grand est x_1.

Il est maintenant facile de reconnaître qu'un terme quelconque x_{2n+1} a une valeur plus approchée de x' que le terme précédent x_{2n}, c'est-à-dire que

$$x_{2n+1} - x' < x' - x_{2n};$$

car

$$x_{2n+1} - x' = \frac{a}{b}(x'^2 - x_{2n}^2) = \frac{a}{b}(x' + x_{2n})(x' - x_{2n}).$$

Mais on vient de voir que x_{2n} est moindre que x_1; donc

$$\frac{a}{b}(x' + x_{2n}) < \frac{a}{b}(x' + x_1).$$

D'ailleurs l'inégalité supposée

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

donne

$$\frac{a}{b}(x' + x_1) < 1;$$

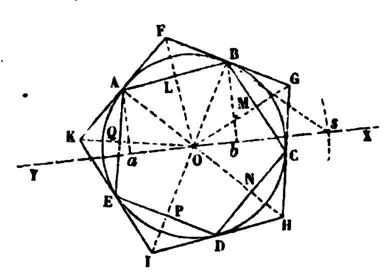
par conséquent, on a

$$x_{2n+1} - x' < x' - x_{2n}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. G.

NOTE SUR UNE PROPOSITION DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorème. *La somme algébrique des perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone régulier* ABCDE *sur une droite* XY *menée par le centre* O *du polygone est nulle, quelle que soit la direction de la droite.*



Lorsque le nombre des côtés du polygone est pair, les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur une droite quelconque passant par le centre sont deux à deux égales et de signes contraires, il est alors évident que leur somme est nulle. Il n'y a donc lieu à démonstration que dans le cas où le nombre des côtés est impair. Toutefois, la démonstration suivante s'applique indistinctement aux deux cas.

Par les sommets A, B, C, D, E je mène des tangentes à la circonférence circonscrite au polygone considéré. Cette construction détermine un nouveau polygone régulier FGHIK semblable au premier et circonscrit au cercle dont le rayon est OA. Ensuite, je conduis les droites OF, OG, OH, OI, OK qui passent par les milieux L, M, N, P, Q des côtés du polygone inscrit. Puis je nomme :

s la somme des perpendiculaires abaissées sur la droite XY des sommets du polygone inscrit ;

s' la somme des perpendiculaires abaissées sur XY des sommets du polygone circonscrit;

s'' la somme des perpendiculaires menées à la même droite par les points L, M, N, P, Q.

Comme les sommets du polygone ABCDE sont les milieux des côtés du polygone FGHIK, on aura

$$s = s',$$

et de même

$$s'' = s,$$

puisque les points L, M, N, P, Q sont les milieux des côtés du polygone ABCDE.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître qu'en désignant par α le rapport des lignes OF, OL, on aura aussi

$$s' = s'' \times \alpha.$$

Car le rapport des perpendiculaires abaissées des points F et L sur XY sera égal à α. Et le même rapport existera entre les perpendiculaires menées par les points G, M, puisque

$$\frac{OG}{OM} = \frac{OF}{OL} = \alpha.$$

Et ainsi de suite. Donc

$$s' = s''.\alpha.$$

Si maintenant on substitue s à s' et à s'' dans l'égalité

$$s' = s''.\alpha,$$

il viendra

$$s = s.\alpha,$$

d'où

$$(\alpha - 1)s = 0.$$

Mais $\alpha - 1$ n'est pas nul, donc

$$s = 0.$$

La proposition est ainsi démontrée, quel que soit le nombre des sommets du polygone considéré.

Corollaire I. *La somme algébrique des projections des rayons* OA, OB,..., OE *sur un axe rectiligne* XY *passant par le centre* O *est nulle;* car ces projections sont précisément égales aux perpendiculaires abaissées des points A, B,..., E sur un second axe rectiligne mené par le centre et perpendiculaire au premier XY.

Corollaire II. *Si l'on décrit avec un rayon quelconque une circonférence ayant le même centre que le polygone régulier, la somme des carrés des distances des sommets du polygone à un point quelconque de cette circonférence sera une quantité constante.*

En effet, nommons r le rayon OA du polygone; n le nombre de ses côtés; r' le rayon de la circonférence décrite; S un point quelconque de cette circonférence. Et concevons que des différents sommets du polygone on ait mené des droites au point S, et qu'on ait projeté sur l'axe OS les rayons OA, OB, etc. En désignant par $\mathrm{O}a$, $\mathrm{O}b$,... ces projections, les triangles OAS, OBS, etc., donneront

$$\overline{\mathrm{AS}}^2 = r^2 + r'^2 \pm 2r'.\mathrm{O}a,\quad \overline{\mathrm{BS}}^2 = r^2 + r'^2 \pm 2r'.\mathrm{O}b,\ldots,$$

ou plus simplement

$$\overline{\mathrm{AS}}^2 = r^2 + r'^2 + 2r'.\mathrm{O}a,\quad \overline{\mathrm{BS}}^2 = r^2 + r'^2 + 2r'.\mathrm{O}b,\ldots,$$

en convenant de considérer les projections $\mathrm{O}a$, $\mathrm{O}b$, etc., comme positives ou négatives suivant qu'elles seront dirigées en sens contraire de OS ou dans le même sens que OS.

Si l'on additionne toutes ces égalités, dont le nombre est n, en ayant égard à ce que la somme algébrique des projections OA, OB, etc., est nulle (corollaire I), on aura

$$\overline{\mathrm{AS}}^2 + \overline{\mathrm{BS}}^2 + \ldots = n(r^2 + r'^2).$$

Cette dernière égalité montre que la somme des carrés des distances des sommets A, B, etc., au point S, est indépendante de la position de ce point sur la circonférence décrite. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 394

(voir page 312);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Licencié ès Sciences, Professeur à Paris.

Soient

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad m_4$$

les coefficients angulaires de quatre diamètres formant le premier faisceau, et

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \mu_4$$

les coefficients angulaires respectifs des quatre diamètres conjugués formant le second faisceau. Ces huit coefficients sont tels, que l'on a

$$m_1 \mu_1 = m_2 \mu_2 = m_3 \mu_3 = m_4 \mu_4 = \mp \frac{b^2}{a^2};$$

le signe supérieur se rapporte à l'ellipse et le signe inférieur à l'hyperbole, a et b sont les demi-axes de la conique considérée.

On sait que le rapport anharmonique de quatre droites concourantes en un même point est égal au rapport anharmonique des quatre points qu'une transversale quelconque détermine sur ces quatre droites. On sait aussi que ce dernier rapport est le même que le rapport anharmonique des projections de ces quatre points sur une droite quelconque, sur l'axe des x par exemple.

Cela posé, l'équation d'une transversale étant représentée par

$$y = px + q,$$

désignons par

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,$$

les abscisses des points d'intersection qu'elle détermine sur les droites du premier faisceau. On a

$$x_1=\frac{q}{m_1-p},\quad x_2=\frac{q}{m_2-p},\quad x_3=\frac{q}{m_3-p},\quad x_4=\frac{q}{m_4-p}.$$

Le rapport anharmonique du premier faisceau est égal à

$$\frac{(x_1-x_4)(x_3-x_2)}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}.$$

Remplaçons x_1, x_2, x_3, x_4 par leurs valeurs, ce qui donne

$$\frac{(m_4-m_1)(m_2-m_3)}{(m_4-m_3)(m_2-m_1)}.$$

D'après la symétrie des calculs, on voit que le rapport anharmonique du second faisceau est égal à

$$\frac{(\mu_4-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)}{(\mu_4-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)}.$$

Si l'on remplace dans ce rapport μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 par leurs valeurs en fonction de m_1, m_2, m_3, m_4, on reconnaît après quelques simplifications que le rapport anharmonique du premier faisceau est égal au rapport anharmonique du second. C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. Ce théorème est un corollaire de ce théorème : Soient une conique et un faisceau; chaque rayon du faisceau coupe la conique en deux points; le faisceau qui passe par ces points d'intersection et qui a pour sommet un point quelconque de la conique est un faisceau en *involution*. Les rayons qui passent par les deux points d'intersection d'un même rayon du premier faisceau avec la conique sont des rayons *correspondants*. M. de Jonquières fait mention de ce théorème, mais pour les diamètres conjugués seulement. On en déduit intuitivement le théorème général.

SOLUTION DE LA QUESTION 397

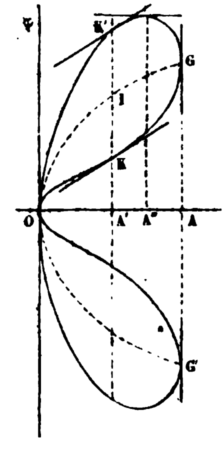
(voir page 390).

PAR M. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Discuter la courbe du quatrième degré donnée par l'équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}.$$

On remarque d'abord que si l'on prend une longueur $OA = u$ dans le sens des x positifs, et qu'on mène par le



point A une parallèle à l'axe des y, la courbe est tout entière comprise entre ces deux parallèles. De plus la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, car en rétablissant le double signe devant chaque radical, les valeurs de y correspondantes à une même abscisse sont deux à deux égales et de signes contraires,

$$y = \pm \sqrt{ax} \pm \sqrt{x(a - x)}.$$

Je discute donc la partie de courbe située au-dessus de l'axe des x

$$y = \sqrt{ax} \pm \sqrt{a(a-x)}.$$

La parabole $y = \sqrt{ax}$ est une courbe diamétrale pour des cordes parallèles aux y. Or, si je prends à partir du point A une longueur AG égale au paramètre a, la parabole passera en G; en appelant φ la longueur qu'il faut porter en dessus et en dessous à partir de la parabole, on a $\varphi = 0$ pour $x = a$ (*).

Donc le point G est un point de la courbe. De même pour $x = 0$, on a $\varphi = 0$, et comme entre $x = 0$ et $x = a$ φ reste positif, il passe par un maximum, qui s'obtient en égalant les deux facteurs sous le radical, puisque leur somme est constante.

Si donc, au milieu A' de OA, j'élève une perpendiculaire à l'axe des x, et qu'à partir du point I, où elle coupe la courbe, je porte deux longueurs IK' et IK égales à OA' ou a, j'aurai les deux points de la courbe pour lesquels φ atteint son maximum. A partir de là, et x croissant jusqu'à a, L diminue jusqu'à 0, il est donc facile de construire approximativement la courbe.

Occupons-nous maintenant des tangentes.

Le coefficient angulaire donné par la formule

$$\operatorname{tang} \alpha = \varphi'(x)$$

est ici

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \pm \frac{a-2x}{2\sqrt{a(a-x)}}.$$

Pour $x = 0$ et $x = a$, tang $\alpha' = \infty$, ce qui prouve que les tangentes à l'origine et au point G sont l'axe des y, et sa parallèle menée par le point A.

(*) $y = \sqrt{a(a-x)}$ représente un cercle. Tm.

Si je fais

$$x = \frac{a}{2},$$

je trouve

$$\tang \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc les tangentes aux points K et K′ sont parallèles, et la tangente de leur angle avec l'axe des x est donnée par la formule précédente. Il est donc facile de les construire.

On peut se proposer de chercher le point de la courbe pour lequel la tangente est parallèle à l'axe des x. Il suffit pour cela d'annuler tang α, et on trouvera en même temps la valeur de x pour laquelle l'ordonnée correspondante est maximum.

Posons donc

$$\tang \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sqrt{ax}} = \frac{a - 2x}{\sqrt{ax - x^2}}$$

ou, en réduisant au même dénominateur et simplifiant,

$$x = \frac{3a}{4},$$

et la valeur correspondante de φ est $\frac{a}{4}\sqrt{3}$.

On prendra donc

$$OA'' = \frac{3}{4}a,$$

on élèvera par le point A″ une perpendiculaire à l'axe des x, et, à partir du point où cette perpendiculaire coupera la parabole, on portera une longueur $= \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

La tangente au point S est parallèle à l'axe des x.

Si l'on considère la branche de courbe OKG, il est fa-

cile de voir que tang α reste toujours positif : il doit passer par un minimum entre $x = 0$ et $x = a$.

Ce minimum correspond à un point d'inflexion, et on l'obtiendrait en égalant à zéro la dérivée de tang α.

On peut vérifier quelques-uns des résultats précédents par une autre méthode.

Si nous coupons la courbe par des parallèles représentées en général par

$$y = h,$$

les abscisses des points d'intersection nous seront données par l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 2h^2x^2 - 4h^2ax + h^4 = 0.$$

Dans cette équation il manque un terme entre deux de même signe, ce qui nous permet d'affirmer l'existence de deux racines imaginaires. Une parallèle à l'axe des x ne coupera donc jamais la courbe plus de deux fois.

On voit aussi qu'il est des valeurs de h pour lesquelles elle ne la coupera pas du tout ; car si l'équation précédente a deux racines réelles, celle que l'on obtiendra en égalant à zéro la dérivée du premier membre, aura toujours une racine réelle, mais cette racine devra donner un résultat négatif. Si on la substitue à x dans l'équation en x^4, puisqu'une des racines de cette dernière est comprise entre $+\infty$ et celle de la dérivée, et l'autre entre celle-ci et $-\infty$, en résolvant l'inégalité on trouverait une valeur maximum pour h.

L'équation en x^4 fait voir également que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x ; car pour deux valeurs de h égales et de signes contraires, elle est identiquement la même.

SUR LA CONSTRUCTION

Des racines de l'équation du quatrième degré par l'intersection d'une parabole et d'un cercle ;

PAR M. JULES VIEILLE.

Soit l'équation

(1) $$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

dont on se propose de construire géométriquement les racines.

Le moyen le plus simple consiste, comme on sait, à employer la parabole ayant pour paramètre l'unité, et le cercle. A cet effet, on pose

(2) $$x^2 = y.$$

En remplacant x^2 par y dans l'équation (1), on a

(3) $$y^2 + py + qx + r = 0,$$

puis si l'on ajoute membre à membre les équations (2) et (3), il vient

(4) $$y^2 + x^2 + (p-1)y + qx + r = 0,$$

équation d'un cercle dont les points d'intersection avec la parabole représentée par l'équation (2) ont pour abscisses les racines de l'équation (1). Mais ce cercle n'est pas toujours réel. Si l'on écrit son équation sous la forme

$$\left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{(p-1)^2 + q^2}{4} - r,$$

on voit qu'il sera imaginaire toutes les fois qu'on aura

(5) $$r > \frac{(p-1)^2 + q^2}{4};$$

Et alors se présentent ces deux questions :

1°. *Quand le cercle défini par l'équation* (4) *est imaginaire, l'équation* (1) *a-t-elle ses racines imaginaires?*

2°. Réciproquement, *quand l'équation* (1) *a ses racines imaginaires, le cercle est-il toujours imaginaire?*

La réponse à la première question est affirmative : toutes les fois que le cercle est imaginaire, il est vrai que l'équation (1) a ses racines imaginaires. En effet, à une valeur réelle de x qui vérifierait l'équation (1), correspondrait une valeur réelle de y tirée de l'équation (2); et comme les solutions du système (1) et (2) vérifient nécessairement l'équation (4), il s'ensuivrait que cette dernière admettrait une solution réelle, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, quand l'inégalité (5) aura lieu, on sera certain que l'équation proposée n'a que des racines imaginaires, et, par conséquent, toute autre combinaison de lieux géométriques *réels* serait inutile à chercher, en vue de construire ces racines.

Il n'en est pas de même de la seconde question : de ce que l'équation (1) a ses racines imaginaires, il ne s'ensuit pas que le cercle défini par l'équation (4) soit nécessairement imaginaire. On conçoit en effet que, pour certaines valeurs des coefficients p, q, r, le cercle, quoique réel, puisse ne pas couper la parabole, dont l'équation ne dépend pas de ces mêmes coefficients. Pour éclaircir ce point, attachons-nous à l'équation plus simple

$$x^4 + qx + r = 0,$$

dans laquelle le terme en x^2 manque. La condition pour qu'elle ait ses quatre racines imaginaires est aisément fournie par le théorème de Sturm. La voici

$$256r^3 - 27q^4 > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \qquad r > 3\left(\frac{q}{4}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

D'autre part, l'inégalité (5) se réduit, pour $p = 0$, à

$$(7) \qquad r > \frac{1+q^2}{4}.$$

D'après ce que nous avons démontré plus haut, l'inégalité (6) doit être une conséquence de l'inégalité (7). C'est ce que nous allons d'abord vérifier, en faisant voir qu'on a toujours

$$\frac{1+q^2}{4} > 3\left(\frac{q}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$$

ou

$$4(1+q^2)^3 - 27q^4 > 0.$$

En effet, si l'on développe le cube et qu'on pose

$$q^2 = z,$$

le premier membre de cette inégalité prend la forme

$$4z^3 - 15z^2 + 12z + 4,$$

et l'on reconnaît que $z = 2$ le réduit à zéro; de plus, le quotient par $z - 2$ est encore annulé pour $z = 2$; en sorte que l'on trouve

$$4z^3 - 15z^2 + 12z + 4 = (z-2)^2(4z+1).$$

Par suite, en rétablissant q^2 à la place de z, on voit que l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(q^2-2)^2(4q^2+1) > 0.$$

Sous cette forme, elle est évidemment satisfaite pour toute valeur numérique de q, à l'exception de $q = \pm\sqrt{2}$

double valeur pour laquelle le premier membre se réduit à zéro. Quand on suppose $q = \pm \sqrt{2}$, les inégalités (6) et (7) s'accordent à donner $\frac{3}{4}$ pour limite inférieure de r.

En résumé, lorsqu'on cherche à construire les racines de l'équation du quatrième degré par l'intersection de la parabole $x^2 = y$ avec un cercle, et qu'on rencontre un cercle imaginaire, l'équation proposée a aussi ses racines imaginaires. Mais cette analyse prouve que la réciproque n'est pas vraie : que si l'équation

$$x^4 + qx + r = 0$$

a ses racines imaginaires, le cercle sera néanmoins réel tant que r aura une valeur positive comprise entre $3\left(\frac{q}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ et $\frac{1+q^2}{4}$. Ces deux limites coïncident quand on a $q^2 = 2$; et, dans ce cas, pour toute valeur de r supérieure à $\frac{3}{4}$, le cercle et les racines de l'équation proposée sont imaginaires à la fois.

SOLUTION DE LA QUESTION 392 (PROUHET)

(voir page 311);

PAR M. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Si l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

est de degré *pair*, et si ses racines peuvent se partager en

couples donnant la même somme $2s$, l'équation

$$(2) \qquad f'(x) = 0$$

admettra la racine s, et ses autres racines se partageront en couples donnant la même somme $2s$.

Si l'équation (1) est de degré *impair*, ayant une racine égale à s et toutes ses autres racines pouvant se partager en couples dont la somme égale $2s$, les racines de l'équation (2) se partageront aussi par couples donnant la même somme $2s$.

Dans le premier cas, les équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{v}(x) = 0,$$

et dans le second les équations

$$f(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f^{iv}(x) = 0$$

auront en commun la racine s.

Je m'occupe d'abord du premier cas. Puisque les racines se partagent par couples donnant la même somme $2s$, le polynôme $f(x)$ peut se décomposer de la manière suivante

$$f(x) = (x - a)[x - (2s - a)](x - b)[x - (2s - b)]\ldots$$

ou bien

$$f(x) = [x^2 - 2sx + a(2s - a)] \times [x^2 - 2sx + b(2s - b)].$$

Prenant la dérivée d'un produit suivant la règle, j'ai

$$f'x = 2(x - s) \times \left[\frac{fx}{x^2 - 2sx + a(2s - a)} + \frac{f(x)}{x^2 - 2sx + b(2s - b)}\ldots\right].$$

Je remarque d'abord que l'équation

$$f'(x) = 0$$

admet bien la racine s, puisque $f'(x)$ est divisible par $(x - s)$.

De plus, si ayant supprimé le facteur commun $(x - s)$, je considère l'équation composée d'une somme de produits

$$[x^2 - 2sx + a(2s - a)][x^2 - 2sx + b(2s - b)] \ldots = 0,$$

je vois que le premier membre ne change pas quand on y remplace x par $2s - x$. Si donc un nombre x' est racine, $2s - x'$ le sera aussi, et les racines se distribueront bien par couples donnant la même somme $2s$, comme il fallait le démontrer.

Je passe au second cas.

Le polynôme peut se mettre sous la forme

$$fx = (x - s)[x^2 - 2sx + \alpha(2s - \alpha)] \times [x^2 - 2sx + \beta(2s - \beta)] \ldots;$$

donc

$$f'x = \frac{fx}{x - s} + \frac{2(x - s)fx}{x^2 - 2sx + \alpha(2s - \alpha)} + \frac{2(x - s)fx}{x^2 - 2sx + \beta(2s - \beta)} + \ldots.$$

Comme précédemment, si je remplace dans ce polynôme x par $(2s - x)$, il ne changera pas de valeur.

Car dans le premier terme les deux termes de la fraction changent de signe en conservant la même valeur absolue. La fraction reste donc la même.

Il en est de même des autres.

Ainsi donc encore, si un nombre x' est racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

$2s - x'$ l'est aussi. Autrement dit, les racines de cette équation se partagent par couples donnant la même somme $2s$: ce qu'il fallait démontrer.

Or maintenant $f'x$ est un polynôme de degré pair,

dont les racines se partagent par couples donnant la même somme $2s$. Donc, d'après la première partie du théorème,

$$f''(x) = 0$$

admet la racine s, s est de degré impair.

Et les autres racines se distribueront par couples donnant la même somme $2s$. Donc, d'après la seconde partie du théorème, l'équation

$$f'''(x) = 0$$

sera de degré pair et ses racines jouiront de la même propriété. On en conclura encore que l'équation

$$f^{\text{IV}}(x) = 0$$

admet la racine s.

Alors on voit que si $f(x) = 0$ est de degré impair, les équations

$$f(x) = 0,\quad f''(x) = 0,\quad f^{\text{IV}}(x) = 0,\ldots$$

admettent en commun la racine s.

Et on ferait voir de la même manière que si $f(x)$ est de degré pair, les équations

$$f'(x) = 0,\quad f'''(x) = 0,\quad f^{\text{V}}(x) = 0,\ldots$$

admettent la racine s.

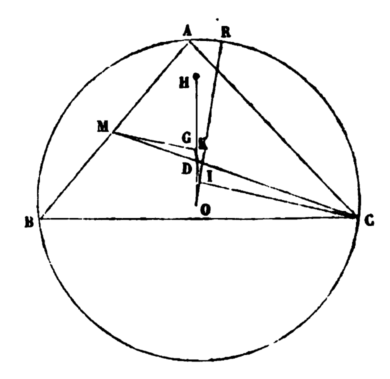
SOLUTION DE LA QUESTION VIII DE M. P. DE LAFFITTE

(voir page 206);

PAR M. LEGRANDAIS,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. J. Vieille).

Soit un triangle ABC; on joint le centre G du cercle

inscrit au milieu M de AB, et par le point C on mène CI parallèle à GM, et on prend sur cette parallèle CI = 2GM. Il s'agit de démontrer que la plus courte distance du point I au cercle circonscrit de centre O est égale à $2r$;



r étant le rayon du cercle inscrit (*). Ainsi

$$IR = 2r.$$

En effet, si je mène la médiane CM, cette ligne coupe la ligne GI en un point D tel, que l'on a

$$\frac{GM}{CI} = \frac{DM}{CD} = \frac{1}{2}.$$

Donc le point D est le centre de gravité du triangle ABC.

Cela posé, je remarque que si je mène OD et que je prenne DH = 2OD, le point H sera le point de rencontre des trois hauteurs et le milieu K de OH le centre de la circonférence qu'on nomme en géométrie la circonférence des neuf points. Or on sait que la distance des centres des cercles inscrits et circonscrits à un triangle est une moyenne proportionnelle entre les diamètres du cercle circonscrit et la distance du centre du cercle in-

(*) La ligne IDG ne coïncide pas avec OKH. Tm.

scrit au centre du cercle des neuf points (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 79 et 199).

On a donc

$$OG^2 = 2R \times GK.$$

Mais

$$OG^2 = R(R - 2r);$$

donc

$$GK = \frac{R - 2r}{2}.$$

Mais les deux triangles DKG, DIO sont semblables, car on a

$$GD = \frac{DI}{2}, \quad KD = KO - DO = \frac{3DO}{2} - DO = \frac{DO}{2};$$

donc on a aussi

$$GK = \frac{OI}{2},$$

et, par conséquent,

$$OI = R - 2r;$$

donc

$$IR = 2r.$$

Note du Rédacteur. M. Louis Cremona, professeur au gymnase de Crémone, dans un Mémoire sous le titre : *Mota intorno ad alcuni teoremi di geometria segmentaria*, in-4 de 14 pages, démontre les sept théorèmes de M. Laffitte, à l'aide des procédés de la géométrie algorithmique : prenant pour axes les trois droites *doubles* de deux figures homographiques et faisant usage de coordonnées trilinéaires, l'auteur parvient avec une extrême facilité à des formules d'une symétrie et d'une élégance admirables. Le Mémoire est extrait du *Programme* publié à Crémone à la fin de l'année scolaire de 1857.

Rome possédera en 1858 un journal mathématique rédigé par MM. Betti, Brioschi, Genocchi, Tortolini, et faisant suite aux savantes *Annales* de ce dernier. Ce journal sera principalement consacré à propager les théories

symboliques de la géométrie et de l'arithmétique *universelles*.

M. Rey, professeur à Paris, traduit l'ouvrage capital du Rév. Robert Carmichael sur les calculs symboliques (voir *Bulletin*, t. I, p. 83). Trouvera-t-il un éditeur? Ce n'est pas une production πρὸς ἄλφιτον.

SOLUTION DE LA QUESTION 391 (PROUHET)

(voir page 311);

PAR M. TRAVERSE,
Elève de l'institution Favart (classe de M. Colombier).

Désignons par a le rapport de DC à DE et par θ l'angle D. Je construis le triangle ADB : ce qui fait connaître les positions des trois sommets A, B, D du pentagone. Des points A, B comme centres, et avec des rayons respectivement égaux à AE, BC, je décris des circonférences. Je joins le point D à un point quelconque K pris sur l'une de ces circonférences, sur la circonférence A par exemple, et je détermine le point M de manière que l'on ait

$$K\widehat{D}M = \theta \quad \text{et} \quad \frac{DM}{DK} = a.$$

Le lieu des points tels que M est toujours une ligne semblable à celle qui a servi à la construire. Dans le cas actuel, ce lieu est une circonférence. Pour la déterminer, en grandeur et en position, prenons DH et HI de telle sorte que $\frac{DH}{DA} = a = \frac{HI}{AE}$ (*). Menons DF de manière que l'angle ADF soit égal à θ; puis prenons DF égal à DH. Le point F ainsi déterminé sera le centre de cette circonférence, et son rayon sera égal à HI.

(*) HI est parallèle à AE et I est sur le côté DE. TM.

La circonférence F coupe, je suppose, en deux points C et C′ la circonférence B. Prenons un quelconque de ces deux points, c par exemple, pour quatrième sommet du pentagone. Je mène la droite DN faisant avec DC un angle égal à θ. La droite DC et la circonférence F auront autant de points communs que la droite DN et la circonférence A. En supposant que DC ait deux points communs avec la circonférence F, j'appelle E celui des deux points d'intersection de DN avec la circonférence A qui satisfait à $\frac{DC}{DE} = a$. Le point E sera le cinquième sommet du pentagone demandé.

Scolie. Le nombre de points communs aux circonférences B et F donne le nombre des solutions du problème.

NOTE POUR LA PAGE 316;

PAR M. E. CATALAN.

En adoptant les raisonnements de l'auteur, on doit lire

$$N = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$

et la formule est

$$x = \frac{1}{1296} m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) \times (m^4 + m^3 - 73m^2 + 257m - 102).$$

RECTIFICATION (pages 432 et 433).

Le nombre des racines de l'équation

$$x - 1000\pi . \sin x - 50\pi = 0$$

n'est pas 2001, mais 1999. Cette équation n'a aucune racine comprise entre -950π et $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$; elle n'a aucune racine comprise entre $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ et 1050π.

G.

THÉORÈME SUR LES NORMALES;

PAR M. DEWULF,
Officier du Génie.

Si dans le plan d'une courbe de degré n on décrit un cercle quelconque et que par les $2n$ points d'intersection on mène les normales à la courbe, le centre du cercle est le centre des moyennes harmoniques des $2n$ points d'intersection des $2n$ normales avec un diamètre quelconque du cercle.

Démonstration.

$F=0$ équation de la courbe, $\varphi = x^2+y^2-C=0$ équation du cercle; r étant l'ordonnée à l'origine d'une normale, on a

$$\frac{1}{r} = 2\,\frac{\dfrac{dF}{dx}}{\dfrac{d\varphi}{dy}\dfrac{dF}{dx}-\dfrac{d\varphi}{dx}\dfrac{dF}{dy}},$$

et, d'après le théorème de Jacobi (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 124), $\sum \frac{1}{r}=0$. C. Q. F. D.

Nota. Je préviens derechef les élèves que $\frac{dF}{dx}$ est la dérivée de F par rapport à x, de même $\frac{dF}{dy}$, et les prie de vouloir bien faire usage de cette notation dans les travaux qu'ils m'adressent; ils en tireront de grands avantages.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVI.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Analyse combinatoire.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique.

Géométrie de l'espace : Lignes et Surfaces.

Géométrie algorithmique.

Coniques planes.

Surfaces du second degré.

Surfaces du troisième degré.

Géométrie pratique.

Mécanique.

Physique mathématique; Astronomie.

Questions proposées.

Questions résolues.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

(*) Élèves admis : 120

(*) Élèves admis : 50.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les seize premiers volumes.

Nos.	Pages.
TOME II.	
61	48
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VII.	
192	368
193	368
TOME VIII.	
199	44
TOME X.	
240	357
245	358
TOME XI.	
251 (échec) (FAURE)	115
252 (domino) (RÉDACT.)	115
266	401
TOME XII.	
270	99
280	327
TOME XIV.	
307	261
313	305
TOME XV.	
316	52
317	52
324	229
TOME XV. [Suite.]	
325	229
331	243
333	243
342	353
343	353
347	387
349	407
351	458
TOME XVI.	
356	57
357	57
371	127
375	179
379	180
383	182
385	183
398	390
399	391
400	391
403	401
404	401
405	401
406	401
407	402
410	403
411	404

Observation. **Sur 411 questions, il en reste 43 à résoudre. Les autres sont résolues et imprimées, ou bien en manuscrit, et paraîtront en 1858.**

ERRATA.

Pages.	Lignes	Au lieu de :	Lisez :
141	17 en remontant,	Carénon,	Carénou.
151	11 en remontant,	deuxième,	troisième.
204	10 en descendant,	des coniques,	ces coniques.
310	10 en remontant,	eF, dF_2, e_1F_1, dF_2,	$eF\,dF_2$, $e_1F_1\,dF_2$.
378	3 en remontant,	axe,	arc.
379	4 en descendant,	axe,	arc.
379	5 en descendant,	un,	une.
390	15 en descendant,	a, b, c, d,	a', b', c', d'.
401	7 en remontant,	$-s^2$,	$+s^2$.
428	11 en remontant,	Carénon,	Carénou.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

SUR L'EXISTENCE PRÉTENDUE,

dans la Massorah, d'un nombre exprimé selon un système de position. Époque présumée d'admission chez les Arabes. Origine du signe ∞.

On sait que les Israélites attachent une importance extrême à la conservation du texte de l'Ancien Testament et ont pris des précautions minutieuses pour qu'on n'y puisse faire aucune addition, aucune soustraction, fût-ce même d'une lettre, d'un point-voyelle; qu'on ne puisse changer une lettre majuscule en minuscule et *vice versâ*, etc. A cet effet et à diverses époques, des scribes se sont occupés de compter dans chaque livre de la collection biblique le nombre des mots, le nombre des versets, le nombre de fois qu'un même mot se rencontre, etc. Le recueil de toutes ces données numériques forme un ouvrage appelé la Massorah, ce qui signifie la *tradition*. L'époque de la formation et les auteurs de ce recueil sont également inconnus. Une opinion l'attribue à Esdras; mais la critique historique assigne l'intervalle du IIIe au VIe siècle de l'ère vulgaire. S'il existait donc dans cet ou-

vrage un nombre écrit suivant notre système de numération, ce serait la plus ancienne apparition de ce système. Voici ce qui a fait croire à l'existence d'un tel fait. Les nombres sont représentés chez les Hébreux, ainsi que chez les Arabes et les Grecs, par des lettres de l'alphabet : de sorte que chaque mot de la langue a une valeur numérique. D'après cela, les Massorètes, pour fixer un nombre donné dans la mémoire, indiquent un verset de la Bible où se trouve un mot qui a cette valeur numérique. C'est ce qu'on nomme le *simn*, le signe du nombre (*). Or le nombre des versets du Pentateuque est 5845; les Massorètes donnent pour *simn* le verset 26 du chap. 30 d'Isaïe : *veor hachamah jeheje scivazaïme,* la lumière du soleil sera septuplée; *chamah* (*ch* guttural) est un des noms du soleil (**); le *ha* remplace le génitif *du*. Ce mot renferme quatre lettres écrites de droite à gauche : *he* valant 5, *chet* valant 8, *mem* valant 40, *he* final valant 5. Mais ce mot doit rappeler le nombre 5845; d'où l'on infère qu'en partant de la droite 5 vaut 5000, 8 vaut 800. Il y a donc ici une valeur de position. Mais c'est là une rencontre fortuite. Les Massorètes ne pensaient pas à une telle numération : s'ils avaient eu cette intention, ils auraient remplacé le *mem,* dont la valeur effective est 40, par le *daleth* qui, comme le *delta* grec, vaut 4; on aurait eu *hachadah*. D'ailleurs il n'y avait aucune erreur à craindre; en prenant la valeur absolue des lettres, le *hachamah* vaudrait 58, et personne ne s'avisera de croire qu'il n'y a que 58 versets dans le Pentateuque.

La valeur numérique des lettres chez les Grecs et les Arabes a beaucoup nui aux progrès de la science. Ces

---

(*) *Simn* en grec Σημαινω. Cette prononciation est favorable au système des *itistes*.

(**) *Chamah,* littéralement la chaleur; en grec Καυμα, brûlure.

peuples connaissaient et cultivaient comme nous une analyse algébrique, mais ils n'ont jamais pu parvenir à une écriture algébrique, par la raison toute simple que les lettres ayant une valeur numérique déterminée ne pouvaient servir à représenter des nombres quelconques. Il est à remarquer que les Grecs possèdent une double lettre, le *sti*, qui n'a pas de valeur numérique (*) ; aussi Diophante a pris le *sti* pour représenter l'inconnue du problème, le x des modernes. Dans les questions à plusieurs inconnues, il a soin de chercher d'abord les relations entre les inconnues et celle qu'il désigne par le *sti*. C'est dans ces occasions qu'il déploie les ressources variées de son génie si éminemment analytique. Quelquefois pourtant il désigne dans la même question des inconnues différentes par la même figure *sti*, et cela rend souvent la lecture pénible et le raisonnement difficile à suivre. Il fait déjà usage d'abréviations qui portent chez les rabbins le nom de *rasch hatebath*, têtes de mots. Ainsi il écrit δῦ, κῦ, au lieu de δύναμις, carré, κύβος, cube. Pour désigner le *manque* (notre moins), il prend la lettre ψ renversée (ψ) tirée du mot λεῖψις ; mais il n'a pas de signes pour les autres opérations.

L'alphabet latin n'est pas généralement numéral : sept lettres seulement sont devenues constamment numérales, savoir C, D, I, L, M, V, X. Ce sont d'anciens signes numériques transformés peu à peu en lettres (**) ; mais les Romains n'avaient pas de dispositions pour les mathématiques : toutefois Cicéron nous parle d'un patricien ami du premier Scipion, et qui était plongé nuit et jour dans les méditations géométriques et astronomiques.

(*) Il ne faut pas confondre cette double lettre avec le signe *épisème* qui représente le nombre 6, auquel elle ressemble.

(**) *Voir* Probus, page 5.

Mori pene videbamus in studio dimetiendi cœli atque terræ C. Gallum, familiarem patris tui, Scipio. Quoties illum lux noctu aliquid describere ingressum, quoties nox oppressit quum mane cœpisset! Quam delectabat eum, defectiones solis et lunæ multo nobis ante prædicere (De Senect, § 49).

Ainsi ce Gallus savait calculer et prédire les éclipses. Souvent il fut surpris par la nuit dans une opération de géométrie commencée au matin; surpris par le jour dans une opération commencée la veille au soir. On raconte la même chose de Viète, véritable inventeur de l'algèbre symbolique, trois siècles après que Fibonacci eut importé l'algèbre discursive des Arabes.

D'après un manuscrit de la Bibliothèque impériale de Paris (952[e] supplément arabe), M. Woepcke est d'opinion qu'au commencement de la seconde moitié du x[e] siècle de notre ère, des géomètres de l'Orient (principalement de Chiràz) se servaient déjà de chiffres indiens avec valeur de position et emploi d'un signe pour zéro (*), et ce signe est un petit cercle. On peut facilement faire dériver les figures de nos chiffres de celles-ci, excepté le 8, qui ressemble à notre 7, tandis que le 7 est représenté par notre 7 renversé (L); l'origine de notre 8 présente des difficultés.

M. Prouhet, remarquant que le ∞ couché désignait mille chez les Romains et que ce mot *mille* se dit quelquefois par emphase pour un nombre très-considérable, émet l'ingénieuse conjecture que c'est l'origine du signe employé pour l'infini.

(*) *Annali di Scienze matematiche et fisiche* di Tortolini, t. VII, pages 321-188, en français.

BIBLIOGRAPHIE.

M. Valerius Probus, de Notis antiquis; herausgegeben von *Theodore Mommsen*. Besonders abgedruckt aus den berichten der K. S. Ges. der Wissenschaffen, phil.-hist. Classe 1853. Leipzig bei S. Hirzel, t. V, de 91 à 134 (43 pages). — V. Probus, Sur les anciens signes, édité par T. Mommsen.

Valerius Probus a composé un opuscule sur la signification des abréviations usitées dans les actes publics et judiciaires. On possède plusieurs manuscrits de cet opuscule que M. Mommsen décrit et discute. Voici ces manuscrits :

1°. Cyriaque d'Ancône; il est le premier chez lequel on rencontre le nom de Probus attaché aux *Notæ*. Cyriaque paraît avoir copié en 1442 à 1443 un manuscrit de Probus.

2°. Giovanni Marcanova, médecin mort à Pavie en 1467. Il a fait copier calligraphiquement les manuscrits de plusieurs épigraphistes, entre autres Feliciano et Cyrianus. Un de ces manuscrits existe à Berne; ce manuscrit contient 201 pages. Aux pages 160-162, on trouve le Probus légitime (*aecht*) distribué selon l'ordre méthodique; aux pages 164-165, une explication des signes des nombres depuis 1 jusqu'à 1 000 000, explication qui commence ainsi : *Quoniam mentio cœpit de numeris breviter ostendamus qua figura quis numerus repræsentetur. Omnis numerus, ut ait Boetius, per Figuram unitatis repræsentari debet.* Ceci est imprimé dans l'édition de Probus par Ernst comme formant le chapitre XXV, et aussi dans l'édition de 1499, mais sans citer Boëce. Mommsen n'a

pu découvrir ce passage dans Boëce. De 170 à 190, *de Notis antiquis,* de Pierre Diaconus; page 191, *Sequitur de numero litterarum:* c'est l'alphabet numérique de E jusqu'à Z, mais non en vers; aux pages 194 à 201, les Notes de Probus arrangées selon l'ordre alphabétique. Ce manuscrit a été écrit par Mercanova ou sous sa direction, de 1457 à 1460.

3°. *Manuscrit de Vienne.* Il est du x[e] siècle, contient des gloses sur Priscien et Venantius Fortunatus; mais les quatre premières pages sont de la main du bibliothécaire Conrad Celtes (1459-1508). Elles contiennent M. Valerii Probi *de Notis antiquis opusculum,* et, après la phrase finale, τελος θεω χαρις, on lit les vers mnémoniques suivants sur l'alphabet numérique; ces vers sont reproduits dans deux autres manuscrits plus récents. Mommsen dit qu'il les imprime parce qu'il ne sait pas qu'on les ait déjà publiés; on les trouve pourtant dans la *prima parte del general Trattato* de Tartaglia (1556), page 4.

A.	Possidet A numerum *quingenties* ordine recto	$\overset{C}{V}$
B.	Et B *ter centum* pro se retinere probatum	CCC
C.	Et sibi C *centum* jam constat habere connexum Non plus quam *centum* C numero constat habere	
D.	Alpha D et compar *duo et tria* nomina portat	CCCCC
E.	E quo *ducenti cum quinquaginta* tenetur	CCL
F.	Sexta *quater decem* gerit F que distat ab alpha	XXXX
G.	Ergo *quater centum* C nunc caudula reservat	CCCC
H.	Litera H quondam, *ducentum* notaque quondam	CC
I.	I retinet *unum* vocalibus unque tenetur	I
K.	*centenarium medium* servat et *unum*	CL
L.	*Quiquies* L *decem* monstrat numerantibus ecce	XXXXX
M.	M caput est numeri quem scimus *mille* teneri	Mille
O.	O numerum gestat qui nunc *undecimus* extat	XI
Θ.	*Nonaginta* canat quæ sic Θ caput esse videtur	XC
P.	P similem qui g numerum monstratur habere	CCCC
Q.	Q sicut D sequetur numerum similemque tenendo	CCCCC
R.	*Octaginta* facit numerum qui dicitur R	LXXX
S.	Hebdomade speciem S suscipit hec quoque *septem*	LXX
T.	*Centum* tollit de *sexaginta* bicornis	CLX

V. V vero pessundans numero plus quam *quinque* redundas V
X. Duplex X solito *decem* jam morem putato VV
Y. Argolicum callem graditur facitque caracter XCLL
Z. Ultima Z canit fidem *bis mille* tenere.

Tartaglia présente dans l'ouvrage cité ci-dessus des variantes importantes aux lettres suivantes :

B. Au lieu de *probatum*, il a *conetur*.

C. Il n'a que le second vers : Non plus quam centum C constat habere connexum.

D. *Alphæ*.

I. Retinens centum vocalibus una tenetur cento.

N. Nonaginta capit quæ si caput esse videtur.

P. Similis quoque.

T. ... Tollit cum sexaginta.

V. ... Non plusquam.

X. More putatur.

Y. Argolicum callem graditur K; Y que caracter. Cent cinquante.

Z. ... Tenetur.

Le texte de Tartaglia est plus conforme aux règles de la prosodie.

Probus, cité par Tartaglia, donne les raisons suivantes pour les valeurs numériques des six lettres V, X, L, C, D, M.

V est la cinquième voyelle;

X la dixième consonne;

L se change souvent en N, ainsi *Lympha, Nympha*, et N signifie cinquante chez les Grecs;

C initiale de *centum*;

D pour plusieurs raisons : il y a cinq consonnes entre D et M; autre raison : D lettre initiale de *dimidium*, moitié de mille.

M initiale de mille.

Tartaglia réfute ces raisons et en donne d'autres qui ne valent guère mieux.

M. Soleirol, chef de bataillon du Génie, en retraite, déduit ces six signes des instruments qui ont pu servir à les trouver, surtout de la *taille*, instrument encore en usage chez les boulangers (*Mémoires de l'Académie de Metz*, 1854-1855) (*).

C'est à la page 119 du Mémoire de M. Mommsen qu'on trouve l'opuscule de V. Probus. Les mots sont rangés systématiquement sous quatre rubriques.

1. *In monumentis publicis et historiarum libris sacrisque publicis reperiuntur.*

Contient vingt-quatre notes. *Exemples :*

P....	Publicies.
L. ...	Lucius.
P.C..	Patres conscripti.
S.N.L	Socii nominis latini.

2. *Litteras singulares in Jure civile de Legibus et Plebiscitis nunc ponimus.*

Contient aussi vingt-quatre notes. *Exemples :*

P.I.R...	Populum jure rogavit.
L.P.C.R.	Latini prisci cives Romani.
S.F.S...	Sine fraude sua.
V.F.....	Usus fructus.

3. *In legis actionibus hæc.*

Contient onze notes. *Exemples :*

A.T.M.D.O........	Aio te mihi dare oportere.
Q.N.T.S.Q.P.......	Quando negas te sacramento quingenario provoco.
T.PR.I.A.V.P.V D.	Te prætor indicem arbitramve postulo uti des.

(*) On lit une explication plausible de ces signes dans *the Philosophy of arithmetic* de Leslie, introduction.

4. *De edictis perpetuis hæc.*

Contient vingt-trois notes. *Exemples :*

V.B.A...	Viri boni arbitratu.
Q.S.S.S.	Quæ supra scripta sunt.

Probus a été édité par Ernst, Lindenbrog, Gothefred, Putsch.

Suétone, dans sa Biographie (*De illust. gramm.*, c. 24), parle de Probus de Beryte, grammairien, et il dit : *Multa exemplaria contracta emendare ac distinguere ac adnotare curavit, soli huic nec ulli præterea grammatices parti deditus,* et qu'il a aussi publié : *Pauca et exigua de quibusdam minutis quæstionibus.* Mommsen croit que ces *minutis quæstionibus* sont les *Notæ* et qu'ainsi l'auteur des Notes a vécu sous Néron et sous Domitien. Il a publié aussi *Commentarius satis curiose factus de occulta litterarum significatione epistolarum C. Cæsaris scriptarum* (Gell., 17, 9 ; Suet. Cæs., 56). Existe-t-il des monuments où l'on rencontre des valeurs numériques exprimées par les lettres indiquées par Probus ? Il est possible que ces signes numériques aient été purement usités dans les opérations financières ou dans les actes commerciaux privés et non dans les actes publics.

DÉNOMINATIONS ET REPRÉSENTATIONS DES FRACTIONS CHEZ LES ROMAINS.

PREMIER SYSTÈME. — *L'as est l'unité.*

$\frac{12}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{7}{12}$
FF	S =−=	S ==	S3	−S−	V
As	*Deunx*	*Dextans*	*Dodrans*	*Bes*	*Septunx*

$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
S	=−=	==	=−	=	—
Semissis	*Quincunx*	*Triens*	*Quadrans*	*Sextans*	*Uncia*

SECOND SYSTÈME. — *L'once est l'unité.*

$\frac{1}{2}$ once	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$
E	VV	G	V	Ɪ	CIϽ
Semuncia	*Duella*	*Sicilicus*	*Scxcula*	*Drachma*	*Semissecla*

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{192}$
H	ZZ	[illegible]	M	Z	CIII	Q
Tremissis	*Scrupulus*	*Obolus*	*Bissiliqua*	*Ceraces*	*Siliqua*	*Chalcus*

As, terme tarentin, d'où εἷς, un, divisé en douze parties ou *onces*.

Deunx, un douzième ôté, reste $\frac{11}{12}$.

Dextans, un as moins un sixième, *sextans*, reste $\frac{10}{12}$.

Dodra, *δοδρα*, breuvage de neuf ingrédients.

Be-as, *binæ partes assis* = deux tiers de l'as = *bi-tertius*.

Semi, de *ημι*.

Sicilicus, mesure de longueur, $\frac{1}{4}$ du pouce de superficie, $\frac{1}{48}$ du *jugerum* (journal de terre), $\frac{1}{48}$ de l'heure; monnaie de deux drachmes.

Drachme, petite monnaie grecque équivalente à peu près au denier romain.

Scrupus, petite pointe de rocher.

Tremissis, trois vingt-quatrièmes d'once.

TABLES DE BARKER.

Ces Tables citées par Gauss (voir *Bulletin*, tome II, page 16), quoique datant de 1757 et d'une grande utilité pour le calcul des orbites paraboliques, sont presque inconnues en France. Elles ont été données pour la première fois dans l'ouvrage suivant :

An account of the discoveries concerning comets, with the way to find their orbits, and some improvements in constructing and calculating their places, for which reason are here added new Tables, fitted to those purposes; particulary with regard to that comet, which is soon expected to return; by Thomas Barker, Gent. London.

J. Whiston and B. White, 1757, grand in-4 de 54 pages et une planche.

Il s'agit du retour de la comète de 1682, d'après la méthode de Newton. C'est la célèbre comète périodique de Halley. Les nombres de Barker sont avec 5 décimales et les logarithmes avec 6 décimales.

La seconde de ces Tables donne l'aire parabolique correspondante à l'anomalie vraie, croissant par 5 minutes, ainsi que les logarithmes des distances de la comète, avec les différences premières, la distance périhélie étant prise pour unité. Lalande, dans sa *Bibliographie astronomique* (page 469), cite une édition format in-8 de 1759.

Ces mêmes Tables ont été reproduites textuellement et sans révision dans cet ouvrage :

On the determination of the orbits of comets, according to the methods of father Boscowich and M. de Laplace with new and complete Tables and examples of the calculation by both methods; by sir Henri Englefield, bar. t. F. R. S. et F. A. S. London. Printed by Richie and Sammels for Peter Elmsly in the Strand 1379, 1779, 204 pages sans les Tables, 4 planches.

Dans la préface, l'auteur dit avoir donné connaissance de l'écrit de Barker à Pingré et à Méchain et que ce dernier avait fait un grand éloge des Tables cométaires paraboliques.

En 1797, de Zach ayant publié le célèbre Mémoire d'Olbers sur le calcul parabolique, et cela à l'insu de l'auteur, mais avec son consentement tacite, il y joignit les Tables de Barker, revues par une personne qui a voulu garder l'anonyme. Enfin, en 1847, le célèbre directeur de l'observatoire de Berlin donna une nouvelle édition du Mémoire d'Olbers sous ce titre :

Abhandlung über die Leichteste und bequemste methode die bahn eines Cometen zu berechnen, von D[r]

Wilhem Olbers. Mit berichtingung and erweiterung des Tafeln and Fortsetzung des Cometen-Verzeichnisses bis zum Jahre 1847, von neuen herausgegeben von J.-F. Encke, director der Berliner Sterwarte, mit dem Bildniss von Olbers und einer Figuren-Tafel. Weimar. Druckund Verlag des Landes-Industrie-comptoirs, 1847.

Mémoire sur la méthode la plus facile, la plus commode pour calculer l'orbite d'une comète, par le Dr Guillaume Olbers, avec rectification et augmentation de Tables et continuation du catalogue des comètes jusqu'à l'année 1847, éditées de nouveau par J.-F. Encke, directeur de l'observatoire de Berlin, avec le portrait d'Olbers et une planche. Weimar; in-8 de xxiv-250 pages.

Les Tables de Barker ont été calculées de nouveau par M. Luther, l'astronome qui a reçu l'année dernière le prix Lalande pour la découverte de l'astéroïde *Bellone*.

La Table de Barker, troisième du Mémoire, remplit les pages de 87 à 147.

Voici la disposition (voir *Bulletin*, t. II) :

$C = \frac{75K}{\sqrt{2}} = 0,9122791 =$ constante;

$\log C = 9,9601277$;

$q =$ la plus petite distance;

$m = \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} =$ mouvement moyen diurne;

$t - T =$ nombre de jours moyens comptés à partir du périhélie;

$\nu =$ anomalie vraie;

$M = m(t - T)$.

Chaque page contient sept colonnes. Ces colonnes sont divisées par des lignes horizontales formant des rectangles; chaque rectangle contient six indications, et chaque page six rectangles.

La première colonne contient les valeurs de ν depuis o jusqu'à 179° 60′, croissant par 1′40″. Les six autres colonnes contiennent les valeurs de M correspondant aux ν et à côté les différences premières : de sorte que chaque page contient trois colonnes M ; les degrés se lisent au haut de la page. A partir de 30 à 180 degrés, on trouve non les valeurs de M, mais celles de log M. Connaissant ν, on trouve donc M, et *vice versâ* ; connaissant q et t — T, on calcule M, et la Table donne ensuite la valeur de ν correspondant à M.

Delambre reproche aux Tables de Barker de ne pas donner assez de précision ; mais ces Tables procèdent par 300 secondes, tandis que celles de Luther procèdent par 100 secondes, et les logarithmes ont 8 décimales (Delambre, *Astronomie théorique et pratique*, tome III, pages 213-455).

Parlant de la méthode d'Olbers, il dit que c'est une des plus simples et des plus ingénieuses qu'on ait imaginées (*ibid*, p. 348). Ce Mémoire n'est pas encore traduit. La Commission supérieure d'Instruction publique devrait faire dresser une liste des Mémoires importants à traduire et qu'on pourrait présenter comme thèses dans les examens. On n'a pas besoin d'insister sur l'utilité d'une telle mesure.

Les Tables contenues dans le Mémoire d'Encke sont :

Tables I et II. Conversion des parties décimales du jour en parties sexagésimales.

Table III. Celle de M. Luther.

Table IV. Table auxiliaire pour le calcul de l'anomalie vraie lorsqu'elle approche de 180 degrés.

Table V. Pour passer de la parabole à l'ellipse ou à l'hyperbole, d'après le *Theoria motus corporum cœlestium*.

Table IV. Eléments de toutes les comètes calculées jusqu'ici (1847), réunis par le Dr Galle.

Ces comètes sont au nombre de cent soixante-dix-huit. Les éléments sont :

1° Temps de passage au périhélie, temps moyen de Paris; 2° longitude du périhélie; 3° longitude du nœud ascendant; 4° inclinaison; 5° logarithme de la distance périhélie; 6° logarithme du mouvement moyen; 7° excentricité; 8° direction. On donne les noms des divers calculateurs. Les comètes sont disposées par ordre chronologique. Chaque comète périodique conserve le même numéro. La plus ancienne comète, portant le n° 1, est de — 371; calculée par Pingré (*Cometœgr.* I, p. 259); d'après les données d'Aristote.

La comète de Halley, faisant sa révolution dans environ soixante-seize ans, porte le n° 19. On la trouve pour la première fois en 1375, ensuite en 1456, 1531, 1607, 1682, 1759, 1835 (*voir* Laugier, *Connaissance des Temps,* 1846, p. 99; *Comptes rendus,* t. XVI, p. 1003).

Comète d'Encke (n° 96). 1786, 1795, 1805, 1819, 1822, 1825, 1829, 1832, 1835, 1838, 1842, 1845 (révolution en 1207 jours).

Comète de Biela (n° 84). 1772, 1806, 1826 (révolution en 6 $\frac{3}{4}$ années).

Table VII. Plus petites distances des orbites cométaires à l'orbite de la Terre pour les comètes calculées jusqu'en 1795, par M. le professeur Prosperin, d'Upsal. L'unité est la distance de la Terre au Soleil. La comète qui s'est le plus rapprochée de la Terre est celle de 1680 (n° 46); sa distance est 0,0048. Elle a été découverte par Halley, en France, à moitié chemin de Calais à Paris (*Éloge de Halley,* par Mairan, dans les *Éloges* des académiciens de l'Académie royale des Sciences morts dans les années 1741, 1742, 1743, page 124 (révolution en 575 années).

SUR L'ORIGINE DU MOT MOMENT.

Les mots primitifs sont généralement monosyllabiques ou dissyllabiques : aussi en latin la forme primitive de *movimentum*, mouvement, est *momen*. On rencontre cette forme chez Lucrèce. Ainsi, lorsque l'illustre poëte du système atomistique fait cette distinction capitale entre l'agent intellectuel (*animum*) et la force vitale (*anima*) (*), il dépeint la subordination de la matière à cet agent suprême en ces beaux vers :

Cætera pars animæ, per totum dissita corpus,
Paret, et ad numen mentis momenque *movetur.*
(Lib. III, v. 144.)

« L'autre partie de l'âme, *animæ*, répandue dans tout le corps, obéit aux ordres et se dirige d'après l'impulsion de l'esprit. » Plus loin, parlant de l'extrême facilité des particules à se prêter au mouvement, il dit :

Momine *uti parvo possent impulsa moveri*
Numque movetur aqua et tantilluo momine *flutat.*
(Lib. III, v. 191.)

De *momen* on a fait *momentum* pour exprimer le mouvement que prend une balance quand on met un excès de poids dans un des bassins. On connaît ce passage de *la Sapience* si souvent cité :

Quoniam tanquam momentum stateræ, *sic est ante te orbis terrarum* (Sap. XI, 23).

(*) On rencontre une distinction analogue dans le Pentateuque : *nefesch*, anima, *neschamah*, animus. On sait que *anima* et *animus* viennent de ανεμος, souffle et vent, et en hébreu aussi *rouach* (guttural) signifie vent et esprit.

La grandeur de ce mouvement de balance dépend du poids excédant et du bras de levier, de sorte que ce mouvement a pour mesure le produit du poids excédant et du bras de levier; on a donné ensuite à cette mesure le nom de l'objet (*momentum*) qu'il mesure. C'est ainsi qu'en géométrie *carré* désigne à la fois l'objet et sa mesure, de même pour le cube; mais en mécanique le mot moment a cessé de désigner l'objet, et l'expression *mouvement* dérive de *movimentum*, mot de la basse latinité.

Comme la rupture d'équilibre dans la balance produit aussitôt le *momentum*, on a donné ce nom à un intervalle de temps très-court, *temporis momentum:* c'est le dt de la dynamique, qui désigne un temps infiniment petit, *tempusculum;* mais il ne faut pas le confondre avec le mot *instant*, pure conception mentale, un point d'arrêt du temps: l'instant correspond au point de l'espace et le dt correspond au dx qui désigne une longueur infiniment petite et non pas un point. Il y a un nom spécial pour le dt, c'est *moment;* il n'y en a pas pour le dx: cela provient peut-être de ce que le temps n'a qu'une dimension.

Le dt est compris une infinité de fois dans l'unité de temps; le dx une infinité de fois dans l'unité de longueur. Le rapport de ces deux infinis considérés simultanément est fini, se désigne par $\frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dx}} = \frac{dx}{dt}$ et se nomme *vitesse;* l'accroissement dv de cette vitesse est contenu une infinité de fois dans l'unité de vitesse: on a encore le rapport entre deux infinis $\frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dv}} = \frac{dv}{dt}$ qu'on nomme force *accélératrice*.

LIVRES D'ARITHMÉTIQUE D'EUCLIDE.

Les IIe, VIIe, VIIIe et IXe livres d'Euclide ne traitant que des nombres appartiennent à l'arithmétique ; le Xe livre, relatif aux lignes irrationnelles, quoique de nature géométrique, peut encore être classé parmi les travaux numériques. Même quand il s'agit de nombres, Euclide les représente toujours par des lignes et raisonne sur des lignes. Nous qui possédons dans la méthode arabe une excellente notation pour les nombres, nous trouvons un grand avantage à représenter les lignes par des nombres ; privés de cette notation, les Anciens ramenaient au contraire les nombres aux lignes. Nous faisons de même aujourd'hui, lorsque dans les sciences expérimentales on figure les résultats numériques par les coordonnées d'une ligne. Euclide étant un auteur presque inconnu en France, le résumé suivant peut avoir quelque intérêt.

Livre II.

Ce livre a quatorze propositions ; les dix premières sont arithmétiques et reviennent à ces formules modernes.

1. $ab + ac + ad + \ldots = a(b + c + d + \ldots)$.
2. $(a + b)^2 = (a + b)\,a + (a + b)\,b$.
3. $(a + b)\,a = ab + a^2$.
4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
5. $ab + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$.
6. $(a + b)\,b + \frac{1}{4}a^2 = \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2$.

7. $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$.

8. $4(a+b)a+b^2=(2a+b)^2$.

9. $a^2+b^2=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

10. $b^2+(a+b)^2=2\left(\frac{1}{2}a\right)^2+2\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$.

Livre VII.

Ce livre débute par ces vingt-deux définitions.

1. *Unité.* Chaque objet est *un*.

2. *Nombre.* Pluralité formée d'unités.

3. De deux nombres, le moindre est une *partie unique* du plus grand, lorsqu'il mesure exactement le plus grand.

4. De deux nombres, le moindre est une *partie multiple* du plus grand lorsqu'il ne le mesure pas exactement.

5. De deux nombres, le plus grand est un *multiple* du plus petit lorsqu'il en est exactement mesuré.

6. Nombre pair $(2a)$.

7. Nombre impair $(2a+1)$.

8. Nombre pairement pair $(4a)$.

9. Nombre pairement impair $(4a+2)$.

10. Nombre impairement impair $(2a+1)(2b+1)$.

11. Nombre premier qui n'est mesuré que par l'unité.

12. Nombres premiers entre eux qui n'ont que l'unité pour mesure commune.

13. Nombres composés $(abcd\ldots)$.

14. Nombres composés entre eux sont ceux qui ont un nombre pour mesure commune.

15. Un nombre multiplie un autre nombre quand ce-

lui-ci est ajouté autant de fois à lui-même que le premier contient d'unités.

16. Lorsque deux nombres se multiplient, le résultat se nomme *produit* ou *nombre-surface;* les nombres qui se multiplient se nomment *côtés* du produit.

17. Lorsque trois nombres se multiplient, le résultat ou le produit est *nombre-solide;* les nombres qui se multiplient en sont les *côtés*.

18. Nombres carrés.

19. Nombres cubes.

20. Des nombres sont *proportionnés* lorsque le premier est la même partie unique ou la même partie multiple du second que le troisième du quatrième.

21. Des nombres-surfaces aussi bien que des nombres-solides qui ont les côtés proportionnés sont semblables.

22. Un nombre *parfait* est celui qui est égal à toutes ses parties.

Viennent ensuite quarante et une propositions.

1. Etant donnés deux nombres inégaux et si l'on retranche toujours le plus petit du plus grand, sans que le reste mesure exactement le nombre précédent et jusqu'à ce que ce reste soit égal à l'unité, ces deux nombres sont premiers entre eux.

2. Trouver la plus grande commune mesure de deux nombres.

3. Trouver la plus grande commune mesure de trois nombres.

4. De deux nombres, le moindre est toujours une partie unique ou multiple du plus grand.

5 et 6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

7 et 8. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, on a $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$.

9 et 10. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, on a $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

11. Si $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}$, on a $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

12. Si $a:b::c:d$, on a $a:b::a+c:b+d$.

13. Si $a:b::c:d$, on a $a:c::b:d$.

14. Si $a:b::c:d$ et $b:e::d:f$, on a $a:e::c:f$.

15. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

16. $ab=ba$.

17. $ab:ac::b:c$.

18. $ba:ca::b:c$.

19. Si $a:b::c:d$, alors $ad=bc$, et si $ad=bc$, alors $a:b::c:d$.

20. Si trois nombres a, b, c sont proportionnés, alors $b^2=ac$, et si $b^2=ac$, les trois nombres sont proportionnés.

21. Si le rapport $\frac{a}{b}$ est donné dans les *plus petits nombres* et si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors a mesure c, et b mesure d.

22. Si $a:b::c:d$; $b:e:f:c$, alors $a:e::f:d$.

23. Si a et b sont premiers entre eux, le rapport $\frac{a}{b}$ est exprimé dans les plus petits nombres.

24. Lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ est exprimé dans les plus petits nombres, a et b sont premiers entre eux.

25. Si a et b sont premiers entre eux, un nombre c qui mesure a est premier avec b.

26. Si deux nombres a, b sont premiers avec un troisième c, le produit ab est premier avec c.

27. Si deux nombres a, b sont premiers entre eux, alors a^2 est premier avec b.

28. Si deux nombres a, b sont premiers avec c et aussi avec d, alors ab et cd sont premiers entre eux.

29. Si deux nombres a et b sont premiers entre eux, a^2, b^2 ; a^3, b^3 sont aussi premiers entre eux.

30. Si deux nombres a et b sont premiers entre eux, $a+b$ est premier avec a et b.

31. Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas exactement.

32. Si le produit ab est mesuré par un nombre premier c, un des deux nombres a ou b est mesuré par c.

33. Tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier.

34. Tout nombre est un nombre premier ou mesuré par un certain nombre premier.

35. Etant donnés plusieurs nombres, trouver leurs rapports exprimés dans les plus petits nombres.

36. Etant donnés deux nombres, trouver le plus petit nombre qu'ils mesurent.

37. Un nombre a mesuré par les deux nombres c, d est aussi mesuré par leur plus petit multiple.

38. Etant donnés trois nombres, trouver le plus petit nombre qu'ils mesurent.

39 et 40. Si $a = mb$, alors $\frac{a}{m} = \frac{b}{1}$.

41 Trouver le plus petit nombre qui a pour parties $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, c'est-à-dire que s est divisible par a, b, c.

La suite prochainement.

PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE, DE DIOPHANTE.

(Livre V, page 33.)

Ce problème étant propre à donner une idée de l'esprit de la méthode de l'illustre Grec, nous allons, d'après Nesselmann, donner la traduction littérale du problème et de sa solution. L'énoncé du problème est en vers dans l'original.

Deux sortes de vin, l'un à 8 dragmes la mesure, l'autre moins bon à 5 dragmes seulement,
Voilà le mélange que prépara un bon maître pour ses serviteurs dans un festin.
Ce qu'il a payé pour les sortes était un nombre carré.
Si tu ajoutes encore 60 à ce carré,
Regarde, tu auras un second carré; maintenant remarque,
La racine (*de ce carré*) te montre combien l'autre a acheté de mesures;
Et maintenant dis-moi combien du meilleur vin
Et combien à 5 furent mêlés ensemble.

Le sens de cette épigramme est celui-ci : Quelqu'un a acheté deux tonneaux de vin; de l'un la mesure coûte 8 dragmes et de l'autre 5 dragmes. Le prix qu'il paye pour le tout est un nombre carré, et si l'on y ajoute 60, ce sera encore un carré dont la racine indique le nombre total des mesures. Combien y avait-il de mesures à 8 dragmes, combien à 5 dragmes?

Soit le nombre total de mesures x, alors le prix est $x^2 - 60$ et $x^2 - 60$ doit être un carré; il fait la racine égale à x moins un certain nombre; mais $x^2 - 60$ est composé de deux nombres, et égal au prix du vin à 8 dragmes et au prix du vin à 5 dragmes. Le $\frac{1}{5}$ de celui-ci est le nombre des mesures à 5 dragmes et le $\frac{1}{8}$ de celui-là est le

nombre des mesures à 8 dragmes ; mais comme le nombre des mesures de deux sortes doit être x, il s'agit donc de partager $x^2 - 60$ en deux nombres, de manière que le $\frac{1}{5}$ de l'un et le $\frac{1}{8}$ de l'autre fassent ensemble x. Cela n'est possible qu'autant que x est plus grand que $\frac{1}{8}$ de $x^2 - 60$ et plus petit que $\frac{1}{5}$ de $x^2 - 60$; ainsi $x^2 - 60$ sera plus grand que $5x$ et plus petit que $8x$. Comme $x^2 - 60$ doit être plus grand que $5x$, ajoutant de part et d'autre 60, x^2 doit être plus grand que $5x + 60$: ainsi x^2 est plus grand que $5x$ plus un nombre plus grand que 60 ; x sera donc plus grand ou du moins plus petit que 11. Ensuite comme $x^2 - 60$ est plus petit que $8x$, si l'on ajoute des deux parts 60, alors x^2 sera égal à $8x$ plus un nombre plus petit que 60, d'où il suit que x ne peut surpasser 12. Mais il a été montré que x ne peut pas être moindre que 11. Donc x sera plus grand que 11 et plus petit que 12. Mais si nous voulons rendre $x^2 - 60$ un carré, nous formons la racine de ce carré avec x moins un certain nombre et l'on obtient x en ajoutant 60 au carré de ce certain nombre et divisant la somme par le double de ce nombre (*). Nous devons donc chercher un nombre tel, que si l'on ajoute à son carré 60 et qu'on la somme par le double de ce nombre, le quotient doit être plus grand que 11 et plus petit que 12. Si l'on nomme x (**) le nombre cherché, alors $\frac{x^2 + 60}{2x}$ doit être plus

(*) $x^2 - 60 = (x - z)^2$, $x = \frac{z^2 + 60}{2z}$.

(**) Ne pas confondre cet x avec le précédent. Diophante n'a qu'un *seul* signe pour toute espèce d'inconnues. Cet x est le z de la note précédente.

grand que 11 et plus petit que 12 ; soit d'abord $\frac{x^2+60}{2x} > 11$, alors $x^2 + 60 > 22x$. Ainsi $22x$ est égal à x^2 plus un nombre moindre que 60, donc x ne peut être moindre que 19; ensuite on doit avoir $\frac{x^2+60}{2x} < 12$, donc $x^2 + 60 < 24x$; ainsi $24x$ est égal à x^2 plus un nombre plus grand que 60; conséquemment, x doit être plus petit que 21, mais il doit en outre être plus grand que 19. Ainsi, si nous voulons rendre $x^2 - 60$ un carré, il faut poser la racine égale à $x - 20$; de là on tire $x = 11\frac{1}{2}$, $x^2 = 132\frac{1}{4}$; soustrayant 60, il reste $72\frac{1}{4}$ (*) : il faut donc décomposer $72\frac{1}{4}$ en deux nombres tels, que le $\frac{1}{5}$ du premier plus le $\frac{1}{8}$ du second fassent ensemble $11\frac{1}{2}$. Supposons que le $\frac{1}{5}$ du premier soit x, alors le $\frac{1}{8}$ du second sera $11\frac{1}{2} - x$; les nombres eux-mêmes sont donc $5x$ et $92 - 8x$ et leur somme doit être $72\frac{1}{4}$, donc $x = \frac{79}{12}$: ainsi le nombre des mesures à 5 dragmes est $\frac{79}{12}$ et le nombre des mesures à 8 dragmes $\frac{59}{12}$; le reste est évident. Avec le symbolisme moderne la solution s'abrége, mais la logique reste la même. Il n'y a d'abréviation que dans l'écriture. Il fallait un génie transcendant pour découvrir cette logique sans le puissant auxiliaire du symbolisme.

(*) C'est le carré de $\frac{17}{2}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal; par M. *F. Frenet*, ancien élève de l'Ecole Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. Ouvrage destiné aux élèves de l'Ecole Polytechnique, à ceux de l'Ecole Normale et aux auditeurs des cours de mathématiques dans les Facultés des Sciences (*).

Je considère ce recueil comme un ouvrage des plus utiles et des mieux faits. Il contient, sous un volume restreint (220 pages), les solutions de plus de 500 questions qui se rapportent aux différentes théories du Programme de la Licence ès Sciences mathématiques. L'ouvrage se compose de trois parties, divisées chacune en deux sections. Dans la première section de chaque partie, on trouve les énoncés des questions à résoudre présentés dans un ordre méthodique; et dans la seconde, les solutions exposées d'une manière succincte, mais très-claire. Quant aux méthodes adoptées pour la résolution des questions principales, nous n'en dirons qu'un mot : c'est qu'elles appartiennent à des géomètres dont les noms font autorité.

Cet ouvrage n'a pas été destiné aux candidats à l'Ecole Polytechnique; nous croyons toutefois pouvoir leur recommander les paragraphes relatifs aux *dérivées* de différents ordres, à la recherche des *vraies valeurs*, aux questions de *maxima* et de *minima*, à la théorie des *tangentes*, des points *singuliers*, à la *construction des courbes*.

G.

(*) Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire de l'École impériale Polytechnique, du Bureau des Longitudes, quai des Augustins, 55.

SUR L'ORTHOGRAPHE DU NOM DE NEPER

(voir Bulletin, t. Ier, p. 106).

Un abonné du Mans nous écrit que dans les ouvrages anglais destinés à la jeunesse le nom de l'inventeur des logarithmes est orthographié *Napier* et pas Neper. Même dans les ouvrages publiés par l'illustre Anglais, le nom est diversement écrit; cela tient à la capricieuse prononciation des voyelles chez les Anglais. La prononciation moderne est Napier, mais je crois qu'en France il faut conserver le nom de Neper attaché aux logarithmes népériens.

SUR LA NÉBULEUSE D'ORION.

Dans l'ouvrage suivant de Jean-Baptiste Cysat de Lucerne : *Mathemata astronomica de loco, motu, magnitudine et causis cometæ annorum* 1618 *et* 1616, Ingoldstadt, in-4, on lit à la page 75 :

Cæterum huic phœnomeno similis stellarum congeries est in firmamento ad ultimam stellam gladii Orionis, ibi enim cernere est (per tubum) congestas iidem aliquot stellas angustissimo spatio et circumcirca interque ipsas stellulas instar albæ nubis candidum lumen affusum.

Ainsi Cysat a observé cette nébuleuse en 1619, au moins trente années avant Huyghens, qui passe pour l'avoir découverte en 1656.

C'est le savant directeur de l'observatoire de Berne, M. Rudolf Wolf, qui est l'auteur de cette curieuse correction, et qui prépare une Notice sur les œuvres et sur

la vie de Cysat (*Astronomische Nachrichten*, t. XXXVIII, n° 895, p. 110; 1854).

Cysatus est né à Lucerne en 1588, était professeur de mathématiques à l'université d'Ingolstadt, et est mort le 3 mars 1657. Il était fils de Rennward, historien de la Suisse. Cysat est un des premiers qui aient observé le passage de Mercure sur le Soleil.

SUR OTHON DE MAGDEBOURG

(voir BULLETIN, t. Ier, p. 11).

Extrait d'une Lettre du prince BALDASSARE BONCOMPAGNI.

Dans l'ouvrage de Kastner intitulé : *Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 604, on lit : « L. Valentini Othonis » Parthenopolitani de triangulis globi sine angulo recto » libri quinque, quibus tria meteoroscopia numeror. ac- » cesserunt. » Il faut remarquer que Valentinus Othon est appelé ici *Parthenopolitanus*, c'est-à-dire de *Parthenopolis*. Or *Parthenopolis* est le nom latin de la ville de Magdebourg d'Allemagne (*). En effet, dans le *Lexicon geographicum, in quo universi orbis Urbes, Provinciæ, Regna, Maria et Flumina recensentur. Illud primum in lucem edidit Philippus Ferrarius Alexandrinus, in Ticinensi Academia Mathematices professor. Nunc Michael Antonius Baudrand Parisinus Prior Commendatarius de Roboribus, de Novo-Mercato, et de Gessenis, hanc editionem emendavit, illustravit, et dimidia parte auctiorem fecit. Parisiis, apud Franciscum Muguet, Regis et Illustrissimi Archiepiscopi Parisiensis typogra-*

(*) Magdebourg signifie, en allemand, la ville des jeunes filles; c'est ce qu'exprime aussi en grec le mot Parthenopolis. TM.

phum MDCLXX. *Cum privilegio Regis,* tome II, page 39, col. 1, on lit : « Parthenopolis item (ex antiquis urbis » Magdeburgensis monumentis, teste Munstero) Magde- » burgum, urbs præclara Germaniæ, in Saxonia, ad Al- » bim fluvium, libera et archiepiscopalis anno salutis » 941 effecta, inter Brunopolim ad occasum II et Berli- » num ad ortum 16 leucis. Dicta est quod ibi Diana virgo » culta fuerit. Eadem Poetis Germanis Parthenope, et » Magdeburga dicitur. » Il paraît donc que Valentinus Othon était de Magdebourg et non pas de Naples.

THÉORÈMES
Sur les équations contenues dans le Ars magna de Cardan (1545).

(Cossali, t. II, p. 325.)

---

1. m *étant une quantité qui vérifie l'équation, elle est divisible par* x — m.

Cardan connaît ce théorème pour le troisième degré et le démontre ainsi.

Soient

$$x^3 = px + q, \quad x^3 + m^3 = px + q + m^3;$$

$x^3 + m^3$ est divisible par $x + m$; le second membre donne pour quotient p et pour reste $m^2 - pm - q$, qui est zéro par hypothèse: de là Cardan déduit les deux autres racines. Mais il ne considère pas le cas où les trois racines sont négatives (*Pratica gener. aut.*, cap. LI).

2. *Le coefficient du deuxième terme est égal en grandeur à la somme des racines* (*Ars magna,* cap. XVIII).

Toujours appliqué seulement au troisième degré; il sait même que lorsque x^2 manque, la somme des racines positives est égale à la racine négative, ou la positive égale la somme des négatives. (*Et patet etiam quod omnes*

modii additionem semper referri possunt, quamvis minus, cum additur, vicem gerat plus, cum detrahitur.)

3. *Le dernier terme connu est le produit des racines.*

Cardan ne connaît pas ce théorème; il a pourtant une foule d'exemples et de passages qui font voir qu'il avait un pressentiment non exprimé de ce théorème. Cela provient de l'usage du temps, qui ne permettait pas de transporter tous les termes dans un seul membre; il fallait n'avoir que des termes positifs dans chaque membre, usage venu des Arabes.

Racines positives, négatives, imaginaires.

Il appelle les positives racines *vraies*, et les négatives racines *feintes*, *fausses*.

Cap. XVIII. *De regula falsum ponendi*. Il résout des problèmes où il adopte pour inconnue une quantité négative en posant l'inconnue égale à $-x$.

Racines réelles et imaginaires.

Cardan distingue deux genres de racines fausses, les *négatives* et les racines carrées des quantités négatives et un troisième qu'il explique obscurément, et on voit qu'il s'agit de $-a-\sqrt{-b}$ où les deux faussetés sont réunies; il donne un exemple, mais dont le résultat est inexact.

Une équation de degré pair n'a aucune racine réelle ou en nombre pair.

Cardan connaît ce théorème pour les équations du second degré et ses derivées $x^{2m}+px^m=q$.

Une équation de degré impair a toujours un nombre impair de racines réelles.

Cardan connaît ce théorème pour le troisième degré; il trouve que les équations

$$x^3+q=px, \quad x^3+px=q,$$

ont trois racines réelles si $\frac{4}{27}p^3 > q$ ou $= q$, et n'en ont qu'une si $\frac{4}{27}p^3 < q$.

$$x^3 + q = nx^2, \quad x^3 + nx^2 = q$$

ont trois racines réelles si $\frac{4}{27}n^3 > q$ ou $= q$, et une seule si $\frac{4}{27}n^3 < q$.

Relations entre le nombre des racines positives et négatives et les signes des termes.

Cap. I de l'*Ars magna*. Cardan dit que dans les équations

$$x^3 = px + q, \quad x^3 + px = q, \quad x^3 + nx^2 = q,$$
$$x^3 + nx^2 + px = q, \quad x^3 = nx^2 + px + q,$$
$$x^3 + nx^2 = px + y, \quad x^3 + px = q,$$

il n'existe qu'une seule racine réelle positive; et il change les racines positives en négatives, et *vice versâ*, en remplaçant x par $-x$. Il étend même ce théorème à

$$x^4 + mx^3 + nx^2 = q, \quad x^4 + mx^3 + nx^2 = px + q.$$

Cardan connaît la règle de Descartes pour le troisième et quatrième degré, quelques cas exceptés.

Racines égales.

Cardan, dans l'équation

$$x^3 = 12x + 16,$$

dit expressément qu'elle a deux racines égales $+2$, $+2$ et une racine fausse -4.

Transformation des équations.

Voici comment Cardan réduit la résolution de l'équa-

tion

$$x^3 + q = px$$

à celle de l'équation

$$z^3 = pz + q,$$

et *vice versâ*. On a

$$q = px - x^3 = z^3 - pz,$$

d'où

$$px + pz = z^3 + x^3, \quad p = z^2 - xz + x^2;$$

connaissant z, on connaît donc x, et *vice versâ*.

Résolution de Cardan des équations du troisième degré.

1°. $$x^3 + px = q,$$

comme et d'après Tartaglia.

2°. $$x^3 = px + q,$$

comme et d'après Tartaglia.

3°. $$x^3 + q = px,$$

la ramène à $z^3 = pz + q$.

4°. $$x^3 = nx^2 + q,$$

il fait $x = z + \frac{1}{3}n$ et revient à la forme $z^3 = pz + q$.

5°. $$x^3 + nx^2 = q,$$

il fait $x = z - \frac{1}{3}n$: ainsi $x = z^2 - n$; d'après Louis Ferraro.

6°. $$x^3 + q = nx^2,$$

il fait $x = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{z}$.

7°. $$x^3 + nx^2 + px = q,$$

8°.	$x^3 + px = nx^2 + q$,
9°.	$x^3 + nx^2 = px + q$,
10°.	$x^3 = nx^2 + px + q$,
11°.	$x^3 + q = nx^2 + px$,
12°.	$x^3 + px + q = nx^2$,
13°.	$x^3 + nx^2 + q = px$.

Il fait partout disparaître le second terme.

Il ne traite pas ces trois cas :

$$x^3 + px + q = 0,$$
$$x^3 + nx^2 + q = 0,$$
$$x^3 + nx^2 + px + q = 0.$$

Cardan enseigne diverses transformations : Cap. XXI *Arithmetices : De permutatione capitulorum invicem;* Cap. VII, *De regulis algebraicis; de capitulorum transmutatione.* Cap. XXVII.

1re *Transformation.* Il fait

$$x = y \pm a;$$

et s'en sert pour faire disparaître le terme px dans

$$x^3 + q = px.$$

2e *Transformation.*

$$x = \frac{a}{y} \text{ réciproque.}$$

3e *Transformation.* Soit l'équation

$$x^3 = nx^2 + q = px;$$

si a et b sont deux racines, l'équation

$$x^3 + kx^2 - (p - a - b)(k - n)x + q + ab(k - n) = 0$$

aura aussi les deux racines a et b, k est arbitraire.

Racines irrationnelles.

Cardan cherche quelles peuvent être les formes des équations du troisième et du quatrième degré qui ont pour racines les irrationnelles d'Euclide.

Binôme de troisième et de sixième espèce $\sqrt{t} \pm \sqrt{n}$.

Théorème I. $(\sqrt{s} \pm \sqrt{u})^{2m+1}$, tous les termes renferment $\sqrt{t}$ ou $\sqrt{u}$; $(\sqrt{t} + \sqrt{u})^{2m}$, tous les termes renferment $\sqrt{+u}$ ou bien sont rationnels.

Théorème II. $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$ ne peut être racine de

$$x^2 + px = q,$$

ni d'aucune équation du troisième degré, ni de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 = r$$

ou

$$x^4 + px^2 + qx = r,$$

mais bien de l'équation

$$x^4 + px^2 = q$$

ou de l'équation complète

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx = s.$$

Il a d'autres théorèmes du même genre qui ne présentent plus aucun intérêt, et que Fibonacci avait déjà connus; mais il passe à des radicaux d'un degré beaucoup plus élevé. Il démontre que ni $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{u}$ ni $\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$ ne peuvent être racines de l'équation

$$x^3 = px + q.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des Déterminants et leurs principales applications; par le D[r] *F. Brioschi,* professeur de mathématiques appliquées à l'université royale de Pavie. Traduit de l'italien, par M. *Edouard Combescure,* professeur de mathématiques. Paris, 1856; in-8 de XII-216 pages.

La géométrie segmentaire dite supérieure (*), la géométrie infinitésimale, les *déterminants,* les formes homogènes, le calcul des fonctions, des symboles, des nombres complexes, changeront complétement, dans peu d'années, la face de la science, non-seulement dans les hauteurs, mais aussi dans la plaine. Les théories principales étant autrement exposées, les formules principales autrement écrites, les résultats autrement énoncés, nos traités élémentaires auront à subir une totale transformation. Ceux qui par inertie ne veulent pas ou par caducité ne peuvent plus suivre, seront tentés de décrier, d'arrêter ce mouvement. Cela ne s'applique heureusement pas à ceux qui entrent dans la carrière. Ils accueillent avec reconnaissance tout ce qui prépare la voie aux nouvelles méthodes. Tel est l'ouvrage du célèbre analyste qui manie avec tant d'habileté, avec de si beaux succès, la féconde théorie des déterminants.

On part des définitions les plus simples et l'on arrive

(*) Puisse le retour à la santé du célèbre auteur de la géométrie supérieure lui permettre de nous donner le second volume si ardemment désiré.

aux applications les plus générales. Le nom de *déterminant,* réservé longtemps aux seules fonctions cramériennes, aux dénominateurs des inconnues dans les équations du premier degré, désigne aujourd'hui bien d'autres fonctions : on a les déterminants fonctionnels de Jacobi, les déterminants de Gauss, autrement dit *discriminants,* les déterminants de Hesse ou invariants, etc.

Ces diverses fonctions jouissent de propriétés spéciales, ont des relations mutuelles qui ont des conséquences nombreuses pour la géométrie, l'analyse des équations et le calcul des intégrales définies. Une graduation intelligente permet au lecteur de suivre sans peine ces divers développements. Nous engageons à prendre toujours pour exemple un déterminant formé d'un petit nombre de termes, d'y appliquer le raisonnement de l'auteur, qu'on étendra ensuite avec facilité à un nombre quelconque de termes, moyen d'étude à conseiller dans les méthodes d'une vaste généralité.

Ce qui n'est pas moins précieux dans cette production, c'est l'uniformité des procédés, la symétrie extrême des résultats, l'élégance des dispositions typographiques; ce sont des qualités mnémoniques qui, lorsqu'elles manquent, rendent les formules disgracieuses, les font oublier et les frappent de stérilité.

L'auteur italien a eu le rare bonheur de rencontrer un traducteur qui connaît, qui domine le sujet; pour s'en convaincre, il suffit de lire les deux Notes terminales qui font regretter qu'il n'en ait pas mis un plus grand nombre.

La France possède donc enfin un ouvrage, et il est le seul, où l'on peut apprendre la théorie la plus importante de toute l'analyse; c'est une lacune comblée, un service rendu. Un jour, j'énumérais devant un géomètre éminent de notre Académie des Sciences les endroits des ma-

thématiques où l'on rencontre des déterminants depuis les équations du premier degré jusqu'aux équations des perturbations planétaires ; il m'interrompit en me disant que j'aurais plus tôt fait en désignant les endroits où l'on ne rencontre pas de déterminants.

Papiers de Descartes ; par M. *Prouhet*.

(Extrait d'une Lettre à M. Terquem.)

Dans l'édition de M. Cousin, on donne au tome X un fac-simile de l'écriture du grand philosophe en disant que c'est la seule trace qui en reste. Que sont donc devenus ses manuscrits ? D'après Baillet, les minutes de ses lettres avaient été apportées en France par M. Chanut et avaient servi, quoique bien altérées par un séjour au fond de l'eau (*), à faire l'édition de Clerselier. Quant aux originaux des lettres au P. Mersenne, d'abord tombés aux mains de Roberval qui n'avait voulu les communiquer à personne, ils étaient échus à Lahire qui en avait fait cadeau à l'Académie des Sciences. Ces Lettres paraissent avoir été remises à Baillet pour composer la vie de Descartes, et ensuite à un nommé J.-B. Legrand qui préparait une édition complète des œuvres du philosophe (Baillet, *Vie de Descartes*, préface, p. XXII). C'est probablement ce Legrand qui est l'auteur des notes marginales inscrites sur l'exemplaire de l'Institut, dont M. Cousin s'est servi. A partir de là, je perds la trace des manuscrits de Descartes. Quel est ce Legrand ? Pourquoi n'a-t-il pas donné l'édition qu'il projetait ? On trouverait peut-être quelques renseignements à ce sujet dans les anciens registres de l'Académie.

(*) Le bateau qui les apportait avait fait naufrage au port de l'École, et on n'avait pu les retirer que trois jours après.

Note du Rédacteur. Je répète qu'il serait fort utile de publier une Table des matières de l'édition Cousin. Celle qu'on y trouve est d'une maigreur inouïe, surtout pour la partie scientifique. Exemple : Vous y chercherez vainement les *ovales* de Descartes ; la Table des noms, qui facilite tant les recherches historiques, manque complétement. Que sont devenus les éditeurs tels que Baillet? Des œuvres volumineuses sans tables n'existent pas, non plus qu'une bibliothèque sans catalogue.

ARAIGNÉE PERTURBATRICE ;

D'APRÈS M. HANSTEEN,

Directeur de l'observatoire de Christiania.

(*Astr. Nach.*, 1856, n° 1020, p. 191.)

Le Bureau des Longitudes avait fait établir à l'Observatoire de Paris une boussole consacrée exclusivement aux variations diurnes de la déclinaison. Dans le courant de 1819, le barreau d'acier qui était suspendu à plat, éprouva, *sans aucune cause apparente*, un changement subit de direction ; les variations diurnes se trouvèrent en même temps réduites presque au dixième de leur valeur primitive, tandis que l'intensité magnétique s'était considérablement accrue.

Le même fait, savoir une diminution subite dans la direction, les variations diurnes et dans le temps d'une oscillation, s'est aussi présenté une fois à Gauss dans l'observatoire magnétique de Gottingue et deux fois à M. Hansteen, à Christiania. Mais Gauss devina bientôt la cause. Une araignée s'était glissée dans la boîte *unifilaire*, et, par un fil très-fin presque invisible, avait lié l'extrémité de l'aiguille à la paroi de la boîte, ce qui changea subite-

ment la position moyenne de l'aiguille, de même que les mouvements diurnes et le temps d'une oscillation. Au lieu d'en déduire qu'un changement subit s'était produit dans le magnétisme terrestre et de là une augmentation dans le moment magnétique de l'aiguille, il se contenta d'ôter le couvercle, et faisant glisser un crayon le long des parois de la boîte, l'aiguille reprit aussitôt sa position ordinaire, et les variations et la durée d'oscillation revinrent à leurs grandeurs précédentes.

M. Hansteen découvrit de même le fil d'araignée qui avait produit les deux perturbations dans son observatoire. Le fil ôté, tout fut rétabli, et le célèbre directeur crut qu'il est plus vraisemblable qu'une même cause ait produit le même effet dans la boussole d'Arago.

SUR LE CIRQUE NUMÉRIQUE DES PYTHAGORICIENS.

On sait que le carré d'un nombre entier est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs. Le pythagoricien Jamblique énonce ainsi ce théorème (p. 107) dans l'ouvrage cité (*Bulletin*, t. I, p. 186).

« L'unité est l'élément fondamental dans la génération
» des carrés.... Pour engendrer un carré, on part origi-
» nairement de l'unité comme de la *barrière* (ὕσπληγξ),
» en quelque sorte jusqu'à la *borne* (καμπτήρ) (*), côté
» du carré à engendrer, et puis on retourne de nouveau
» vers elle (l'unité) comme vers un but (νύσσα), en tou-
» chant tous les nombres et l'unité elle-même deux fois,
» excepté la borne, côté du carré à engendrer. »

(*) Le verbe grec καμπτω, je courbe, est l'origine de ces mots francais: *camus, camard, cambrure, chambre, chambranle, concamération, camérier, chambellan, camarade*.

La figure suivante éclaircit cette course numérique.

Barrière. 1...2...3...4...5..
: 6. *Borne*.
But..... 1...2...3...4...5..

La somme de tous ces nombres est 36 carré de la borne.

Il représente ainsi sous forme de *cirque* le nombre 100 carré de 10, puis aussi 1000, en prenant 10 pour barrière et pour *but*; les nombres étant 10, 20, 30, etc., et la borne est 100, etc.

Le véritable *cirque arithmétique* qui est le fondement de toute continuité numérique est celui-ci :

Imaginons une circonférence de rayon infini. Inscrivons le chiffre zéro sur un point de cette circonférence; par ce point et le centre menons une droite et inscrivons l'infini (∞) sur l'autre extrémité de ce diamètre. Concevons que sur la demi-circonférence à droite de ce diamètre on ait rangé toutes les quantités numériques possibles croissant par gradation de 0 à ∞, et de même sur la demi-circonférence à gauche; distinguons les quantités à droite par un signe quelconque, soit $+$, et les quantités à gauche par un autre signe, soit $-$; un point partant de zéro et se dirigeant vers $+\infty$ sera obligé de parcourir la demi-circonférence de $-$ pour revenir à zéro, et l'on voit que $+\infty$ et $-\infty$ désignent le *même point*; de même que $+0$ et -0: là est le principe de la continuité, et l'hyperbole en fournit un exemple élémentaire. Soient A et A′ les deux sommets, A le sommet à droite et A′ le sommet à gauche; désignons par AB, A′C respectivement les demi-branches au-dessus de l'axe focal, et A*b*, A′*c* les demi-branches au-dessous; un point A partant de A et se dirigeant vers B décrira cette demi-branche, et arrivé à l'extrémité de cette longueur infinie, il sera aussi sur l'extrémité de la branche A*c*′, et continuant son mou-

vement, il vient vers A′ et de là vers l'extrémité de A′C; il sera alors aussi à l'extrémité de Ab, et, continuant, il revient en A. L'équation polaire de la courbe, le centre pris pour pôle, fait parfaitement ressortir ce mouvement continu.

Il y a donc toujours deux chemins pour passer d'un nombre à un autre; par exemple, pour passer de $+2$ à $+1$, on peut se diriger vers zéro, on peut aussi se diriger vers ∞ et passer par cet infini et zéro pour arriver à 1: Jacobi fait souvent usage de ce dernier chemin pour conserver l'uniformité de direction. Soient, par exemple, les quatre nombres α, β, γ, δ rangés selon l'ordre ascendant; on va de α vers β, de β vers γ, de γ vers δ dans la même direction, et on conserve la même direction en allant de δ à α en passant par l'infini (*Fundamenta*, page 11). Ceci explique aussi le mouvement du point d'application de la résultante de deux forces parallèles $+P$, $-Q$, où P, d'abord plus grand que Q, décroît sans cesse, passe par zéro et devient négatif, et beaucoup d'autres mouvements de va-et-vient du même genre.

BIBLIOGRAPHIE.

Mélanges de Géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre, etc., et la traduction du *Traité* de Maclaurin *sur les courbes du troisième ordre*; par M. *E. de Jonquières,* lieutenant de vaisseau. Paris, 1856; chez Mallet-Bachelier; in-8 de VIII-261 pages, avec planches. Prix : 5 francs.

M. de Jonquières est bien connu de nos lecteurs par

les excellents articles dont il a enrichi les *Nouvelles Annales*. L'ouvrage dont nous allons rendre compte ne peut qu'ajouter à la réputation de l'auteur et contribuera, nous l'espérons, à répandre le goût de la géométrie moderne.

L'auteur débute par une préface modeste, trop modeste peut-être si l'exemple pouvait être contagieux. Nous ferons remarquer à M. de Jonquières que la science, et l'on doit s'en féliciter, n'est pas la propriété d'une corporation : elle n'est pas indispensablement attachée à un diplôme ou à une position officielle : *Spiritus ubi vult spirat.* D'ailleurs M. de Jonquières se charge de nous prouver qu'on peut être excellent marin et bon géomètre.

Comme l'indique son titre, l'ouvrage est une collection d'études sur différents sujets. Chaque chapitre forme comme un traité à part.

Le *Chapitre Ier* (1-54) est consacré aux *propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps*. C'est le développement d'une théorie dont le programme seul a été donné par M. Chasles dans les *Comptes rendus* (26 juin 1843).

Le mouvement infiniment petit d'une figure plane se réduit à une rotation du plan de la figure autour d'une droite de ce plan, pendant que cette droite tourne elle-même autour d'un point fixe sans sortir de la position primitive du plan. La droite se nomme *caractéristique* et le point fixe *foyer*. La trajectoire du foyer est perpendiculaire au plan primitif qui contient les trajectoires des différents points de la caractéristique. Une droite D étant considérée comme faisant partie d'un corps, il existe une seconde droite Δ sur laquelle se trouvent les foyers de tous les plans menés par la première, et réciproquement. Un cas intéressant est celui où l'une des deux droites *conjuguées* est à l'infini.

A l'aide de ces considérations et par les démonstrations

les plus simples, l'auteur parvient à ce théorème que *le mouvement infiniment petit d'un corps se réduit à un mouvement de rotation autour d'un axe, qui pendant cette rotation glisse sur lui-même;* ou, en d'autres termes, *au mouvement d'une vis dans son écrou.* Le géomètre qui le premier a tracé cette belle image du mouvement, a pu dire avec un légitime orgueil : *Anch'io sono pittore.*

De ces principes fondamentaux, l'auteur déduit toutes les propriétés, soit descriptives, soit métriques, relatives aux trajectoires des points d'un corps en mouvement. Il rattache la théorie des figures en mouvement à celle des figures corrélatives, et montre ensuite les analogies qui existent entre les rotations d'un corps autour de divers axes et les systèmes de forces. C'est le propre des bonnes théories de n'être point isolées dans leur objet et d'ouvrir à l'esprit des horizons nouveaux. Ajoutons que c'est la plus grande jouissance que procure leur étude.

Le *Chapitre II* (55-112) est relatif *aux arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable et aux propriétés des arcs égaux de la lemniscate.* Les théorèmes qu'on y rencontre ont été énoncés sans démonstration par M. Chasles.

L'auteur nomme associés les arcs dont la différence est rectifiable, dénomination que l'on doit préférer à celle d'arcs semblables. Il commence par démontrer ce théorème :

1°. *Quand deux arcs d'une section conique sont associés, les sommets de leurs angles circonscrits sont situés sur une seconde conique décrite des mêmes foyers que la première;* 2° *et la différence des deux arcs est égale à la somme des côtés de l'angle circonscrit au premier, moins la somme des côtés de l'angle circonscrit au second.*

Le raisonnement de M. de Jonquières, en ce qui concerne la première partie de cet énoncé, ne nous a pas paru à l'abri de toute objection. L'auteur montre que si le théorème n'avait pas lieu, on pourrait rectifier un arc elliptique, *ce que l'on sait être impossible*. Nous ferons remarquer que si la rectification *indéfinie* de l'ellipse est impossible, c'est-à-dire si l'on ne peut exprimer une intégrale elliptique de deuxième espèce en fonction explicite de l'amplitude ou du module, à l'aide des seuls signes algébriques, exponentiels et logarithmiques (*), il n'en est pas de même de la rectification d'un arc déterminé; car l'impossibilité d'intégrer en général une fonction n'empêche pas qu'on puisse l'intégrer entre certaines limites particulières.

Quoi qu'il en soit, si l'on se contente de dire que les arcs assujettis aux conditions indiquées plus haut ont leur différence rectifiable, il reste encore un fort beau théorème que l'analyse transcendante avait seule abordé, mais en le présentant sous une forme moins simple et moins élégante. La méthode purement géométrique, appliquée à cet ordre de questions, présente des avantages incontestables. « Elle est la même pour les trois courbes qui exigent, en analyse, des formules et des calculs différents; elle fait connaître des relations immédiates et fort simples entre les arcs comparés, relations restées inaperçues jusqu'ici : elle conduit à diverses propriétés de ces arcs, d'autant plus curieuses, qu'il y entre des relations de périmètres et des conditions de maximum et de minimum, qu'on sait être presque toujours difficiles à traiter, même par l'analyse; enfin cette marche synthé-

(*) Voir *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, p. 441. M. Liouville est, je crois, le premier et le seul qui ait démontré ce théorème.

tique a encore ici un avantage particulier, c'est qu'elle s'applique aux coniques sphériques, sujet d'un ordre plus relevé sous le point de vue analytique » (*).

On peut donc considérer la théorie actuelle comme une conquête de la géométrie sur l'analyse, heureuse conquête qui n'appauvrit pas l'analyse et qui enrichit la science.

Le *Chapitre III* (113-152) a pour objet la généralisation des propriétés des foyers et des diamètres conjugués des sections coniques.

La première généralisation a pour principe le théorème suivant :

Etant donnée une conique A et étant pris un point fixe S dans son plan, on peut mener par ce point, d'une infinité de manières, deux droites telles, que le pôle de l'une soit sur l'autre. Ces deux droites sont toujours en direction deux diamètres conjugués d'une certaine conique Σ qui est relative au point S, qui change de forme quand on passe à un autre point et qui devient un cercle quand le point S est un des foyers. Au point S correspond un second point S' situé sur le même diamètre de la courbe A, mais de l'autre côté et à égale distance du centre, et la conique Σ est aussi relative à ce point.

Les points S et S' sont désignés sous le nom de foyers de la conique A relatifs à la conique Σ.

De là résulte une théorie générale dont celle des foyers proprement dits n'est plus qu'un cas particulier, et par théorie il faut entendre non-seulement l'ensemble des théorèmes relatifs aux foyers proprement dits, mais encore les propositions non moins nombreuses qui se rapportent aux coniques homofocales.

Le défaut d'espace nous oblige à indiquer seulement l'objet des autres chapitres.

(*) *Comptes rendus*, t. XVII, p. 839.

Le *Chapitre IV* (152-196) traite du principe de correspondance anharmonique et de ses applications aux courbes du deuxième, troisième et quatrième ordre.

Le *Chapitre V* (197-261) est consacré tout entier à la traduction du *Traité* de Maclaurin *sur les courbes du troisième ordre*. Cette traduction fidèle et élégante est accompagnée de notes qui ne laissent rien à désirer pour l'intelligence du texte.

En résumé, M. de Jonquières a fait un livre excellent. Nous le recommandons vivement à nos collègues et aux élèves intelligents qui, par une curiosité bien naturelle à leur âge, veulent savoir s'il y a quelque chose au delà des *Programmes*. Au delà, en effet, il y a tout un monde, et ce que nous avons de mieux à faire, ne pouvant les y conduire, c'est de leur indiquer un bon guide.

E. Prouhet.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉ POUR 1858.

(Académie des Sciences de Paris.)

Soit la suite naturelle des nombres premiers impairs

$$1.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31, \ldots ;$$

désignons le $n^{ième}$ terme de cette suite par $P_{(n)}$; prenons dans cette suite $n - 1$ termes dans un ordre quelconque. Pour fixer les idées, soit

$$n = 7,$$

ainsi

$$P_7 = 17.$$

Prenons donc dans cette suite $(n - 1)$ ou six termes quel-

conques, par exemple

$$3.13.19.31.59.101,$$

et $P_{(6)} = 13$.

Si dans la progression arithmétique quelconque

$$A - C, \quad 2A - C, \quad 3A - C, \quad 4A - C, \ldots,$$

A et C étant premiers entre eux, on prend $P_{(n-1)}$ termes consécutifs, et dans l'exemple treize termes consécutifs, il faut démontrer qu'*au moins* un de ces termes ne sera divisible par aucun des six nombres premiers ci-dessus.

Soient

$$A = 5, \quad C = 3;$$

la progression est

$$2.7.12.17.22.27\ldots.$$

Prenons treize termes consécutifs

$$12.17.22.27.32.37\ldots\ 62.$$

17, nombre premier, n'est divisible par aucun des six nombres premiers. Il y a donc un terme non divisible par 1, 3, 5, 7, 11, 13, les six premiers nombres de la suite des nombres premiers. (Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 76, édit. 1830.)

NUMÉRATION DES GRECS.

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Les mêmes lettres avec le iôta souscrit prennent une va-

leur mille fois plus grande. Ainsi $\overset{,}{\alpha}$, $\overset{,}{\beta}$, $\overset{,}{\gamma}$, etc., désignent 1000, 2000, 3000, etc.; ce sont les χιλιοὶ; $\overset{,}{\iota}$, $\overset{,}{\kappa}$, $\overset{,}{\lambda}$, etc., désignent 10000, 20000, 30000, etc., ou les χιλιαδικαὶ; et $\overset{,}{\rho}$, $\overset{,}{\sigma}$, $\overset{,}{\tau}$, etc., représentent 100 000, 200 000, 300 000, etc. La valeur de chaque caractère peut être augmentée dix mille fois en plaçant au-dessous la lettre M, initiale du mot Μυρία. Ainsi $\underset{M}{\rho}$ désigne un million.

Une autre manière de présenter les grands nombres est de placer des *points* sur la lettre. Ainsi $\ddot{\alpha}$ exprime 10 000; c'est le commencement de la série des myriades : μυριονταδικαὶ απλαὶ; et $\overset{::}{\alpha}$ dénote 100 millions et commence la série des μυριονταδικαὶ διπλαὶ ou les carrés des termes de la première série. Ainsi les Grecs auraient écrit 3 280 196 529

$$\overset{::}{\lambda}.\overset{::}{\beta}\ \ddot{\eta}.\ddot{\iota}.\ddot{\theta}.\varsigma.\varphi.\kappa.\theta.$$

Μυριαδικων διπλων λβ; μυριαδικων απλων ηιθ; καὶ εξακισ χιλιαὶ πεντακοσια εικοσιν εννεα. (Leslie, *Philosophy of Arithmetic*, p. 219.)

Le signe ϛ se nomme *vau* ou επισημον.

Le signe ϟ se nomme *kopha* (κοφη); il ne faut pas le confondre avec le sigma final, ni avec la double lettre *sti*, ς.

Le signe ϡ se nomme *sampi*.

Ces trois noms sont empruntés à l'alphabet hébreu ainsi que tous les noms de l'alphabet grec.

Les fractions ayant pour numérateur l'unité étaient désignées par le dénominateur avec un accent à droite; ainsi δ′ est $\frac{1}{4}$, γ′ $\frac{1}{3}$, etc.; mais la fraction $\frac{1}{2}$ avait quatre signes spéciaux C, <, C′, K.

Dans les autres cas, on écrivait le dénominateur comme nous faisons pour les exposants. Ainsi $\beta^{\iota\alpha}$ désigne $\frac{2}{11}$, $\pi\alpha^{\rho\kappa\alpha}$ est $\frac{81}{121}$.

Louis-Augustin CAUCHY.

Né à Paris le 21 Août 1789; mort et enterré à Sceaux le 23 Mai 1857.

L'Académie a perdu une de ses plus brillantes couronnes, la France une de ses plus pures gloires, le monde le plus grand mathématicien du moment actuel. Mathématicien dans le sens le plus large, l'esprit de Cauchy n'était pas cantonné dans un coin de la science. Partout il fondait, partout il créait, partout il était au premier rang. A l'instar des éminents génies en toute carrière, les chefs-d'œuvre de Cauchy, ses plus belles découvertes datent de sa jeunesse. Son théorème sur les polyèdres, que tant de siècles ont laissé sans démonstration, complète la géométrie d'Euclide. Il établit la vérité d'un théorème de Fermat, qui a rebuté un Descartes, résisté aux efforts d'un Euler, d'un Gauss. Avant Sturm, il indique un moyen, compliqué il est vrai, mais certain, de trouver le nombre des racines comprises entre deux limites désignées. Il remanie, enrichit considérablement la théorie des déterminants, des fonctions alternées : théorie entamée par Vandermonde et Laplace. Ses considérations morphologiques sont un point de départ pour les travaux d'Abel sur les formes, permettent à l'illustre Norwégien d'établir l'impossibilité de la résolution générale des équations. Euler, Laplace, Lagrange faisaient quelquefois des séries un emploi d'une légitimité douteuse. Cauchy donne aux séries, lors même qu'elles sont impliquées d'imaginaires, des bases certaines. Sa théorie des modules jette une vive lumière sur le champ, d'une si luxuriante fécondité, des expressions imaginaires.

Ses instruments les plus habituels, qu'il manie avec une dextérité sans égale, sont le symbole imaginaire et l'infini, effroi des géomètres vulgaires. Suivez tel sentier que vous voudrez dans la région infinitésimale, vous êtes sûr de rencontrer les empreintes profondes des pas de Cauchy. Le calcul des résidus procure souvent de prime abord des résultats qu'on obtiendrait péniblement par d'autres procédés. L'indépendance des intégrations successives dans les intégrales multiples est désormais soumise à d'importantes restrictions; le principe de la continuité, *rigoureusement défini,* introduit dans les opérations une précision inaccoutumée.

Venons à la science du mouvement. Que de nouvelles propriétés, combien de nouvelles méthodes de calcul pour la dynamique des solides terrestres et célestes!

La théorie des forces moléculaires, déposée en germe dans les *Principia,* explicitement appliquée par Clairaut, n'est réellement fondée que depuis les célèbres équations de Navier. Or ces équations réclamaient des développements et même certaines corrections, pour expliquer mathématiquement les découvertes de Newton, Huyghens, Malus, Young, Fresnel, Frauenhoffer, sur le mystérieux agent de la lumière. C'est ce qu'entreprit et exécuta avec plein succès l'immortel académicien. Il a même promis, à diverses fois, un traité *ex professo* de mécanique moléculaire. Hélas! il n'a jamais accompli cette promesse. Dans ses dernières années, il disséminait ses instants sur une foule de matières disparates. De là une exubérance de symboles et de néologismes, une pénurie de clarté et de raisonnements : des oasis qu'il faut chercher dans des Saharas.

Les rivières les plus profondes, lorsqu'elles se répandent

sur un sol spacieux, finissent par s'amincir. Il avait tant médité, sur tant d'objets, que chaque nouveauté lui apparaissait comme un simple corollaire de ses propres inventions. Il faut bien que chacun paye le tribut à l'humaine nature. C'était pourtant une précieuse nature, celle qui sacrifiait des intérêts matériels à des convictions. Cauchy a toujours persisté dans les mêmes opinions politiques et religieuses. Luttant déjà avec les affres de la mort, comme il voulait entretenir le curé de Sceaux d'une nouvelle œuvre de charité, le vénérable ecclésiastique l'engageait à prendre du repos; à quoi le moribond répondit : *Les hommes passent, les œuvres restent.* Telles furent ses dernières paroles. Lorsque la vie est remplie d'œuvres vertueuses, d'œuvres glorieuses, les hommes ne passent pas entièrement. Cauchy est un élu qui pouvait dire en tout sens : *Non omnis moriar.*

Abel nous apprend qu'il a puisé toutes ses connaissances mathématiques dans les écrits de Cauchy : un tel aveu est le meilleur des panégyriques.

Puisse-t-on nous donner par ordre de matières la liste complète des OEuvres et Mémoires du Gauss français, et, en substance, les principaux résultats, les formules fondamentales, le tout accompagné d'un indispensable vocabulaire. Nous aurions ainsi l'inventaire des plus précieuses richesses mathématiques du sol français.

On dit que la famille a confié les papiers de l'illustre défunt à M. l'abbé Jullien, si digne d'une aussi noble mission, qui sera accomplie avec conscience et intelligence.

BIBLIOGRAPHIE.

Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales par un procédé nouveau, et nouvelles propriétes des périodes; par M. *Auguste Bouché,* professeur à Angers.

Cette intéressante brochure montre que les sujets en apparence les plus épuisés présentent souvent quelque chose de nouveau à celui qui les étudie à fond.

Dans la première partie, l'auteur fait voir comment on peut calculer les chiffres de la période par un procédé plus facile que celui de la division ordinaire; voici le principe dont il fait usage :

Soit une fraction ordinaire de la forme $\frac{1}{N}$, où l'on a calculé k chiffres décimaux par le procédé connu; le quotient et le reste seront $\frac{x}{10^k}$ et $\frac{y}{10^k}$, ce qui donne

$$1 = N \cdot \frac{x}{10^k} + \frac{y}{10^k},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x}{10^k}}{1 - \frac{y}{10^k}},$$

c'est-à-dire que la fraction $\frac{1}{N}$ est équivalente à la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{x}{10^k}$, et la raison $\frac{y}{10^k}$.

L'auteur emploie cette propriété pour calculer autant de chiffres qu'on veut de la fraction périodique.

Dans la seconde partie, l'auteur établit sur l'ordre que suivent les chiffres des périodes simples et mixtes, plusieurs théorèmes ingénieux dont il faut voir le développement dans sa brochure même. Il est guidé au milieu de ses calculs par le procédé qu'il a déjà fait connaître dans une autre brochure intitulée *Nouvelle preuve des opérations de l'Arithmétique* (*voir* t. II, p. 140), et il insiste de nouveau sur la nécessité de vérifier les calculs en même temps qu'on les effectue. HOUSEL.

ODE

A MONSIEUR LE GENDRE,

Étudiant en mathématiques au collége Mazarin,

A l'occasion de sa thèse, soutenue en présence de l'Académie royale des Sciences, qui en avait accepté la dédicace.

.. Sunt hic etiam sua præmia laudi.
(VIRGILE.)

Nous croyons faire plaisir en réimprimant cette pièce très-rare. En 1770, l'Académie a honoré un intelligent écolier, pourquoi en 1857 retient-elle l'éloge dû à l'illustre géomètre?

Qu'aux pieds de la grandeur une Muse vénale
Dépose son hommage et brûle son encens :
Je brave dans ses dons la fortune inégale,
Je chante les talents.

J'applaudis ton élève, ô sublime Uranie;
Viens placer sur son front la couronne des arts :
Sans titres fastueux, il ne doit qu'au génie
L'honneur de tes regards.

Si ta Cour en ces lieux avec toi le contemple,
Ce n'est pas pour sourire à l'orgueil d'un Crésus;
Tes Ministres sacrés ne quittent point ton Temple
Pour l'Autel de Plutus.

Ces hommes courageux, nés pour régir le monde,
Voudroient perpétuer l'amour de leurs travaux;
Enfanter tout à coup une race féconde
De successeurs nouveaux.

Toi, leur fils adoptif, que ce projet enflamme,
Renonce pour jamais à la frivolité :
La retraite et l'étude élèveront ton âme
Jusqu'à la vérité.

Pour soutenir tes pas dans un sentier pénible,
De tes guides hardis observe les efforts;
De l'émulation vois l'ardeur invincible
Déployer ses ressorts.

Loin des cris insultants de l'altière ignorance,
Ces Sages réunis au Palais de nos Rois,
Méditent à l'envi, dans la paix du silence,
La Nature et ses lois.

L'un, armé du compas, de l'art profond d'Euclide
Veut étendre l'empire et reculer les bords :
D'une courbe nouvelle à son calcul rapide
Il soumet les rapports.

L'autre, à l'aide du prisme, éclairant l'analyse,
De son œil étonné corrige les erreurs :
De l'écharpe d'Iris, il assemble ou divise
Les riantes couleurs.

Celui-ci s'élançant vers la céleste voûte
Mesure ce foyer qui nous verse le jour;
Ou d'un astre effrayant fait découvrir la route
Et fixer le retour.

Plus humble dans son vol, sans être moins utile,
Celui-là de la terre ouvre les fondements ;
Et sa main tour à tour de l'or et de l'argile
Pèse les éléments.

Chacun sur les objets dont le charme l'entraîne,
Ne cesse d'appliquer ses avides esprits :
D'un procédé savant on retrouve la chaîne
Dans de mâles écrits.

A l'aspect de ce corps dont la France s'honore,
Je vois fuir à grands pas les préjugés nombreux ;
Et la raison plus libre a préparé l'aurore
D'un changement heureux.

A mes yeux se présente une liste immortelle.
Quels noms fameux j'ai lus ! d'Alembert et Buffon!....
Et vous, que ce Portique aujourd'hui nous rappelle,
La Caille et Varignon!

Du fond de leur tombeau, j'entends une voix sombre,
Qui crie à leur disciple : « Ose nous imiter :
» Comme nous, loin du monde, enseveli dans l'ombre,
» Apprends à méditer.

» Sans crainte et sans espoir, pour servir tes semblables,
» Marche dans le chemin que nous t'avons frayé ;
» Si tu peux t'assurer des amis véritables,
» Tu seras trop payé. »

PAR M. COSSON,
Professeur au collége Mazarin.

Permis d'imprimer, ce 23 juillet 1770,

DE SARTINE.

De l'imprimerie de L.-F. Delatour.

Je dois à l'intérêt que le célèbre académicien M. Bienaymé porte aux sciences les renseignements suivants puisés aux archives de l'Académie.

La thèse de Le Gendre, ou plutôt les thèses, forment un petit in-4 de 32 pages dont trente cotées et deux de titre ou de dédicace, car il n'existe pas de titre proprement dit.

Il n'y a sur le premier recto que ces mots :

Regiæ scientiarum academiæ.

Sur le verso : *Has Theses, Deo dante, propugnabit Adrianus M. Le Gendre, Parisinus, Auditor Josephi F.-M. Marie, Lic. Theol. Soc. Sorb. Cens. Reg. et Matheseon professoris.*

Die vigesima-quintâ Julii, ab hora post meridiem tertiâ ad vesperam.

Præsentibus, Faventibus, Auspicibus, *illustrissimis Regiæ scientiarum Academiæ Viris.*

En bas, en gros caractères : *In Mazarinæo, anno* M.DCC.LXX.

Sur la première page cotée 1 se trouve l'inscription suivante, en haut du texte qui commence sur cette même page :

Theses mathematicæ ex Analysi, Geometria et Mecanica excerpta.

Au bas de la dernière page, cotée 30 : *Typis L.-F. Delatour.*

Voilà pour l'extérieur des thèses. Quant à l'intérieur, ce sont bien des *excerpta.* Il n'y a que les énoncés de ce que le candidat démontrera, prouvera, etc. Les lignes sont fort serrées et la matière est abondante : mais c'est seulement matière d'examen. Il ne semble pas qu'il y ait un mot de neuf. C'est sans doute le programme de ce qui a dû être enseigné par un professeur habile à un élève in-

telligent. Il est possible qu'en 1770 un élève ne trouvât pas tous ces matériaux réunis et qu'il lui fallût les chercher dans les volumes où ils étaient dispersés. Mais précisément c'était l'usage du professeur de mathématiques transcendantes d'indiquer tous les Mémoires à consulter, et cela se continua au moins jusque vers 1815, même après les ouvrages de Lacroix.

J'ai parcouru les thèses, et cette lecture m'a si peu intéressé, que je suppose qu'elle n'intéressera guère plus vos lecteurs, à moins toutefois que l'on n'ait un point de comparaison, par exemple le plan des études de ce temps-là, ou bien les ouvrages de l'abbé Marie que je n'ai pas sous la main. Ces thèses n'offrent aucune découverte : l'élève répondra sur les parties des mathématiques pures et de la mécanique, au delà des éléments, puisqu'il commence par les équations du troisième et du quatrième degré et les racines égales, et qu'il présente même du calcul intégral : mais il ne monte pas très-haut. C'était peut-être beaucoup pour le temps. L'élève paraît au fait de toutes les bonnes méthodes de MM. Euler, Lagrange, etc., bien qu'il ne les nomme pas. Cela doit prouver pour le professeur. Il fallait que ce professeur fût tout à fait tourné à l'analyse moderne.

Quant à la présence de l'Académie à ces thèses, rien n'indique que ce fût autre chose qu'une faveur adressée au professeur et nullement à l'élève. Voici ce que j'ai découvert dans les registres de l'Académie.

Du 23 *mai* 1770. — Rapport de MM. de Lalande et Bailly sur les *Leçons de Mathématiques* de M. l'abbé de La Caille, avec des *Additions* de M. l'abbé Marie, professeur au collége Mazarin. — On le loue de n'avoir pas confondu ses additions dans le texte. On dit que l'Académie connaît ces excellents *Éléments*, et le Rapport finit ainsi : « Nous » croyons que cette nouvelle édition est très-digne d'être

» imprimée comme les précédentes sous le privilége de
» l'Académie. »

Du 13 *juin*.— « M. l'abbé Marie, successeur de M. l'abbé
» La Caille au collége Mazarin, est entré. Il a présenté un
» exemplaire de sa nouvelle édition des *Leçons de Ma-*
» *thématiques* de M. l'abbé de La Caille. Il a proposé de
» dédier à l'Académie une thèse de mathématiques qu'il
» veut faire soutenir et dont il a lu le projet. Ce qui lui
» a été accordé. »

Du samedi 21 *juillet*.— « M. l'abbé Marie, professeur
» de mathématiques au collége Mazarin, est entré avec
» M. Le Gendre, son écolier, et ils ont présenté une thèse
» dédiée à l'Académie que ce dernier soutient mercredi.
» L'Académie y assistera et s'assemblera chez M. le
» grand maître à trois heures et demie.

Du 1er *août*. — « MM. l'abbé Marie et Le Gendre
» sont entrés et ont remercié l'Académie de ce qu'elle
» a bien voulu assister à la thèse soutenue par ce der-
» nier. »

Pas un mot d'approbation pour l'*écolier*. Cependant on doit conclure qu'il avait bien défendu sa thèse, ou plutôt son exercice du mercredi soir 25 juillet, puisqu'il venait remercier le mercredi 1er août.

Je conjecture que tout l'intéret de la chose venait de la grande jeunesse de l'auteur; car Le Gendre, né en 1752, n'avait alors que dix-huit ans.

Note du Rédacteur. Le mot *Parisinus* indique que Le Gendre était Parisien. Lors de son élection à l'Académie en 1783, les registres portent qu'il est né à Paris, indication qui sans doute était dictée par lui-même. Il est né le 18 septembre 1752 et mort à Auteuil, où il est enterré, le 9 janvier 1833. On ignore d'après quels renseignements la *Biographie universelle Michaud* assigne Toulouse pour lieu de naissance.

Depuis 1792, pour faire disparaître une apparence *féodale*, on a écrit *Legendre*. Aujourd'hui la direction est inverse : *Tempora mutantur et nomina in illis*.

BIBLIOGRAPHIE.

COURS D'ANALYSE DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, par M. *Sturm*, membre de l'Institut ; publié d'après le vœu de l'auteur par M. *E. Prouhet*, professeur de Mathématiques. Tome Ier. Paris, 1857 ; in-8 de XVI-409 pages. Prix des 2 volumes : 12 francs. (Chez Mallet-Bachelier, libraire.)

Il n'y a guère plus d'un an que Sturm a été enlevé aux sciences dans la maturité de l'âge et dans la force de son génie. Aux regrets universels que cette perte si grande et si inattendue a excités, se joignait la crainte que des Mémoires manuscrits, des recherches ébauchées, fussent égarés ou oubliés. Heureusement une sœur dévouée a conservé avec soin des fragments précieux, et un éminent géomètre, M. Liouville, a promis de les faire connaître aux savants. Sturm s'occupait à la fin de sa vie de mettre une dernière main aux feuilles de ses cours de l'Ecole Polytechnique qu'il se proposait de publier ; ces feuilles, rédigées par les élèves les plus distingués, reproduisent fidèlement la méthode et les démonstrations du maître, mais elles laissent subsister des répétitions inévitables dans l'enseignement oral, des négligences de rédaction, des inexactitudes de calcul, etc. ; l'impression n'en était possible qu'après une révision sévère, des corrections nombreuses, des vérifications de formules, des additions pour suppléer aux lacunes. M. Prouhet, dont les travaux

comme géomètre sont bien connus, n'a pas hésité à accepter la tâche pénible d'une publication qui exigeait autant de patience que de sagacité : le premier volume, que nous avons sous les yeux et qui renferme le calcul différentiel et une partie du calcul intégral, nous prouve qu'il l'a remplie avec un plein succès.

Le programme de l'enseignement du calcul infinitésimal est resté à peu près invariable à l'Ecole Polytechnique depuis un demi-siècle. Les questions qu'il renferme constituent un cours élémentaire distribué dans un ordre logique; les géomètres d'un mérite supérieur qui l'ont successivement professé, ont contribué d'une manière sensible au perfectionnement des méthodes d'exposition de cette branche de l'analyse. Sturm, qui a enrichi la science de découvertes immortelles, a voulu aussi la servir en léguant à ceux qui cultivent les mathématiques le fruit de son expérience, acquise pendant un professorat de plus de vingt années. Ajoutons qu'il avait, par une rare exception, toutes les qualités nécessaires pour écrire avec perfection un ouvrage didactique, qualités que ne possèdent pas toujours les esprits originaux et inventifs. Il apportait à ses leçons le zèle le plus consciencieux, préparant avec soin ses démonstrations, l'ordre de ses calculs et s'efforçant à rendre lumineux les points difficiles. Penseur profond, il avait au plus haut degré la faculté de creuser un sujet et de l'envisager sous toutes ses faces; aussi arrivait-il presque toujours à des démonstrations brèves, élégantes, non surchargées de calculs, frappantes d'évidence.

S'il est vrai, comme le rappelle M. Prouhet dans l'intéressante Notice qui sert d'introduction à l'ouvrage, que les auditeurs écoutaient la parole du maître avec le respect que le génie inspire, il faut ajouter qu'ils profitaient autant en étudiant les feuilles incomplètes conservées à

l'Ecole, et dont ils admiraient la clarté et la simplicité. Sturm n'a pas voulu parer ou déparer son ouvrage par des considérations philosophiques vagues et prétentieuses ou par des aperçus métaphysiques qui simulent la profondeur et ne portent que les ténèbres. Il se contente d'établir avec concision, netteté et sans équivoque les notions saisissables par les esprits bien faits et à fixer le sens précis des vérités fondamentales. Dans son exposition, il adopte la méthode des limites, que quelques exemples bien choisis rendent lumineuse. La différentiation des fonctions à plusieurs variables rappelle quelques formes des feuilles d'Ampère. Les leçons sur les séries, sur le développement des fonctions, sur la courbure des lignes, présentent dans un cadre resserré un ensemble aussi complet que substantiel. Deux leçons élégantes sur les expressions imaginaires renferment tout ce qu'il est utile de savoir sur cet important sujet. Rien n'est omis. Les difficultés qui ont été un sujet de discussion entre Euler et d'Alembert, relativement aux logarithmes des quantités négatives, sont résolues de la manière la plus simple; enfin des considérations très-fines montrent la légitimité de l'induction, lorsqu'on passe des relations entre des quantités réelles aux mêmes relations entre des imaginaires.

Le livre de Sturm porte partout le cachet de son esprit profond, rigoureux et original. Il restera dans l'enseignement comme un guide excellent pour tous ceux qui voudront être initiés le mieux et le plus vite possible à la connaissance de l'analyse infinitésimale. En le parcourant, nous nous sommes souvent demandé si le moment n'était pas venu d'introduire dans les éléments la méthode et la notation différentielle dans ce qu'elles ont de plus simple. Par ce moyen, on supprimerait une foule de procédés indirects, particuliers et souvent difficiles, dont on fait usage pour les questions des maxima,

des tangentes, des quadratures, questions non-seulement indispensables dans l'étude de l'algèbre, de la physique, de la mécanique, mais aussi dans les applications pratiques dont on s'occupe beaucoup aujourd'hui (*).

Les professeurs, tous ceux qui cultivent et qui aiment les mathématiques sauront gré à M. Prouhet des soins qu'il s'est donnés pour éditer les œuvres classiques d'un des géomètres les plus originaux de notre époque. Les amis de Sturm seront à jamais reçonnaissants à ce savant de son dévouement pour la mémoire d'un homme dont le nom durera autant que l'algèbre. BRASSINE.

FRACTIONS CONTINUES.

On dit qu'on trouve déjà l'emploi des fractions continues dans l'ouvrage suivant, antérieur à Brounker :

CATALDI (P.-A) : *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra dei numeri.* Bologna, 1613.

C'est à vérifier.

PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE DE DIOPHANTE

(voir BULLETIN, tome III, page 28);

PAR M. LEBESGUE.

La solution de Diophante est incomplète; cela vient de ce qu'il raisonne uniquement sur des nombres entiers,

(*) Ces vœux de mon savant collègue, émis il y a plus d'un siècle par d'Alembert, sont restés et resteront encore des siècles des *pia desideria*. Il ne faut pas que la science devienne trop facile. C'est l'opinion de bien des gens. TM.

tandis qu'il aurait fallu raisonner sur des nombres rationnels entiers ou fractionnaires.

S'il y a x mesures à 8 dragmes, y mesures à 5 dragmes, les équations du problème sont

$$8x + 5y = z^2, \quad x + y = \sqrt{z^2 + 60} = v,$$

x, y, z, v étant des nombres rationnels *positifs*.

Il faut donc avoir

$$z^2 + 60 = v^2,$$

de là

$$3x = v^2 - 60 - 5v,$$

$$3y = 8v - (v^2 - 60).$$

Ces équations montrent que l'on a

$$8 > v - \frac{60}{v} > 5.$$

L'équation

$$z^2 + 60 = v^2$$

donne, en posant

$$v + z = 2u,$$

d'où

$$v - z = \frac{60}{2u},$$

$$v = u + \frac{15}{u}, \quad z = u - \frac{15}{u};$$

il faut donc avoir u positif $> \sqrt{15}$.

y devient nul pour

$$v = 2(2 + \sqrt{19})$$

et x le devient pour

$$v = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{265}),$$

de sorte que u doit tomber entre

$$\frac{1}{4}\left[5+\sqrt{265}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{265}\right)}\right]$$

et

$$2+\sqrt{19}+2\sqrt{2+\sqrt{19}},$$

ou encore entre

$$8 + \text{une fraction} \quad \text{et} \quad 11 + \text{une fraction}.$$

Posant

$$u = 9,\ 10,\ 11,$$

on a les trois solutions

$$x=\frac{4}{27},\quad y=\frac{284}{27},\quad z=\frac{22}{3},\quad v=\frac{32}{3},$$

$$x=\frac{59}{12},\quad y=\frac{79}{12},\quad z=\frac{17}{2},\quad v=\frac{23}{2},$$

$$x=\frac{1252}{121},\quad y=\frac{244}{121},\quad z=\frac{106}{11},\quad v=\frac{136}{11}$$

(solutions de Diophante).

Toute autre valeur rationnelle de u, entre des limites données, conduira à une solution : il y en a donc une infinité.

Cette solution ne suppose rien qui ne se trouve déjà dans Euclide. Diophante aurait pu donner une solution complète s'il avait vu que la résolution des équations du deuxième degré est dans Euclide. Il s'ensuit que les limites à calculer pour que les solutions soient en nombres positifs pouvaient être déterminées ainsi que je l'ai fait plus haut.

DALRYMPLE (Alexander).

Le Dépôt des cartes, plans et journaux de la marine, à Paris, possède l'ouvrage suivant : *General introduction to the Charts and Memoirs published by Dalrymple. Humanum est errare, Virg. Originaly printed in* 1772. Second edition. London, by George Bigg; 1786. Grand in-4.

C'est une collection de huit Mémoires. La pagination recommence pour chaque Mémoire. Tous ces Mémoires, à l'exception du premier, roulent sur la description des côtes de la Chine, d'après des voyages entrepris par divers bâtiments. Ce sont des journaux marins de voyage. Les cartes n'y sont pas.

Le premier Mémoire est : *Essay on nautical surveying by Dalrymple, originaly published in* 1771. Second edition. London, 1786.

Essai sur le relèvement nautique, 20 pages et 1 pl. Cette seconde édition est publiée par l'auteur, qui dit avoir fait quelques légers changements. La méthode de relèvement par la théorie des segments capables est expliquée (p. 7) sans aucune citation. On donne une construction géométrique, d'après le R. M. Michell, ami de Dalrymple.

Les Mémoires sur les côtes de la Chine doivent être très-utiles dans les circonstances actuelles.

Sur le dos du livre, on lit : *Nautical Memoirs and Journal Dalrymple. Vol. IV.* C'est probablement le quatrième volume d'une collection de journaux de voyages maritimes.

Le nom de Dalrymple le marin ne se trouve pas dans la *Biographie* Michaud.

BIBLIOGRAPHIE.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE conformes aux *Programmes* de l'enseignement scientifique dans les lycées; par *Ch. Briot,* professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, et *Ch. Vacquant,* professeur adjoint de mathématiques spéciales au Lycée Bonaparte. Application, 2e et 3e parties; Géométrie descriptive et Nivellement, à l'usage des classes de Seconde, de Rhétorique et de Mathématiques spéciales; de la page 107 à la page 349, pl. III à IX, 91 figures dans le texte. Paris, in-8; 1856.

Permettez-moi, mon cher Rédacteur, de signaler le progrès qui se manifeste d'une manière évidente dans l'enseignement élémentaire de la géométrie descriptive.

Que de fois vous m'avez entendu dire et que de fois j'ai écrit : Quand donc commencera-t-on le dessin des projections avec le cinquième livre de la géométrie, et par la *projection cotée,* si simple, si élémentaire, si naturelle? Eh bien, nous y arrivons. Jugez-en.

C'est en 1823 que le capitaine du génie Noizet publiait, dans le n° 6 du *Mémorial de l'officier du génie,* son *Mémoire sur la géométrie appliquée au dessin de la fortification,* où se trouve exposée avec toute la clarté désirable la méthode des *plans cotés* que cet officier enseignait avec distinction à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie. Le titre technique de ce Mémoire, la dénomination de *plans cotés*, et surtout la publicité restreinte d'une impression officielle, telles sont les causes du peu d'atten-

tion qu'on a apportée, en dehors du corps du Génie, à cet important travail. Ce n'est même, chose surprenante, que dix ans après, en 1833, et sur les demandes réitérées de l'Ecole de Metz, que les plans cotés sont entrés dans le programme de géométrie descriptive de l'Ecole Polytechnique (*). Où les y trouve-t-on? Dans les applications, avec les ombres, la perspective et la stéréotomie, quand au contraire on aurait dû mettre cette méthode de projection au commencement du cours. Quelle part lui faisait-on? Celle d'une leçon et d'une épure. Et l'épure était tellement insignifiante par elle-même et à cause de sa place reculée, la dix-neuvième dans la série des exercices, que les élèves n'ont jamais eu la moindre considération pour une méthode qu'ils ne pouvaient pas apprécier, faute de la connaître. Les conséquences de cet état de choses, qui a duré vingt ans, se sont étendues plus loin qu'il n'apparaît au premier abord.

En 1837, après plusieurs années d'essais faits à l'Ecole d'artillerie de Metz et aux Cours industriels gratuits de cette ville, je lithographiais la *Représentation des corps solides à l'aide d'un seul plan de projection et de cotes de distance*; production très-imparfaite, improvisée dans des circonstances de service pressantes, dont vous vous souvenez sans doute. Aussi ai-je mis de côté tout amour-propre d'auteur et cédé au seul désir d'être utile, en consentant à laisser cette autographie se répandre. J'espérais faire naître chez quelqu'un de mes honorables collègues de l'enseignement l'idée de reprendre ma voie, et de faire mieux que moi. Soin inutile!

(*) *Programme pour l'année scolaire* 1832-1833, p. 18. « Notions sur la » manière de représenter les surfaces par le moyen d'un seul plan de projection. — 19e épure. Problèmes divers à résoudre au moyen de ce » *procédé.* » Ces problèmes n'allaient pas au delà de la ligne droite et du plan.

En 1849, M. le général Noizet, alors membre du Conseil de Perfectionnement de l'Ecole Polytechnique et d'une Commission chargée de revoir l'enseignement des arts graphiques, me demanda quelques notes où je retrouve les réflexions suivantes : « Il n'y a pas de mesure » qu'on n'ait tentée à l'Ecole Polytechnique pour donner » de l'intérêt au *dessin topographique;* les programmes » de l'enseignement et les procès-verbaux des conseils en » font foi. Encore aujourd'hui, malgré les améliorations » réelles que le colonel Leblanc y a introduites, ce genre » de dessin, si utile et si attrayant par lui-même, n'est » pour les élèves que l'occasion de quelques exercices » qu'ils abaissent sous la misérable désignation de *topo,* » mot d'argot qu'il est désirable de voir disparaître de » l'Ecole. On ne relèvera le dessin topographique du dis- » crédit où il est, qu'en prenant pour base de son ensei- » gnement la *projection cotée,* à laquelle un nombre » suffisant de leçons serait consacré. Alors seulement les » élèves accorderont à ce travail la considération qu'il » mérite, et le résultat utile de leurs exercices sera dé- » cuplé. Mais surtout que l'on remplace l'insignifiante » épure 19 par quelques autres questions faciles à trou- » ver! En tout cas, c'est au commencement du cours et » non dans les applications que les plans cotés devraient » être. Je vais plus loin : leur vraie place est dans le » Programme d'admission, etc.

» Mieux que personne, vous reconnaîtrez que le sys- » tème des doubles projections rectangulaires est l'objet » trop exclusif des leçons de géométrie descriptive à l'É- » cole. Son importance est grande sans doute, puisqu'il » est la base du *dessin architectural* et du *dessin des ma-* » *chines*, et, en général, de la représentation de tout ob- » jet qui a des dimensions plus ou moins considérables » dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Mais

» les bâtiments et les machines ne sont pas les seuls tra-
» vaux d'art que les ingénieurs aient à projeter, repré-
» senter et exécuter. Il est d'autres objets, tels que les
» canaux, les routes, les chemins de fer, les fortifications,
» les formes du terrain, etc., qui, ayant un très-grand
» développement dans le sens horizontal, sous de très-
» faibles dimensions dans le sens vertical, ne peuvent
» plus être représentés par des combinaisons de *plans* et
» d'*élévations,* mais seulement à l'aide de *plans* sur les-
» quels le relief est indiqué par des *cotes* convenablement
» disposées.... »

Il ne fut pas donné à l'auteur de la méthode des plans cotés d'attacher, enfin, à son nom la célébrité qu'il aura un jour en dehors du corps du Génie.

Je ne parle que pour mémoire de ce que j'ai tenté dans les années 1850 et 1851, lorsque je remplaçais le colonel Leblanc appelé au siége de Rome. Je me suis servi des *explications* que j'étais autorisé à donner en commun aux élèves réunis à l'amphithéâtre pour faire apparaître la projection cotée en topographie.

Nous voici en 1852. Tout étant mis en question par la *Commission mixte chargée de la révision des Programmes d'admission aux Écoles du gouvernement et de l'enseignement scientifique des Lycées,* j'en profitai pour adresser des *Notes* à M. le Président de cette Commission, ainsi qu'à M. le général Noizet et à M. Bommart, alors directeur des études à l'Ecole Polytechnique, l'un et l'autre membres de la Commission. « Je suis na-
» turellement conduit, disais-je à M. le Président, à
» vous parler du *dessin des projections* qui manque dans
» l'enseignement primaire des sciences, bien que l'expé-
» rience ait prouvé surabondamment que les ouvriers,
» hommes intelligents mais peu exercés aux spéculations
» de l'esprit, y réussissent parfaitement. Pourquoi donc

» les lycées sont-ils en retard sur ce point? Cela tient à
» ce que l'on croit les élements de la géométrie descriptive
» plus difficiles qu'ils ne le sont réellement, et que l'on
» regarde à tort comme inhérentes à la matière de l'en-
» seignement des difficultés qui ne viennent que de la mé-
» thode que l'on suit. Je voudrais pouvoir dire à mes
» collègues des lycées :

» Placez les premiers éléments du dessin à la règle et
» au compas dans la géométrie des deux dimensions, et
» non dans le dessin des projections.

» Parlez de *projections* dès le cinquième livre de la
» Géométrie, en aidant les élèves par quelques exercices
» sur l'usage du fil à plomb et du niveau d'eau.

» Renoncez à mettre au début les élèves en présence
» de deux plans de projection, c'est-à-dire d'une dualité
» dont la conception entraîne des idées de rabattement et
» de relèvement d'une difficulté réelle, que tous vous avez
» constatée; difficulté encore augmentée par la considé-
» ration des changements de plans dont on a voulu faire
» une méthode au lieu d'un simple artifice graphique,
» connu et pratiqué depuis longtemps, même avant la
» *Géométrie descriptive* de Monge. Commencez plutôt
» par la méthode d'un seul plan de projection et de cotes
» de distance, par la *projection cotée*, avec laquelle les
» élèves parviennent très-promptement à *écrire* leurs
» combinaisons sur la grandeur figurée, à *composer*, en
» un mot, presque avec la rapidité de la pensée....

» Renoncez à faire reproduire aux élèves les épures
» gravées des auteurs et obligez-les de bonne heure à
» travailler sur des programmes individuels, travail qui
» seul peut leur donner de l'initiative, les rendre sûrs
» d'eux-mêmes et les amener finalement à lire facilement
» dans l'espace.

» Cessez de les arrêter à des questions purement abs-

» traites, telles que la distance d'un point à une droite
» ou à un plan, de la distance de deux droites, de l'angle
» de deux plans, etc., questions fondamentales qu'on
» peut comparer avec raison aux quatre règles de l'Arith-
» métique, et qu'il suffit de traiter au tableau avec de la
» craie ou sur le papier avec le crayon. Qu'on leur de-
» mande plutôt d'imaginer une forme, un solide défini,
» une pyramide, je suppose, de la représenter et d'exé-
» cuter sur elle diverses opérations empruntées aux com-
» binaisons de la ligne droite et du plan : par exemple,
» de la tronquer suivant certaines conditions, d'en me-
» surer les dimensions et d'en calculer le volume, d'en
» développer la surface et de construire l'angle qui me-
» sure l'inclinaison de deux faces adjacentes, etc. A ce
» propos, on leur expliquerait sommairement la possi-
» bilité d'exécuter, avec les résultats ainsi obtenus, le
» solide qu'ils ont imaginé et représenté, de l'exécuter en
» papier d'abord, puis en matière solide (plâtre, cire,
» terre glaise, etc.).

» Signalez enfin aux élèves le triple objet de la géo-
» métrie descriptive, qui est de concevoir une forme
» géométrique, de la représenter d'après les procédés du
» dessin des projections et d'en déduire les éléments né-
» cessaires pour son exécution en relief; réciproque-
» ment, de mesurer un solide donné, de le *lever*, selon
» l'expression consacrée par la pratique, pour pouvoir
» le rendre intelligible par tous et exécutable en relief
» à une échelle quelconque.

» Suivez cette voie déjà éclairée par l'expérience, et
» vous serez surpris de la promptitude avec laquelle les
» élèves acquerront des notions exactes de situation,
» de forme, de dimensions, de symétrie, de régula-
» rité, etc.; vous les verrez passer avec une étonnante
» facilité de la projection cotée aux doubles projections

» rectangulaires, à la projection oblique et parallèle,
» à la projection concourante, etc.; vous les trouverez
» enfin parfaitement préparés pour les applications les
» plus importantes de la géométrie descriptive, qui sont
» les *levers de terrains, de bâtiments et de machines,*
» but final de l'enseignement primaire de la géométrie
» descriptive. »

En définitive, qu'est-il sorti des travaux de la Commission mixte de 1852? Vous le trouverez, mon cher Rédacteur, dans le *Plan d'études des Lycées* de 1853, sous la forme d'un Programme découpé, discontinu, sans méthode apparente, ainsi que le montrent, pour ne citer qu'un exemple, les fragments de projection cotée qui sont placés sans ordre à la suite du nivellement. Mais la conséquence la plus fâcheuse de ce plan d'études, quant à ce qui regarde l'enseignement de la géométrie descriptive et des travaux graphiques, c'est la suppression de la géométrie descriptive sur le programme des mathématiques élémentaires. Cette suppression est l'objet d'un regret général.

Toutefois on peut, on doit même, en s'arrêtant au fait de l'apparition des plans cotés, considérer les nouveaux Programmes comme un acheminement vers la meilleure méthode d'enseignement du dessin des projections. La tentative récente de MM. Briot et Vacquant en fournit une preuve. Ces deux habiles professeurs ont fait, *conformément aux Programmes de l'enseignement scientifique dans les lycées,* tout ce qu'il était possible de faire. Reproduire leur table des matières, serait donner lieu à de nombreuses observations de détail qui ne sauraient trouver place ici. En résumé, voici où en est à Paris, à la fin de l'année 1856, l'enseignement élémentaire de la géométrie descriptive.

L'*Université* a donné entrée aux *plans cotés* dans ses

programmes, programmes dont le livre de MM. Briot et Vacquant est l'expression fidèle.

A l'*École Polytechnique*, la projection cotée, réunie aux diverses méthodes de représentation de l'étendue figurée, est reportée dans les premières leçons de géométrie descriptive.

On la trouve placée dans les mêmes conditions sur le programme du cours de géométrie descriptive du *Conservatoire des Arts et Métiers*; bien plus, on la retrouve sur celui du cours de géométrie appliquée du même établissement, sans doute pour y être traitée d'un autre point de vue.

A *l'Ecole municipale de Dessin de la ville de Paris*, le professeur de géométrie descriptive traite aussi les plans cotés, mais, ainsi que MM. Briot et Vacquant, après une exposition complète de la méthode des projections rectangulaires et des applications qui s'y rattachent.

C'est-à-dire que partout, aujourd'hui, on enseigne la projection cotée, mais pas encore à sa vraie place et avec le développement qui lui convient. Voilà où nous en sommes sur ce point, après un tiers de siècle. Patience! mon cher Rédacteur, le dernier pas sera fait bientôt. En attendant, rendez-moi la justice de reconnaître que j'ai prêché d'exemple, en paroles et en action.

L'année dernière, après Pâques, j'ai remplacé M. Ch. Dupin au Conservatoire des Arts et Métiers. Huit leçons seulement étaient disponibles; il fallut donc choisir un sujet; on choisit l'art de lever un terrain, qui pût, tout en se rattachant au titre du cours de géométrie appliquée, être resserré dans ce cadre étroit. Mais plus tard, par suite de la prolongation imprévue d'un mois de l'ensemble des cours du Conservatoire, cette matière dut être étendue pour quatorze leçons. Cet incident rompit toute l'économie de mon court enseignement, et m'empêcha, dans l'im-

possibilité où j'étais de revenir sur mes pas, de consacrer à la projection cotée quelques leçons qui auraient été parfaitement placées là. Si ma santé m'avait permis de rester à ce poste utile, je me serais appliqué à combler cette lacune.

J'ajouterai, en terminant, qu'ayant été appelé à l'Ecole Normale supérieure pendant les années 1853 et 1854 pour diriger les exercices de levers de terrain et de nivellement, j'ai eu l'occasion de voir l'état des travaux graphiques à cette école, et de concevoir la pensée d'être chargé de cette direction, bien autrement importante à mes yeux. J'ai même fait quelques démarches à ce sujet, bien convaincu que c'était là qu'il importait, avant tout, de faire connaître et pratiquer la projection cotée.

Note du Rédacteur.

Ire Partie (classe de Troisième). Contient le levé des plans; mètre, graphomètre, équerre, planchette, arpentage, boussole, triangulation.

IIe Partie (classe de Seconde). Méthode des projections orthogonales; polyèdres, cylindres; plan, élévation et coupe de bâtiments.

IIIe Partie (Rhétorique). Nivellement, courbes de niveau; *plan coté;* problème sur les cotes; lignes de faîte; thalwegs, etc.

Appendice (Mathématiques spéciales). Niveau à bulle d'air, vérification des instruments; niveau d'Egault.

Voilà ce que l'on enseigne dans les lycées. Que reste-t-il à apprendre dans les écoles dites d'*application*? L'ouvrage commence par 1re et 2e *Leçons*. Nous maintenons qu'il faut dire 1re et 2e *Leçon* au singulier. Dirait-on 1er et 2e *chevaux*? La méthode des plans cotés est à la page 185; elle devrait se trouver à la page 1. C'est l'opinion du savant géomètre graphiste, chef des travaux graphiques à l'Ecole Polytechnique; opinion à laquelle nous

adhérons complétement. Si un plan suffit, pourquoi de prime abord en prendre deux? Il y a déjà un tiers de siècle que M. Noizet a montré avec une clarté extrême qu'un seul plan suffit à la solution de toute espèce de problèmes dans l'espace. D'ailleurs, dans les services publics, on emploie beaucoup plus de plans cotés que d'autres, et c'est pour les services publics que la géométrie descriptive a été créée; c'est là qu'elle obtient ses principales applications. M. Bardin est surpris de la lenteur qu'on met à l'adoption de la méthode Noizet. Le contraire serait plus surprenant. Le calcul infinitésimal, proposé par d'Alembert il y a plus d'un siècle, est-il adopté? Principe général: Le temps exigé pour l'admission d'une idée dans le courant de l'enseignement est toujours en raison inverse de la quantité de bon sens que renferme cette idée. C'est même un fait d'expérience: plus une proposition s'éloigne du sens commun, pourvu qu'elle soit entourée d'un clinquant profondément inintelligible, plus elle a de chances de succès, d'être acclamée avec enthousiasme par la foule. C'est ce que nous apprend un des plus abstraits penseurs de l'antiquité païenne et des plus grands poëtes de l'antiquité romaine:

Omnia enim stolidi magis admirantur amantque
Inversis quæ sub verbis latitantia cernunt
Veraque constituunt quæ belle tangere possunt
Aures et lepido quæ sunt fucata sonore.

(*De Rerum natura*, lib. I, v. 642.)

Un poëte français ajoute que ces *stolidi* sont partout en majorité (*).

(*) Pourquoi Lucrèce est-il exclu de l'enseignement? Ce poëte fait pourtant partie de l'édition des *Variorum* publiée par l'ordre de Louis XIV à l'usage du Dauphin. Le système atomistique est même aujourd'hui la base de toutes les sciences. Gassendi, prêtre philosophe, enseignait ce système au Collége de France et avait entrepris une traduction de Lucrèce.

NOTE
Sur la correspondance scientifique de Jean Bernoulli ;
PAR M. PROUHET.

Longtemps après l'apparition des journaux scientifiques, vers le milieu du XVIIe siècle, les savants ont continué à se communiquer par lettres leurs découvertes. Pour donner une idée de l'activité qui régnait dans ce commerce épistolaire, je citerai l'annonce suivante que je trouve sur la couverture du Ve cahier (1796) du journal d'Hindenburg (*Archiv der reinen und angewandten mathematik*).

« *Annonce relative à diverses correspondances de Jean Bernoulli avec*

		Lettres.
1.	Bilfinger (1720-25), en latin...........	60
2.	Burnet (fils de l'évêque) (1708-14), en fr.	32
3.	Cramer (1727-33), en français..........	26
4.	De Crouzaz (1712-24), en français........	42
5.	L. Euler (1729-42), en latin...........	24
6.	De Fontenelle (1720-30), en français....	19
7.	Hermann (1702-27), en latin..........	80
8.	Marquis de l'Hôpital (1695-1701) en fr...	85
9.	De Mairan (1723-40) en fr.. ... Environ	112
10.	Michelotti (1714-25), partie en latin et partie en français................ ..	108
11.	Moivre (1704-14), en français..........	19
12.	De Montmort (1704-19), en français. ...	41
13.	De Maupertuis (1730-46) en fr.. Environ	100
14.	Renau (1713-14), en français (en partie déjà imprimées)....................	8
		756

	Report	756
15.	Jean et J.-Jacques Scheuchzer (1706-36), en latin et en français............... (Celles-ci sont moins scientifiques que les autres.)	480
16.	Varignon (*) (1692-1722), en français...	246
17.	Wolf (1706-43), en latin....	97
18.	En outre plus de 120 lettres adressées en grande partie à des savants ou émanées d'eux..........................	120
		1699

» En même temps sa correspondance avec Bousquet au sujet de l'édition des œuvres complètes de Jean Bernoulli; enfin divers écrits académiques (*feyerlischen reden*) non encore imprimés et qui contiennent des sujets dignes d'être lus. La plupart de ces lettres sont accompagnées des réponses de Bernoulli, dont la majeure partie a une certaine étendue et va au fond des choses (*lang und grundlich*).

» Si l'on trouvait un éditeur disposé à publier cette précieuse et intéressante collection d'un des plus grands hommes en son genre, on la céderait à des conditions raisonnables. Le titre pourrait être : *Lettres relatives à l'histoire des sciences mathématiques.* »

Il paraît qu'aucun éditeur n'a voulu entreprendre la publication de cette collection dont le possesseur ne se nomme pas et dont il n'est pas question dans le corps du journal. Cette annonce doit être fort peu connue, puisqu'elle se trouve sur une couverture qu'on enlève ordinairement quand on fait relier l'ouvrage, à moins qu'on ne soit un bibliophile zélé et désireux de ne rien perdre.

(*) Varignon légua tous ses papiers à Fontenelle, qui annonce dans l'éloge de son ami (*Histoire de l'Académie*, 1722, p. 146) la publication prochaine de sa *Mécanique* et de sa *Correspondance*; mais la *Mécanique* seule a paru.

Parmi toutes ces lettres, il n'y en a qu'une douzaine, écrites par Bernoulli à Euler, qui aient été publiées. On les trouve dans la *Correspondance physique et mathématique de quelques géomètres célèbres du* XVIIIe *siècle*, recueillie par P.-H. Fuss. Saint-Pétersbourg, 1843. Les lettres d'Euler à Bernoulli manquent dans cet ouvrage et devaient se trouver dans la collection citée plus haut.

La correspondance de Bernoulli et de Leibnitz, qui n'est pas comprise dans la liste ci-dessus, se compose de 275 lettres et a déjà été publiée deux fois :

1°. Sous ce titre : *Virorum celeberrimorum Got.-Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum*. Lausannæ et Genevæ, 1745. 2 vol. in-4°.

2°. Dans les *Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von Gerhardt. Band III, pages 111-974. Halle, 1855-1856 ; in-8.

Cette dernière publication est la plus complète, car elle renferme environ 50 lettres inédites et de nombreux passages que les premiers éditeurs avaient supprimés par un sentiment de convenance et probablement sur la recommandation expresse de Bernoulli. Les passages rétablis dans la nouvelle édition n'intéressent guère la science elle-même, mais ils font connaître de plus en plus l'esprit caustique et le caractère ombrageux de Jean Bernoulli. Les citations suivantes en donneront une idée (*).

Bernoulli loue ce bon Varignon, qui généralisait si bien ses théorèmes et ceux de Leibnitz, mais ce n'est pas sans lancer quelque sanglante épigramme contre le peuple français.

« Laudo hujus viri raram modestiam ; [non certe Gallum diceres, adeo alienus est a nationis ingenita fero-

(*) Bernoulli avait conscience de son immense supériorité et avait le tort de s'en exprimer trop ouvertement et d'une manière blessante. TR.

citate et fastu : odit ipse vanitatem suorum popularium, qui superciliose super extraneos se attollunt, nostra contra invidos strenue defendit (*)]. » (Page 481.)

Les Italiens sont moins fiers, à ce qu'il paraît, mais ils s'abusent sur l'originalité de leurs inventions.

« Remitto, ut jubes, epistolam D[ni] Zendrini. Ex ea video, ut et Riccatum [aliosque quosdam Italos velle agere simias nostras, non tamen agnoscere nisi] nostra tantum imitari. » (Page 946.)

Quant aux Anglais, Bernoulli les déteste cordialement et ne laisse échapper aucune occasion de leur dire quelque bonne vérité.

« [Hi non disputant ut veritatem tueantur, sed quia de nationis gloria agi putant, quando vident magistrum suum, in cujus verbi jurarunt, in discrimine causæ sive bonæ, sive malæ (hoc non attendunt) versari]. » (Page 966.)

Bernoulli ne dédaigne pas le jeu de mots, quand il s'agit de dire une méchanceté.

« Vidi Muysi Elementa Physices et perlustravi : [tumidus est titulus et multa promittens, sed de quo vere dici potest : Parturiunt montes, nascetur ridiculus mus. Cujus itaque nomen et omen habet auctor]. » (Page 892.)

De plus tristes pages sont celles où la haine de Jean Bernoulli se répand en amères récriminations contre son frère. La passion l'entraîne alors dans des exagérations incroyables. Ainsi il assure hardiment (*audacter*) que sans lui son frère Jacques n'aurait peut-être pas dépassé les éléments.

« [Nam licet explicatorem sex priorum Elementorum Euclideorum jam ante decennium habuerim fratrem *vel potius instigatorem,* audacter asseverare possum illum forsan absque meo adminiculo communis geometriæ po-

(*) Les passages renfermés entre crochets [ ] sont remplacés par des points dans l'ancienne édition.

mæria nunquam prætergressum fuisse.] » (Page 163.)

Néanmoins Bernoulli n'oublie pas les égards que l'on doit à un frère aîné.

« [Hæc tibi dico saltem ut videas illum nullam me persequendi rationem habere. Quod quidem publice ostendere deberam, sed *fraternitatis leges melius observo et primogenituræ aliquid defero.*] » (Page 163.)

Il est à regretter que M. Gerhardt n'ait pas distingué par un signe typographique les additions faites à l'ancien texte, ce qui aurait permis d'apprécier d'un coup d'œil le nombre et la valeur des documents nouveaux dont sa publication enrichit l'histoire scientifique. Il aurait dû, ce me semble, conserver les sommaires et la table des matières de l'ancienne édition, appendices sans lesquels toute recherche est impossible. Malgré ces critiques, qui ne portent que sur la forme, nous recommandons à tous les amis des sciences l'utile entreprise de MM. Gerhardt et H. Pertz. Peut-être faut-il attribuer au peu d'encouragement qu'ont reçu les éditeurs la lenteur avec laquelle marche la publication des OEuvres complètes de Leibnitz, qui, commencée en 1842, n'est pas encore terminée en 1857. L'honneur de notre époque, et particulièrement de deux nations, est intéressé à ce qu'un pareil monument ne reste pas inachevé.

Note du Rédacteur. Il est à remarquer que les hommes les plus occupés, qui ont publié les ouvrages les plus nombreux, les plus volumineux, sont aussi ceux qui se sont montrés les correspondants les plus actifs, répondant toujours aux lettres qu'on leur écrivait sur des points scientifiques ou littéraires. Il suffit de citer Leibnitz et Voltaire. Le *manque de temps* est un prétexte banal, le plus souvent mensonger, servant de manteau soit à la paresse, soit à un orgueil ridicule, apanage ordinaire de la médiocrité.

BIBLIOGRAPHIE.

Tafeln der quadrat und kubik-zahlen aller naturlichen zahlen bis hundert tausend, nebst ihrer anwendung auf die zerlegung grosser Zahlen in ihre faktoren nach einer neuen methode berechnet; von D[r] *Jacob Philipp Kulik*. — Tables des carrés et des cubes de tous les nombres naturels jusqu'à 100 000, avec l'application à la décomposition des grands nombres en facteurs, calculées par une nouvelle méthode; par *Jacques-Philippe Kulik*, professeur ordinaire de mathématiques à l'université de Prague. Leipzig, 1848; in-8 de VII-460 pages. Prix : 3 florins.

Chaque page contient 250 nombres avec leurs carrés et leurs cubes, distribués en cinq progressions arithmétiques de 50 nombres consécutifs chacune. Nous donnons pour exemple l'en-tête et les trois premières lignes de la page 56.

N	13		113		213		313		413	
	N^2	N^3	N^2	N^3	N^2	N^3	T^2	N^3	N^2	N^3
	1	2	12	14						
50	82 2500	46037 5000	882	6213537						
51	82 5201	6584 6551	84	252187						
52	82 7904	7132 6203	86	290844						
..										
..										
..										
99										

1re progression.	1350, 1351, 1352, . . . ,	1399,
2e »	11350, 11351, . . . ,	11399,
3e »	21350, 21351, . . . ,	21399,
4e »	31350, 31351, . . . ,	31399,
5e »	41350, 41351, . . . ,	41399.

N désigne la colonne des nombres, N^2 la colonne des carrés et N^3 celle des cubes; le carré de 1350 est 1822500 et le chiffre 1 est le premier chiffre à droite de tous les nombres de cette colonne; ainsi

$$(1351)^2 = 1825201, \quad (1352)^2 = 1827904.$$

Il en est de même pour les chiffres 2, 12, 14. Les chiffres séparés 2500 terminent tous les carrés de cette ligne; de même pour les cubes.

Ainsi

$$(11350)^2 = 128822500,$$
$$(11351)^2 = 128845201,$$
$$(11352)^2 = 128867904,$$
$$(1350)^3 = 2460375000,$$
$$(11350)^3 = 1462135375000,$$
$$(11351)^3 = 1462521876551.$$

L'auteur nomme *tête* les chiffres que les nombres dans la même progression ont en commun à gauche : ainsi les nombres 1, 2, 12, 14 sont des *têtes;* et il nomme *pied* les chiffres à droite qui ont en commun les nombres de la progression dont la raison est 10000 : ainsi 2500, 5201, 7904, 5000, 6551, etc., sont des *pieds.* Les chiffres du milieu sont le *corps:* ainsi 82, 46037, 882, etc., sont des *corps.* Il arrive quelquefois que dans une progression par unités, la tête doit être augmentée de 1 ; un astérisque * indique cette augmentation. Très-rarement cette augmen-

tation monte à 2, et c'est un trait | qui indique cette augmentation. La page suivante, 57, contient les progressions commençant par 513, 613, 713, 813, 913, et doit être regardée comme ne formant qu'une seule page avec la précédente. On voit comment, par ce procédé ingénieux, on a pu inscrire cent mille nombres avec leurs carrés et leurs cubes sur 400 pages in-8 renfermant un million et demi de chiffres.

M. Caillet a eu la même idée en 1848 (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 425).

Il est évident qu'on peut, au moyen de cette Table, trouver les carrés et les cubes des nombres renfermés dans la formule $a.10^n + b$, pourvu que a et b aient moins de six chiffres; mais il faut faire le produit $2ab$ et $3ab(a+b)$; d'ailleurs

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right).$$

On voit aussi qu'elle peut servir à extraire les racines carrées et cubiques.

L'ouvrage contient en outre onze Tables auxiliaires; la onzième donne les multiples de π et de $\frac{1}{\pi}$ depuis 1 à 100; avec 30 décimales pour π et avec 12 pour $\frac{1}{\pi}$.

Les dix autres Tables servent à décomposer un grand nombre en deux facteurs, lorsque cela est possible.

La Table II contient la décomposition en deux carrés de tous les nombres premiers de forme $4n+1$ depuis 5 jusqu'à 10529.

On trouve une semblable Table dans le *Journal* de Crelle (t. XXX, p. 174) étendue jusqu'à 11981; mais les nombres 197, 901, 2713, 4913, 6997 y manquent.

Au moyen de cette Table, tout nombre qui est le pro-

duit de nombres premiers de forme $4n+1$ peut être décomposé en somme et en différence de deux carrés par les théorèmes connus, pourvu que ces facteurs soient contenus dans cette Table.

La Table III donne les nombres impairs de 7 à 12097 qui sont la différence de deux cubes : $N = x^3 - y^3$.

La Table IV donne les nombres compris entre 9 et 18907 qui sont la somme de deux cubes. $N = x^3 + y^3$, avec les valeurs de x et de y.

Tous les carrés possibles n'ont que 1044 terminaisons, en prenant pour terminaison les quatre premiers chiffres à droite.

La Table X donne toutes ces terminaisons avec le plus petit carré correspondant. *Exemple :*

Terminaisons.	Carrés.	
0001	11249	0001
0004	22498	0004
0009	31253	0009

Une terminaison quadratique est dite congruente *additive* à un nombre N, lorsqu'en ajoutant cette terminaison aux quatre premiers chiffres à droite de N, on a encore une terminaison quadratique ; la congruence est soustractive lorsqu'il faut retrancher.

Exemple. Soit

$$N = 8514341;$$

les terminaisons 0100, 0900, 2100, 2500, etc., sont congruentes additives ; car $4341 + 0100 = 4441$ qui est encore une terminaison quadratique.

Le Tables V, VI, VII, VIII, IX sont destinées à trouver ces terminaisons congruentes à une terminaison d'un nombre donné N.

On comprend l'utilité immense de ces Tables pour

trouver les solutions de l'équation

$$N = x^2 \pm y^2,$$

et par conséquent les facteurs de N ; soit

$$N = 2237791.$$

Les terminaisons additives congruentes à 7791 sont

$\overset{*}{0}\overset{*}{2}25$, $0\overset{*}{6}2\overset{*}{5}$, 1025, 2225, $\overset{*}{3}0\overset{*}{2}5$, $\overset{*}{4}2\overset{*}{2}5$,
5025, 6225, 7025, 8225, $902\overset{*}{5}$;
0609, 8809, $\overset{*}{2}2\overset{*}{0}9$, 2609, 3809, 4609,
9809, 6609, 7809, 8609, 9809.

Les nombres astérisqués sont des carrés ; si on les ajoute successivement à N, on trouve des nombres N qui commencent tous à gauche par 223 et qui ont des terminaisons quadratiques ; le nombre 0225 ajouté à N donne un carré

$$2237791 + 0225 = 2238016 = (1496)^2,$$

donc

$$N = (1496)^2 - 15^2 = 1511.1481.$$

Euler, ayant rencontré ce nombre N, déclare qu'il serait pénible de rechercher s'il est premier ou non (*N. Comm. A. S. Petrop,* t. IX, p. 17).

Soit

$$N = 997331.$$

Par un procédé analogue, l'auteur trouve

$$N = 127.7853.$$

Gauss parvient à la même décomposition par la théorie des résidus quadratiques (*Disq. arith.*, p. 581).

Dans une note, Gauss dit avoir calculé une Table pour faciliter ces décompositions et exprime l'intention de publier cette Table si on le désire. A-t-elle été publiée ?

Les Tables VIII, IX sont relatives aux terminaisons congruentes soustractives, et servent à découvrir si les

nombres de la forme $4n+1$ sont des sommes de la forme x^2+y^2 ; lorsqu'on n'a qu'une solution ; le nombre est premier; lorsqu'on en a deux, il n'est pas premier, et on le décompose de cette manière.

Soit

$$N = A^2 + B^2 = C^2 + D^2 = ab,$$

on a

$$A = pr - qs, \quad C = pr + qs,$$
$$B = ps + qr, \quad D = ps - qr,$$
$$a = p^2 + q^2, \quad b = r^2 + s^2,$$

$$A + C = 2pr, \quad B - D = 2qr;$$

le facteur commun à $A+C$ et $B+D$ fait connaître p et de là r et s.

$$C - A = 2qs, \quad B - D = 2qr;$$

le facteur commun $2q$ donne la valeur de q.

Exemple :

$$N = 10091401,$$

on trouve l'unique solution

$$x = 1251, \quad y = 2920.$$

Ainsi N est un nombre premier. C'est le plus grand nombre premier connu (*). Pour le démontrer, Legendre remplit trois pages in-4 de calculs assez pénibles (*Théorie des nombres,* 3e édit.) ; M. Kulik n'a besoin que d'une demi-page in-8.

Nous croyons avoir fait ressortir les services rendus par le savant professeur de Prague.

(*) M. Lebesgue me fait observer que depuis la publication des Memoires d'Euler de 1778, on connaît des nombres premiers plus grands, entre autres 11866009, 15518809 (*Commentationes arithmeticæ collectæ,* Petersb., 1849).

SUR LE COMPAS DE PROPORTION.

L'invention de cet instrument, qui entrait jadis dans tous les étuis de mathématiques, est consignée dans l'ouvrage suivant :

Le operazioni del compasso geometrico e militare di Galileo, stampata in Padova, por Pietro Marinelli. 1606. In-fol.

Tiré à 60 exemplaires, cet ouvrage est d'une extrême rareté. Il est réimprimé dans les *Œuvres* de Galilée, publiées à Bologne en 1655, en tête du premier volume. On donne à Galilée le titre de noble florentin, professeur de mathématiques au collége de Padoue. La dédicace à Cosme de Médicis, prince de Toscane, porte la date de juillet 1606.

Bientôt après, un noble milanais nommé Capra publia un opuscule latin où il s'attribue l'invention du *compas*. Voici le titre.

Usus et fabrica circini cujusdam proportionis per quam omnia fere tum Euclidis tum mathematicorum omnium problemata facili negotio resolventur, opere et studio Balthazaris Capræ, nobilis Mediolanensis explicata. Patav., 1607; in-4 de 60 $\frac{1}{2}$ pages (*).

Galilée déféra cet ouvrage au tribunal des *réformateurs* du collége de Padoue, siégeant à Venise. Il obtint gain de cause. La sentence porte que Capra est convaincu de plagiat et d'ignorance et que son ouvrage doit être confisqué. On en avait tiré 483 exemplaires : 440 furent

(*) Dans l'ouvrage de Capra un professeur napolitain adresse des éloges à Capra ; c'est probablement ce qui a fait dire erronément à Montucla que Capra est Napolitain.

saisis chez l'imprimeur, 13 chez l'auteur, mais 30 étaient déjà distribués en divers pays d'Europe; de là aussi l'extrême rareté de cet opuscule. Pour remédier à ce commencement de publicité, Galilée crut nécessaire de faire paraître une défense :

Difesa contra le calumnie e imposture di Baldassare Capra Milanese. Usetegli si nella considerazioni astronomica sopra la nuova stella del MDCVIIII *come* (*e assai più*) *nel publicar nuovamente come sua invenzioni la fabrica et gli usi del compasso geometrico e militare sotto in titolo di Usus et fabrica* (comme ci-dessus). Padova, 1607.

Galilée réfute d'abord un autre écrit de Capra où il prétendait que Galilée devait la découverte de la célèbre étoile de 1607 à un nommé Coznaro. Après avoir montré la fausseté de cette allégation, il dit avoir fait construire, il y a cinq ou six ans, une centaine de ses compas à Padoue; qu'il en avait montré l'usage au père de Capra et à Capra lui-même. Il rappelle un grand nombre de passages de l'écrit de Capra qui ne sont qu'une traduction littérale de *Le operazioni del compasso, etc.* Il montre que ce Capra est un ignorant, qui, ayant peu d'affection pour lui, s'est rendu l'instrument d'un de ses plus acharnés adversaires, qu'il ne nomme pas et sur lequel il s'exprime avec beaucoup d'animosité. Il le déclare l'*ennemi du genre humain*.

On a composé beaucoup d'ouvrages sur le compas de Galilée; Kastner en donne la liste dans son *Histoire des Mathématiques*, t. III, p. 336. Cet instrument, tombé en désuétude, était autrefois aussi répandu, aussi préconisé que de nos jours la règle de Gunther.

Burgi, le célèbre co-inventeur des logarithmes, a construit avant Galilée un compas, mais qui n'a rien de commun avec celui de l'illustre Pisan.

NOTE SUR LE PROCÉDÉ POTHENOT.

(voir NOUVELLES ANNALES, t. XIII, p. 367.)

Ce procédé, attribué communément à Pothenot, appartient à Snellius; il est explicitement décrit dans l'ouvrage: *Eratosthenes Batavus de terræ ambitus vera quantitate à Willebrordo Snellio,*

Διὰ τῶν ἐξ ἀποστημάτων μετρουσῶν διοπτρῶν (*),

suscitatus. Lugduni Batavorum apud Jodocum à Colster, ann. CI ƆIƆ CXVII.

Deux branches de laurier forment ceinture autour de cette devise : *O quam contempta res est homo, nisi supra humana se erexerit* (**).

Cet ouvrage remarquable, in-4° de 263 pages, est divisé en deux livres. Le premier contient une exposition critique (il place la terre *fixe* au *centre* du monde, mais il n'en veut pas à ceux qui sont d'une autre opinion) des mesures de la terre données par les Grecs et les Arabes. Le second livre débute par des recherches soignées sur le rapport du pied du Rhin, qu'il adopte pour unité, à divers autres pieds en usage : il trouve que ce pied étant représenté par 1000, celui de Paris est 1055. Il évalue aussi le poids d'un pied cube rhinlandique d'eau *distillée*, afin de rattacher la longueur de ce pied à une donnée naturelle fixe : à cet effet, il invente un appareil ingénieux, qu'il emploie avec beaucoup de précautions,

(*) Calculé par l'intervalle angulaire compris entre des lunettes.

(**) Ah! combien l'homme est chose méprisable, s'il ne s'élève au-dessus de l'humaine nature.

dans l'esprit de celles qu'on a prises pour déterminer le gramme.

Il détermine la distance des deux villes Alkmaer et Berg-op-Zoom, en les reliant par vingt stations et une méthode de triangulation qu'on a depuis toujours suivie pour la même opération, et qui est encore usitée; et ayant déterminé la différence des latitudes de ces deux villes, il fait la même opération pour Leyde et Alkmaer, et, prenant une moyenne, il trouve 28 500 perches, chacune de 42 pieds du Rhin pour longueur de 1 degré du grand cercle de la terre. Ainsi, 342 060 pieds du Rhin, environ 54 028 toises ou 27 lieues de 2000 toises, longueur trop grande de 2 lieues environ. Il a été aidé dans ces travaux par les deux frères Érasme et Caspar de Sterrenberg, jeunes barons autrichiens, déjà versés dans les calculs trigonométriques. Philémon, leur professeur, voulant mettre à profit les vacances, avait prié Snellius de faire connaître la contrée à ses élèves. Alors Snellius les engagea à prendre part à sa triangulation. Il prit pour première station un endroit nommé *Oudewart*, lieu de sépulture de son père, et où sa vieille mère vivait retirée depuis son veuvage. Il célèbre cette ville *ob nobilem illam cladem quam Oudewarte est perpessa quod omnium prima patriæ libertatem suo sanguine redemerit*, à cause de la noble catastrophe qu'Oudewart avait subie : la première de toutes les villes, elle racheta de son sang la liberté de la patrie. Il donne à ce sujet l'extrait suivant d'un manuscrit de son père :

Veteraquinum arctè obsessum fuit, tandem captum VII Augusti Juliani, anno CIϽ IϽ LXXV. Sole medium cœlum jam signante, cives et præsidarii cæsi, nulli neque ætati nec sexui parcitum, paucissimi in semen servati. Oppidum incensum et flamma absumptum. Sed nescio quo me patriæ amor et meorum dulcissima recor-

datio abripuerit, quin ad institutum potius revertar?

« Oudewart fut étroitement assiégée, et enfin prise le 7 août 1575, à midi. Soldats et bourgeois furent massacrés; on n'épargna ni l'âge ni le sexe. Quelques enfants seuls au berceau furent conservés. La ville incendiée devint la proie des flammes. Mais où m'entraîne l'amour de la patrie, les si douces ressouvenances des miens? Retournons plutôt à notre besogne. »

Le chapitre X (page 199) est intitulé : *Trium locorum intervallis inter se datis, quarti distantia ab omnibus unica statione definitus.*

« Les distances mutuelles des trois points étant données, déterminer par une seule station la position d'un quatrième point. »

Il prescrit à cet effet la méthode des *segments capables,* que Pothenot croyait avoir inventée, et qui porte son nom. Snellius fait usage de sa méthode pour lever divers édifices de la ville de Leyde. Sur la page 204, on trouve la figure qui représente l'intersection des deux arcs de cercle (*).

Le triangle donné est *iuy*, et *o* le quatrième point. On a

$$ui = 62,6,$$
$$yi = 52,$$
$$uy = 110,9,$$
$$yoi = 32^\circ 57',$$
$$you = 64^\circ 40';$$

de là il conclut

$$iyu = 15^\circ 56'.$$

Ensuite abaissant des deux centres des segments capables sur les côtés *iu* et *yu*, il obtient une suite de triangles

(*) Pothenot fut adjoint à La Hire pour continuer la méridienne de Paris au Nord (Lalande, *Astronomie*, n° 2663, 2e édition).

rectangles où l'on peut calculer successivement les côtés et les angles, et parvient facilement à ces distances :

$$oy = 79,3,$$
$$oi = 96,2,$$
$$ou = 118,2.$$

Il serait de toute justice d'attacher désormais à ce procédé le nom de Snellius. Ne pas oublier que l'auteur n'avait que 26 ans. Quel génie! (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 80.) Il évalue le nombre de grains de sable que peut contenir la sphère céleste d'Archimède, et dans celle de Copernic; il suppose que 100 grains de sable mis bout à bout occupent une longueur de $\frac{1}{10}$ de pied du Rhin.

Il a dédié son premier livre aux États des provinces confédérées, et le second aux deux barons autrichiens.

Dans le chapitre VII et dernier, il fait voir les défauts de la méthode proposée par Maurolycus pour mesurer la terre; elle consiste à mesurer l'angle de *dépression* sur une montagne dont la hauteur est connue. Il attribue la principale erreur à la *réfraction* qui a lieu à l'horizon, où s'accumulent tant de vapeurs. Il cite un navigateur nommé Patritius, qui prétend prouver que la terre est plane, parce que sortant de Toulon les matelots aperçoivent les montagnes de la Corse : ce qui serait impossible, si la mer était bombée!

Le *Eratosthenes Batavus*, ouvrage très-rare, appartient à M. Prouhet, qui fait une collection d'ouvrages mathématiques avec un discernement digne d'un excellent géomètre, digne d'un érudit consommé: qualités dont la réunion est aussi exeessivement rare en deçà du Rhin.

BIBLIOGRAPHIE.

Della vita et delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo, et di Gherardo da Sabionetta, astronomo del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da *Baldassare Boncompagni.* In-folio de 109 pages; Roma, 1851.

On dit souvent que nous devons nos connaissances scientifiques aux Grecs et aux Arabes. Il serait plus juste de dire, avec un sentiment de reconnaissance, que nous devons nos sciences à ceux qui ont traduit les ouvrages grecs et arabes. Ce sont là les véritables promoteurs de la renaissance, du rappel de l'esprit humain à toute sa liberté d'action. Gérard de Cremone est un de ces vaillants promoteurs. Il a traduit trois ouvrages de dialectique, dix-sept ouvrages de géométrie, douze ouvrages d'astronomie; onze ouvrages de philosophie; 32 ouvrages de médecine. On en trouve la liste complète dans un *Éloge* de Gérard conservé dans la bibliothèque du Vatican et inséré dans la présente Notice (p. 4 à 7). L'*Almageste* de Ptolémée est le plus important de ces ouvrages. Ayant appris que ce manuscrit existait à Tolède, Gérard s'y est transporté et y a passé plusieurs années pour étudier l'arabe.

L'Italie, terre privilégiée, n'est jamais restée complétement étrangère ni aux lettres, ni aux sciences, et encore aujourd'hui, qui ne connaît ses philosophes, ses géomètres, ses astronomes, ses physiciens?

AVIS.

En 1858, on donnera soit l'analyse, soit l'énoncé de tous les articles contenus dans les journaux suivants.

1° *Journal de Crelle*; 2° *Journal de Gunther*; 3° *Quarterly journal* (*Cayley* et *Sylvester*); 4° *Annales de Tortolini*.

Les thèses qui nous seront adressées.

M. le professeur Mathieu (Émile) nous a communiqué les solutions de questions *difficiles* proposées et non résolues dans le traité de M. Bertrand; elles seront successivement publiées dans les *Annales*, ainsi que les questions analogues des traités de M. E. Catalan et Rouché: modèle de gymnastique mathématique propre à former de vigoureux athlètes.

Les ouvrages suivants sont en voie de traduction.

1°. *Conic curves*, de G. SALMON, par M. *Poudra*.

2°. *Geometrische Entwickelung*, de STEINER, par M. *Dewulf*, officier du génie.

3°. *Calcul of operations*, de CARMICHAEL, par M. le professeur *Rey*.

4°. *Theoria motus planetarum*, de GAUSS, par M. le professeur *Dieu*.

L'*Astronomie*, de BRUNOW, par M. le professeur *Terquem* (*Paul*), est terminée.

On est prié de faire les figures à part et de dimension à pouvoir entrer dans le texte des *Annales*.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME III.)

Bibliographie.

Historique.

Biographie.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérique.)

ERRATA.

Page 18, ligne 2, *au lieu de* les, *lisez* le.
18, ligne 2, *au lieu de* livres, *lisez* livre.
22, ligne 2 en remontant, *au lieu de* que s est, *lisez* qui soit.
24, ligne 11, *au lieu de* moins plus, *lisez* moins pas plus.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

